

文章编号: 1006-4710(2011)03-0253-08

齿间滑动摩擦对行星轮系非线性振动的影响

卫一多, 刘凯, 崔亚辉, 赵常青

(西安理工大学 机械与精密仪器工程学院, 陕西 西安 710048)

摘要: 考虑齿间互动摩擦和时变刚度非线性因素, 建立扭转行星轮系动力学模型。根据齿间摩擦的特点, 将啮合周期划分为三个阶段。用解析和数值计算相结合的方法, 研究行星轮系齿间滑动摩擦、齿间载荷分配系数、相位差等参数对行星轮系非线性振动和稳定性的影响。发现在考虑齿间滑动摩擦力时, 行星轮系非线性动力学存在如下特点: 摩擦因子对行星轮系各构件的摩擦振幅有重要影响, 特别对太阳轮的影响最为明显; 相位差的存在改善了行星轮系啮合刚度的分布, 对减小各构件的摩擦振幅和提高系统的参数稳定性有重要影响。研究结果表明, 齿间滑动摩擦对行星轮系非线性振动动力学的影响不容忽视, 尤其是在低速、重载的工况下。

关键词: 滑动摩擦; 参数不稳定性; 行星轮系; 非线性响应

中图分类号: TH132.4 **文献标志码:** A

Impacts of Sliding Friction on Planetary Gear Train Nonlinear Vibration

WEI Yiduo, LIU Kai, CUI Yahui, ZHAO Changqing

(Faculty of Mechanical and Precision Instrument Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

Abstract: In considering the interactive friction among gear teeth and the nonlinear factors of time fluctuation stiffness, dynamic model of rotational planetary gear train is established. Based on the features among gear friction, mesh period can be divided into three segments. Impact of sliding friction, load distribution among gear teeth coefficient, phase of planetary gear train are studied by analytical method and numerical calculation. When the sliding friction is considered, the nonlinear dynamics of planetary gear train has following characteristics: the friction of amplitude is significantly effected by friction factor, the amplitude of sun is more sensitive than others. The existence of phase of planetary gear train can improve mesh stiffness distribution, the phase has an important influence on friction of amplitude and improves the stability of system. Research shows that sliding friction impact of nonlinear dynamics on planetary gear train can not be ignored espically in the case of low speed and heavy load.

Key words: sliding friction; parametric instability; planetary gear train; nonlinear response

行星轮系具有大传动比、高功率密度、强承载能力、结构紧凑等优点而被广泛应用于风力发电、航空、船舶等动力传动系统中, 其振动和噪声控制一直是行星轮系研究和应用的焦点。行星轮系振动的本质是系统参数变化引起的非线性振动, 研究系统参数对其非线性动力学的影响有着重要的理论价值和工程意义。

齿轮系统非线性动力学主要的综述性文献为

[1-3]。文献[4]研究了摩擦力和摩擦力矩对齿轮噪声的影响。文献[5]中用实验和数值仿真研究了直齿轮和斜齿轮的摩擦力对齿轮振动的影响。文献[6]分析了齿轮传动中的摩擦力, 文献[7]系统研究了轮齿间的滑动摩擦对直齿轮、斜齿轮振动和噪声的影响并做了相关的试验。文献[8]系统总结计算轮齿间摩擦系数的四种计算公式并与实验数据进行了对比, 为有效估算啮合轮齿间的摩擦力奠定了基

收稿日期: 2011-06-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51175419); 陕西省“13115”科技创新工程重大科技专项基金资助项目(2008ZDKG-28); 陕西省重点学科建设专项基金资助项目(080204)。

作者简介: 卫一多(1982-), 男, 陕西扶风人, 博士生, 研究方向为齿轮系统的非线性振动。E-mail: 652108894@qq.com。
刘凯(1957-), 男, 陕西西安人, 教授, 博导, 博士, 研究方向为现代传动技术、无级变速传动系统与车辆系统人机工程。E-mail: kliu@mail.xaut.edu.cn。

础。文献[9]建立了考虑轮齿间的滑动摩擦力、啮合阻尼的两级齿轮传动的非线性模型,运用 Peano-Bake 级数和摄动多尺度法,研究摩擦因子、阻尼等参数对系统动力学的影响。

上述研究结果表明,啮合轮齿间的滑动摩擦对齿轮系统振动和噪声影响不容忽视,尤其在低速、重载工况下。

本文结合风电增速行星轮系其扭矩大、转速低、重合度高等特点,建立了考虑行星轮系齿间滑动摩擦和时变啮合刚度的扭转非线性振动模型,运用解析推导和数值计算相结合的方法,探讨了齿间摩擦因子、齿间载荷分配系数和相位差等设计参数对行星轮系参数稳定性和非线性振动响应的影响。

1 系统模型

1.1 系统参数假设

图1为啮合轮齿在单位化的啮合周期内摩擦力臂变化示意图(实线为啮合齿对1#,虚线为啮合齿对2#)。

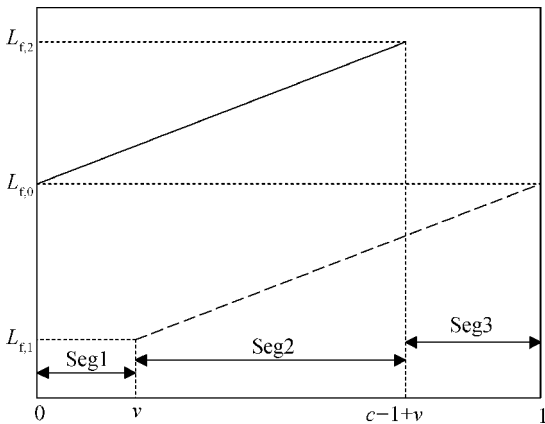


图1 摩擦力臂示意图

Fig.1 Schematic diagram of friction arm

为研究齿间滑动摩擦对系统非线性振动的影响,系统参数假设如下。

1) 齿间载荷分配

$$\text{Seg1: } N_1(t) = 0, N_2(t) = N \quad t \in [0, vT] \quad (1)$$

$$\text{Seg2: } N_1(t) = \alpha N, N_2(t) = (1 - \alpha)N \quad t \in [vT, (c - 1 + v)T] \quad (2)$$

$$\text{Seg3: } N_1(t) = N, N_2(t) = 0 \quad t \in [(c - 1 + v)T, T] \quad (3)$$

2) 摩擦系数

$$\mu = \mu_0 \text{sgn}(v_r) \quad (4)$$

从开始进入啮合到节点: $\text{sgn}(v_r) = +1$;在啮合节点: $\text{sgn}(v_r) = 0$;从节点到脱离啮合: $\text{sgn}(v_r) = -1$ 。

3) 摩擦力臂

$$\text{Seg1: } L_{r,1}(t) = \rho_{11} + \zeta_{11}t, L_{r,2}(t) = 0 \quad t \in [0, vT] \quad (5)$$

$$\text{Seg2: } L_{r,1}(t) = \rho_{12} + \zeta_{12}t, L_{r,2}(t) = \rho_{22} + \zeta_{22}t \quad t \in [vT, (c - 1 + v)T] \quad (6)$$

$$\text{Seg3: } L_{r,1}(t) = 0, L_{r,2}(t) = \rho_{33} + \zeta_{33}t \quad t \in [(c - 1 + v)T, T] \quad (7)$$

4) 摩擦力矩

$$\text{Seg1: } T_{r,1}(t) = -T_p / (r_p L_{r,1}^{-1} + \mu), T_{r,2} = 0 \quad t \in [0, vT] \quad (8)$$

$$\text{Seg2: } T_{r,1}(t) = -T_p \alpha / (r_p L_{r,1}^{-1} + \mu(1 - \alpha)L_{r,2}L_{r,1}^{-1} - \alpha\mu) \\ T_{r,2}(t) = T_p(1 - \alpha) / (r_p L_{r,2}^{-1} + \mu(1 - \alpha) - \mu L_{r,1}L_{r,2}^{-1}) \quad t \in [vT, (c - 1 + v)T] \quad (9)$$

$$\text{Seg3: } T_{r,1}(t) = 0, T_{r,2}(t) = T_p / (r_p L_{r,2}^{-1} - \mu) \quad t \in [(c - 1 + v)T, T] \quad (10)$$

式中, N 为啮合轮齿法向正压力, v 为从开始进入啮合到双齿啮合所用的单位化时间, T 为轮齿啮合周期, μ 为齿间摩擦系数, α 为齿间载荷分配因子, c 为齿轮的名义重合度, ρ, ζ 取决于系统参数, L_r 为摩擦力臂, $\text{sgn}(v_r)$ 为符号函数, T_r 为摩擦力矩,下标1、2表示该项分别为啮合齿对1#和啮合齿对2#的参数。

图2为运用集中质量法,建立的考虑齿间滑动摩擦的行星轮系非线性振动模型。

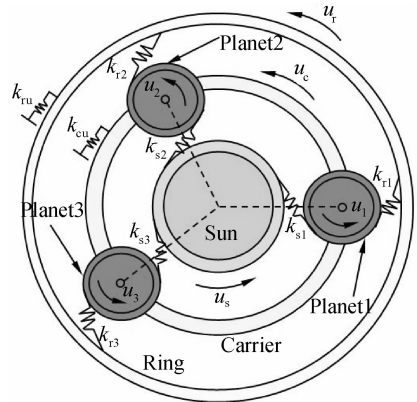


图2 行星轮系非线性振动模型

Fig.2 Nonlinear vibration model of planetary gear system

1.2 齿间滑动摩擦对系统啮合刚度的影响

计算轮齿啮合刚度时考虑的因素有:轮齿的弯曲变形、剪切变形和赫兹接触变形。文献[9]总结了摩擦力对齿轮刚度的影响。

图3为行星轮系内、外啮合滑动摩擦力分析示意图。根据齿间滑动摩擦的特点,在啮合周期内,将啮合过程划分为三个阶段。齿间滑动摩擦对啮合刚度影响的推导过程如下。

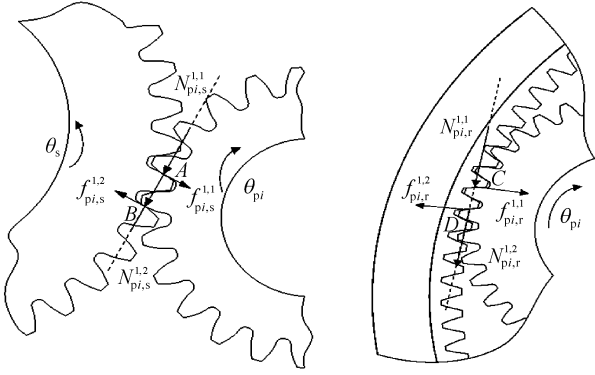


图3 齿轮内、外啮合滑动摩擦力分析示意图

Fig.3 Sliding friction force in internal gear and external gear

$$\text{Seg1: } k_1 = \bar{k}(1 - \beta)[1 + \bar{\varepsilon}(1 - c)] \quad (11)$$

$$\text{Seg2: } k_2 + k'_2 = \bar{k}[1 - \beta(1 - 2\alpha)] \times [1 + \bar{\varepsilon}(2 - c)] \quad (12)$$

$$\text{Seg3: } k_3 = \bar{k}(1 + \beta)[1 + \bar{\varepsilon}(1 - c)] \quad (13)$$

$$\varepsilon = \frac{\frac{1}{2}\{1 - \beta[1 + 2\alpha(2 - c)]\}k_{1n}}{ck_{1n}} = \frac{1}{2c}\{1 - \beta[1 + 2\alpha(2 - c)]\} \quad (14)$$

令：

$$\varepsilon_0 = 1/(2c), \quad \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2/g \quad (15)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0\{1 - \beta[1 + 2\alpha(2 - c)]\}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2c_r}\{1 - \beta[1 + 2\alpha(2 - c_r)]\} =$$

$$\frac{1}{2c_s} \cdot \frac{c_s}{c_r} \cdot \frac{1 - \beta[1 + 2\alpha(2 - c_r)]}{1 - \beta[1 + 2\alpha(2 - c_s)]} \cdot \{1 - \beta[1 + 2\alpha(2 - c_s)]\} = \varepsilon_1 g \quad (16)$$

其中：

$$g' = \frac{c_s}{c_r}, \quad f = \frac{1 - \beta[1 + 2\alpha(2 - c_r)]}{1 - \beta[1 + 2\alpha(2 - c_s)]}, \quad g = g'f$$

ε_1 定义类同。

$$\varepsilon'_{r(s)} = \frac{5 - \alpha(2\frac{1}{\varepsilon} + 4 - 2c_{r(s)})}{1 - \alpha(2\frac{1}{\varepsilon} + 4 - 2c_{r(s)})} \quad (17)$$

式中, $\beta = \hat{\beta}\mu$, β 为摩擦影响系数, 在本文计算中取 $\hat{\beta} = 0.1^{[9]}$ 。 $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{c_{r(s)}}$, \bar{k} 为平均刚度, ε' 为摩擦刚度幅值影响因子, ε_0 为无摩擦刚度比率, k_1 , k_2 和 k_3 分别为 Seg1、Seg2 和 Seg3 阶段的轮齿啮合刚度。下标 r、s 分别表示该项为行星轮与太阳轮、行星轮与内齿圈的参数。

据以上推导, 得到齿间滑动摩擦对轮齿啮合刚度函数的影响曲线如图 4 所示。

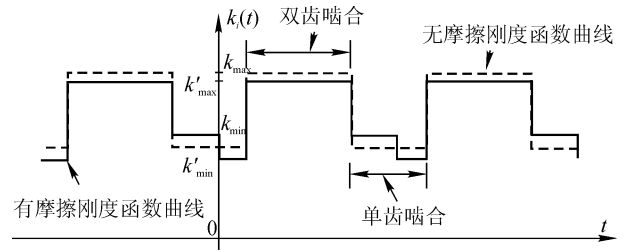


图4 齿间滑动摩擦对啮合刚度函数的影响

Fig.4 Mesh stiffness variations effect by sliding friction

轮齿啮合刚度的傅里叶级数展开式为：

$$k_{1n}(t) = 2k_{vs} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ a_{sn}^{(l)} \cos \left[l\Omega(t - \frac{\pi}{\Omega}) \right] + b_{sn}^{(l)} \sin \left[l\Omega(t - \frac{\pi}{\Omega}) \right] \right\} \quad (18)$$

$$k_{2n}(t) = 2k_{vr} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ a_{m}^{(l)} \cos \left[l\Omega(t - \frac{\pi}{\Omega}) \right] + b_{m}^{(l)} \sin \left[l\Omega(t - \frac{\pi}{\Omega}) \right] \right\} \quad (19)$$

Ω 为系统啮合频率, k_{1n} 、 k_{2n} 分别为行星轮 - 太阳轮啮合刚度和行星轮 - 内齿圈啮合刚度的变化部分。通过定义将啮合刚度函数与摩擦影响因子、齿间载荷分配系数、重合度等参数联系起来。为不失一般性, 将行星轮 1 与太阳轮的节点啮合时间记为 $t = 0$ 。

式(18) 和式(19) 具体的傅里叶系数 $a_{sn}^{(l)}$ 、 $b_{sn}^{(l)}$ 、 $a_m^{(l)}$ 、 $b_m^{(l)}$ 的计算参见文献[12]。

定义平均啮合刚度：

$$\begin{cases} k_{sp} = c_s k_{01} \\ k_{rp} = c_r k_{02} \end{cases} \quad (20)$$

式中, k_{01} 为太阳轮 - 行星轮无摩擦单对轮齿啮合刚度, k_{02} 为内齿圈 - 行星轮无摩擦单对轮齿啮合刚度。

$$\begin{aligned} M\ddot{q} + K(t)q &= \\ M\ddot{q} + [K_0 + K_v(t)]q &= F \end{aligned} \quad (21)$$

其中：

$$M = \text{diag} \left[\frac{J_c}{r_c^2} + N_0 m_p, \frac{J_r}{r_r^2}, \frac{J_s}{r_s^2}, \underbrace{\frac{J_p}{r_p^2}, \dots, \frac{J_p}{r_p^2}}_{\text{行星轮个数 } N_0} \right]$$

$$F = F_T + f_T$$

$$F_T = \left[\frac{T_c}{r_c}, \frac{T_r}{r_r}, \frac{T_s}{r_s}, 0, \dots, 0 \right]^T$$

$$f_T = [T_{fc}, T_{fr}, T_{fs}, T_{f1}, \dots, T_{fN_0}]^T$$

$$q = [u_c, u_r, u_s, u_1, \dots, u_{N_0}]^T$$

$$u_H = r_H \theta_H \quad (H = c, r, s, 1, \dots, N_0)$$

$$K(t) = K_0 + K_v(t) = K_0 +$$

$$2\varepsilon \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ K_v^{(l)} \cos \left[l\Omega(t - \frac{\pi}{\Omega}) \right] + K_v^{(l)} \sin \left[l\Omega(t - \frac{\pi}{\Omega}) \right] \right\} \quad (22)$$

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} N_0(k_{sp} + k_{rp}) & -N_0k_{rp} & -N_0k_{sp} & k_{rp} - k_{sp} & \cdots & k_{rp} - k_{sp} \\ & N_0k_{rp} & 0 & -k_{rp} & \cdots & -k_{rp} \\ & & N_0k_{sp} & k_{sp} & \cdots & k_{sp} \\ & & & k_{rp} + k_{sp} & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & k_{rp} + k_{sp} \end{bmatrix} \quad (23)$$

对称

行星轮位置角: $\psi_n = 2\pi \frac{n-1}{N_0}$, $n = 1, \dots, N_0$ (如图2所示,规定逆时针方向为正)。

N_0 为行星轮系总的行星轮的个数, \mathbf{F} 为行星轮系外界激励列向量, $\mathbf{K}(t)$ 为系统啮合刚度矩阵。

行星轮系相位差的计算见文献[10]:

$$\gamma_{sn} = z_s \frac{\psi_n}{2\pi}, \gamma_{rn} = z_r \frac{\psi_n}{2\pi} \quad (24)$$

$$\mathbf{K}_0 \boldsymbol{\phi}_m = \boldsymbol{\omega}_m^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_m \quad (25)$$

式中, $\boldsymbol{\omega}_m$ 为系统固有频率, $\boldsymbol{\Phi}_0 = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_L]$ 为系统的正则振型矩阵, $\boldsymbol{\Phi}_0^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi}_0 = \mathbf{I}$, $\boldsymbol{\Phi}_0^T \mathbf{K}_0 \boldsymbol{\Phi}_0 = \boldsymbol{\Lambda}$ 。

引入变换: $\mathbf{q} = \boldsymbol{\Phi}_0 \mathbf{x}$, 将其代入式(21), 并令 $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, 得:

$$\ddot{x}_m + \boldsymbol{\omega}_m^2 x_m + 2\varepsilon \sum_{w=1}^L \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ D_{mw}^{(l)} \cos \left[l\Omega \left(t - \frac{\pi}{\Omega} \right) \right] + E_{mw}^{(l)} \sin \left[l\Omega \left(t - \frac{\pi}{\Omega} \right) \right] \right\} x_w = 0 \quad (26)$$

$$\mathbf{D}^{(l)} = \boldsymbol{\Phi}_0^T \mathbf{k}_{v1}^{(l)} \boldsymbol{\Phi}_0, \mathbf{E}^{(l)} = \boldsymbol{\Phi}_0^T \mathbf{k}_{v2}^{(l)} \boldsymbol{\Phi}_0, g_0 = \frac{k_{rp}}{k_{sp}} \quad (27)$$

2 应用摄动法研究系统参数的不稳定性

依据文献[11-13],运用多尺度法,设方程(26)的解为:

$$x_m = \varepsilon^0 x_{m0}(t, t_1) + \varepsilon^1 x_{m1}(t, t_1) + o(\varepsilon) \quad (m = 1, \dots, L) \quad (28)$$

将式(28)代入式(26),并令 ε^0 和 ε^1 的系数为0,得:

$$\frac{\partial^2 x_{m0}}{\partial t^2} + \boldsymbol{\omega}_m^2 x_{m0} = 0 \quad (m = 1, \dots, L) \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 x_{m1}}{\partial t^2} + \boldsymbol{\omega}_m^2 x_{m1} = -2 \frac{\partial^2 x_{m0}}{\partial t \partial t_1} - \\ & 2 \sum_{w=1}^L \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ D_{mw}^{(l)} \cos \left[l\Omega \left(t - \frac{\pi}{\Omega} \right) \right] + \right. \\ & \left. E_{mw}^{(l)} \sin \left[l\Omega \left(t - \frac{\pi}{\Omega} \right) \right] \right\} x_{w1} \quad (m = 1, \dots, L) \end{aligned} \quad (30)$$

式(29)的解为:

$$x_{m0} = A_m(t_1) e^{j\boldsymbol{\omega}_m(t - \frac{\pi}{\Omega})} + c.c. \quad (m = 1, \dots, L) \quad (31)$$

式中, $c.c.$ 为前一项的共轭项。

将式(31)代入式(30)得:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 x_{m1}}{\partial t^2} + \boldsymbol{\omega}_m^2 x_{m1} = -2j\boldsymbol{\omega}_m e^{j\boldsymbol{\omega}_m t} \frac{\partial A_m(t_1)}{\partial t_1} - \\ & \sum_{w=1}^L \sum_{l=1}^{\infty} A_w(t_1) \left[(D_{mw}^{(l)} - jE_{mw}^{(l)}) e^{j(\boldsymbol{\omega}_m + l\Omega)(t - \frac{\pi}{\Omega})} + \right. \\ & \left. (D_{mw}^{(l)} + jE_{mw}^{(l)}) e^{j(\boldsymbol{\omega}_m - l\Omega)(t - \frac{\pi}{\Omega})} \right] + \\ & c.c. \quad (m = 1, \dots, L) \end{aligned} \quad (32)$$

令 $l\Omega = \boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_q + \sigma\varepsilon$, 这里 σ 为调谐参数, 表示 $(\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_q)$ 与 $l\Omega$ 的接近程度。

单固有频率:

$$\Omega = \frac{2\boldsymbol{\omega}_p}{l} \pm \frac{\varepsilon}{l\boldsymbol{\omega}_p} \sqrt{\Lambda_{pp}^{(l)}} \quad (33)$$

重固有频率:

$$\Omega = \frac{\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_q}{l} \pm \frac{\varepsilon}{l} \sqrt{\frac{\Lambda_{pq}^{(l)}}{\boldsymbol{\omega}_p \boldsymbol{\omega}_q}} \quad (34)$$

式中, $\Lambda_{pq}^{(l)} = (D_{pq}^{(l)})^2 + (E_{pq}^{(l)})^2$ 。

设系统方程的特征根为 λ , 将实部与虚部分开, 则得式(32)特征方程为:

$$\lambda^2 + \sigma\lambda + \frac{1}{4}\Lambda_{pq}^{(l)} = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} \left[\sigma \pm (\sigma^2 - \Lambda_{pq}^{(l)})^{\frac{1}{2}} \right] \quad (35)$$

由式(35)知:当 $\sigma^2 > \Lambda_{pq}^{(l)}$, A_p 和 A_q 为有界周期渐近解; $\sigma^2 < \Lambda_{pq}^{(l)}$, A_p 和 A_q 为发散解; $\sigma^2 = \Lambda_{pq}^{(l)}$, 为其临界状态。为消除式(32)的久期项, 根据不同 $\Lambda_{pq}^{(l)}$, 则有以下情况。

1) 当 p 或 q 为单根时, 则:

$$\begin{aligned} & 2j\boldsymbol{\omega}_p \frac{\partial A_p}{\partial t_1} + [(D_{pp}^{(l)} + jE_{pp}^{(l)}) \bar{A}_p + \\ & (D_{pq}^{(l)} + jE_{pq}^{(l)}) \bar{A}_q] e^{j\sigma t_1} = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & 2j\boldsymbol{\omega}_q \frac{\partial A_q}{\partial t_1} + [(D_{qq}^{(l)} + jE_{qq}^{(l)}) \bar{A}_q + \\ & (D_{qp}^{(l)} + jE_{qp}^{(l)}) \bar{A}_p] e^{j\sigma t_1} = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

满足式(36)和式(37)的解分别为 A_p 和 A_q :

$$A_p = (R_p + jI_p) e^{\frac{j\sigma t_1}{2}}, A_q = (R_q + jI_q) e^{\frac{j\sigma t_1}{2}} \quad (38)$$

式中, R_p, R_q, I_p, I_q 均为 t_1 的实函数; \bar{A}_p, \bar{A}_q 分别为 A_p, A_q 的共轭函数。将式(38)代入式(36)和式

(37), 对于有界的周期渐近解, 有:

$$\sigma \cong \frac{\sqrt{\Lambda_{pq,1}^{(l)}}}{\omega_p} \Lambda_{pq,1}^{(l)} = D_{pq}^{(l)} D_{qp}^{(l)} + E_{pq}^{(l)} E_{qp}^{(l)} + [(D_{pp}^{(l)})^2 + (D_{qq}^{(l)})^2 + (E_{pp}^{(l)})^2 + (E_{qq}^{(l)})^2]^{\frac{1}{2}} \quad (39)$$

单根情况下, 有:

$$\Omega = \frac{1}{l} (2\omega_p \pm \frac{\varepsilon}{\omega_p} \sqrt{\Lambda_{pq,1}^{(l)}}) \quad (40)$$

2) p 为重根, r 为单根时, $l\Omega = \omega_p + \omega_r + \varepsilon\sigma$, p 为重根, r 为单根, 为消除式(32)的久期项, 则:

$$2j\omega_p \frac{\partial A_r}{\partial t_1} + [(D_{rp}^{(l)} + jE_{rp}^{(l)})\bar{A}_p + (D_{rq}^{(l)} + jE_{rq}^{(l)})\bar{A}_q] e^{j\sigma t_1} = 0 \quad (41)$$

$$2j\omega_p \frac{\partial A_p}{\partial t_1} + (D_{pr}^{(l)} + jE_{pr}^{(l)})\bar{A}_r e^{j\sigma t_1} = 0 \quad (42)$$

$$2j\omega_q \frac{\partial A_q}{\partial t_1} + (D_{qr}^{(l)} + jE_{qr}^{(l)})\bar{A}_r e^{j\sigma t_1} = 0 \quad (43)$$

令 $A_r = (R_r + jI_r) e^{\frac{j\sigma t_1}{2}}$, 并将其代入式(41)、(42)、(43), 则对有界的周期渐近解, 有:

$$\Omega = \frac{1}{l} [(\omega_p + \omega_r) \pm \frac{\varepsilon}{\omega_p \omega_r} \sqrt{\Lambda_{pq,2}^{(l)}}] \quad (44)$$

$$\Lambda_{pq,2}^{(l)} = D_{pr}^{(l)} D_{rp}^{(l)} + D_{qr}^{(l)} D_{rq}^{(l)} + E_{pr}^{(l)} E_{rp}^{(l)} + E_{qr}^{(l)} E_{rq}^{(l)} \quad (45)$$

Λ 中具体元素表达式的计算见文献[12]。

3 系统在摩擦激励下非线性响应的计算

$$\text{令状态向量: } \mathbf{x} = [\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}]^T \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (46)$$

式中, 系统矩阵:

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}(t) & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (47)$$

$\mathbf{u}(t) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_T$, 当 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$, 式(46)对应的齐次方程为:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad (48)$$

系统的状态转移矩阵^[14]为:

$$\Phi_{\mathbf{x}}(t_{\chi}, t_{\chi-1}) = [e^{\eta_1^{(i)}(t_i-t_{i-1})} \mathbf{v}_1^{(i)}, e^{\eta_2^{(i)}(t_i-t_{i-1})} \mathbf{v}_2^{(i)}, \dots, e^{\eta_d^{(i)}(t_i-t_{i-1})} \mathbf{v}_d^{(i)}] \quad (49)$$

由文献[15]可知:

$$\Phi(T, 0) = \prod_{q=h}^1 \Phi_q(t_q, t_{q-1}) \\ T = t_h > t_{h-1} > \dots > t_1 > t_0 = 0 \quad (50)$$

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{f_0}(t) = \Phi(t, 0)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t, \tau)\mathbf{f}(\tau) d\tau \\ \mathbf{f}(\tau) = \begin{cases} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_T(\tau) \end{cases} \end{cases} \quad (51)$$

式中, \mathbf{X}_{f_0} 为计及初始条件下系统的响应。

若不计系统初始条件, 即 $\mathbf{X}(0) = \mathbf{0}$, 系统在外界激励下的响应为:

$$\mathbf{X}_f(t) = \int_0^t \Phi(t, \tau)\mathbf{f}(\tau) d\tau \quad (52)$$

又由文献[16]可知: $\Phi(t, 0) = \Phi(t, \tau)\Phi(\tau, 0) \Rightarrow \Phi(t, \tau) = \Phi(t, 0)\Phi^{-1}(\tau, 0)$, 式中 Φ 为系统的状态转移矩阵, $\mathbf{f}(\tau)$ 为外界激励列向量, τ 为积分变量, t 为积分常数, 则:

$$\mathbf{X}_f(t) = \Phi(t, 0)[\mathbf{G}_1(w) + \mathbf{G}_2(t)] \quad (53)$$

由式(53)可看出, 在外界激励下系统的响应可分为 $\mathbf{G}_1(w)$ 和 $\mathbf{G}_2(t)$ 两部分。对于 w 个完整周期, 有:

$$\mathbf{G}_1(w) = \sum_{z=1}^w \prod_{q=1}^h [\Phi_q^{-1}(t_q, t_{q-1})]^{z-1} \cdot \begin{cases} \int_0^{t_1} \Phi_1^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau_0) d\tau \quad (q=1) \\ \int_0^{t_1} \Phi_1^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau_0) d\tau + \Phi_1^{-1}(t_1, 0) \int_{t_1}^{t_2} \Phi_2^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau_0) d\tau \quad (q=2) \\ \dots \\ \int_0^{t_1} \Phi_1^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau_0) d\tau + \Phi_1^{-1}(t_1, 0) \int_{t_1}^{t_2} \Phi_2^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau_0) d\tau + \dots + \Phi_1^{-1}(t_1, 0)\Phi_2^{-1}(t_2, t_1) \dots \Phi_{h-1}^{-1}(t_{h-1}, t_{h-2}) \cdot \int_{t_{h-1}}^T \Phi_h^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau_0) d\tau \quad (q=h) \end{cases} \quad (54)$$

式中 $\tau_0 = \tau + (z-1)T$ 。同理, 有:

$$\mathbf{G}_2(t) = [\prod_{q=1}^h \Phi_q^{-1}(t_i, t_{i-1})]^M \cdot \begin{cases} \int_0^{t-MT} \Phi_1^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau_0) d\tau \quad (t-MT \in [0, t_1)) \\ \int_0^{t_1} \Phi_1^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau_0) d\tau + \Phi_1^{-1}(t_1) \cdot \int_{t_1}^{t-MT} \Phi_2^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau_0) d\tau \quad (t-MT \in [t_1, t_2)) \\ \dots \\ \int_0^{t_1} \Phi_1^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau_0) d\tau + \Phi_1^{-1}(t_1, 0) \int_{t_1}^{t_2} \Phi_2^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau_0) d\tau + \dots + \Phi_1^{-1}(t_1, 0)\Phi_2^{-1}(t_2, t_1) \dots \Phi_{h-1}^{-1}(t_{h-1}, t_{h-2}) \cdot \int_{t_{h-1}}^{t-MT} \Phi_h^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau_0) d\tau \quad (t-MT \in [t_{h-1}, t_h)) \end{cases} \quad (55)$$

式中, $\tau_0 = \tau + zT$ 。

4 系统参数对行星轮系动力学影响的分析与讨论

以某兆瓦级风电增速行星轮系为例(参数见表

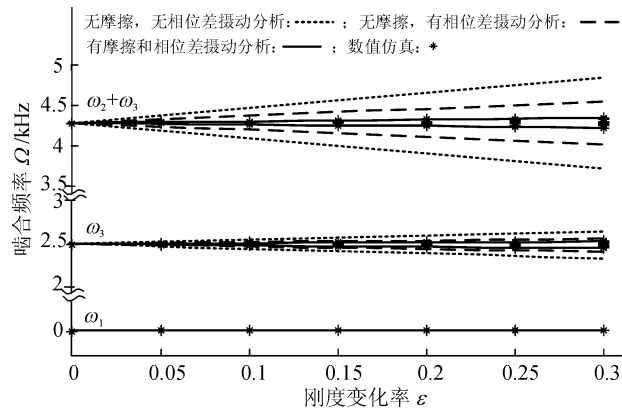
表1 风电增速行星轮系参数(内齿圈固定)

Tab.1 Wind power parameters of planetary gear with fixed ring

基本参数	齿数: $Z_s = 23, Z_p = 37, Z_r = 97$; 模数: $m = 14$ mm; 压力角: $\alpha_0 = 20^\circ$; 齿宽: $B = 300$ mm 重合度: $c_s = 1.65, c_r = 1.93$; 传动比: $i_{sc} = 5.217$; 输入转矩: $T_{in} = 1.0E5$ N·m; 输入转速: $n_{in} = 20$ r/min
动力学参数	平均啮合刚度: $k_{sp} = k_{rp} = 7.5E8$ N·m 等效惯量: $J_c/r_c^2 = 3\ 268, J_s/r_s^2 = 159, J_p/r_p^2 = 241, m_p = 312$ kg 啮合周期: $T = 0.025$ s; $v_s = 0.15; v_r = 0.01; \gamma_{sn} = -0.10$ $N_0 = 3$ 时: $\omega_1 = 0$ kHz, $\omega_2 = 1.787$ kHz, $\omega_3 = \omega_4 = 2.495$ kHz, $\omega_5 = 4.272$ kHz

4.1 齿间滑动摩擦和相位差对系统参数稳定性的影响

图5为齿间滑动摩擦和相位差对由轮齿啮合刚度变化引起的参数稳定性影响。



$$\begin{aligned} (\gamma_{sn} &= [0, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}], \gamma_m = [0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \gamma_{sr} = \frac{1}{2}, \\ c_s &= 1.6, c_r = 1.7, \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2, \mu = 0.05) \end{aligned}$$

图5 摩擦和相位差对稳定性的影响

Fig.5 Impact of stiffness variation on instability boundaries with friction and phase

由图5可看出,相位差和齿间滑动摩擦都不影响系统刚体运动稳定性;在摩擦和相位差的共同作用下,由啮合刚度引起的不稳定区域得到明显的抑制。如图所示的 $(\omega_2 + \omega_3)$ 和 ω_3 所在的不稳定区域。啮合轮齿间的滑动摩擦减小了啮合刚度的幅值,相位差的存在改善了行星轮系在啮合周期内重合度的分配。

图6为相位差对系统摩擦振幅的影响。由于相位差改变了整个行星轮系重合度在啮合周期内时间上的分布,使得由啮合轮齿单双齿交替啮合引起的系统刚度突变值减小,从而改善了行星轮系啮合刚度的整体分布。因此,太阳轮和行星轮

1),计算系统设计参数对行星轮系稳定性和非线性响应的影响。

由齿间滑动摩擦引起的响应幅值,在相位差存在时得到了抑制。由于在一个啮合周期内,太阳轮多处与行星轮相啮合,所以太阳轮的摩擦响应振幅较行星轮要大一些。

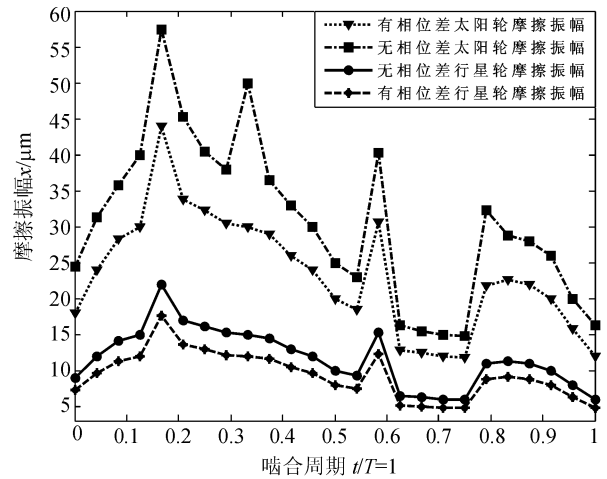


图6 相位差对系统摩擦振幅的影响

Fig.6 Effect of phase on the amplitude of friction

4.2 重合度对系统稳定性的影响

图7为内、外啮合的重合度对系统稳定性的影响。由图7可看出以下几点:①内、外啮合重合度的大小对系统参数不稳定性的影响是不同的,对比图7(a)和图7(b)可以看出,内齿圈-行星轮的重合度对系统参数不稳定性区域比太阳轮-行星轮的更大;②轮齿间的摩擦力可以减小系统参数的不稳定区域,但影响不是很大;③在内、外重合度均为1.5时,系统的参数不稳定性区域最大,当内、外重合度均为整数1或2时,系统的不稳定区域消失,内、外重合度值越接近整数1或2,系统的参数不稳定性区域越小;④内、外重合度的改变不影响 $\omega_1 = 0$ 系统刚体运动的稳定性。

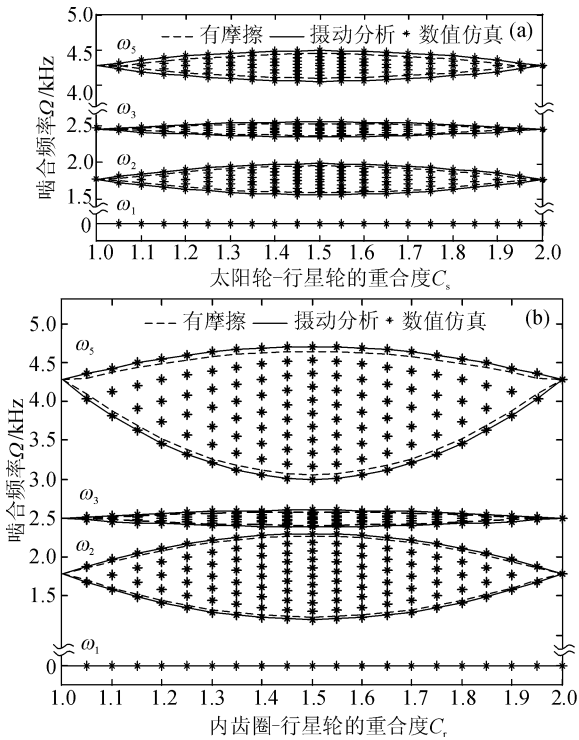


图7 重合度对稳定性的影响

Fig. 7 Impact of contact ratios on instability boundaries

4.3 齿间载荷分配系数对行星轮系各构件摩擦振幅的影响

图8为齿间载荷分配系数对行星轮系各构件摩擦振幅的影响。

由图8(a)可看出,齿间载荷分配系数在双齿啮合的时段,对行星轮由摩擦引起的摩擦振幅有重要影响。在齿间载荷分配因子 $\alpha = 0.1$ 时,行星轮的摩擦振幅最大;而在 $\alpha = 0.5$ 时,行星轮的摩擦振幅最小。齿间载荷越趋于平均,齿间载荷分配系数对摩擦振幅的影响越小。可看出在双齿啮合阶段,轮齿间的载荷分配系数对行星轮的摩擦振幅有重要的影响。

由图8(b)可看出,由于相位差的存在,多个行星轮与太阳轮相啮合,使得齿间载荷分配系数在整个啮合周期都对太阳轮的摩擦振幅产生影响。

由图8(c)可看出,轮齿间的载荷分配系数基本不影响行星架的摩擦响应振幅。

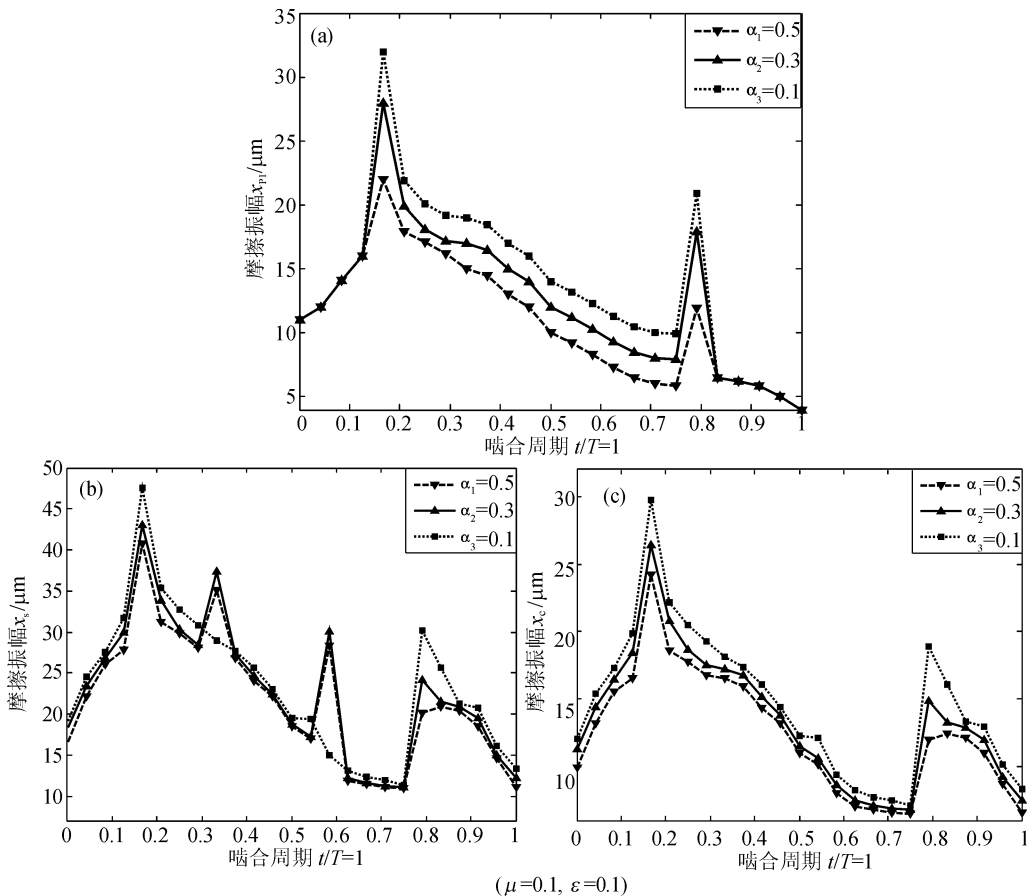


图8 齿间载荷分配系数对行星轮系各构件摩擦振幅的影响

Fig. 8 Effect of load distribution factor on the amplitude of friction

5 结 论

1) 轮齿间的滑动摩擦对行星轮系的参数稳定性和摩擦响应都有重要的影响。随着轮齿间摩擦因子的增大,轮齿间的滑动摩擦可以明显地对行星轮系的轮齿啮合刚度产生影响,进而影响系统由啮合刚度的变化引起的参数不稳定性和系统的摩擦响应振幅。

2) 相位差对行星轮系的参数稳定性和摩擦振动响应有不可忽视的影响。相位差的存在使得行星轮系重合度成为时间和空间的函数,对于改善行星轮系整体的啮合刚度的分布较为有利,削弱了轮齿单双齿啮合引起啮合刚度突变对行星轮系整体的影响,有效改善了太阳轮浮动的增速行星轮系的啮合状况,较好地抑制了由齿间滑动摩擦引起的振幅响应并减小了行星轮系的不稳定性区域。

3) 齿间载荷分配系数对行星轮系各构件的摩擦振幅有明显影响,改善行星轮齿间载荷分配状况可有效抑制由摩擦引起的振幅响应。

参考文献:

- [1] Ozguven H N, Houser D R. Mathematical models used in gear dynamics—A review [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1988, 121(3):383-411.
- [2] 李润方, 王建军. 齿轮系统动力学—振动、冲击、噪声 [M]. 北京: 科学出版社, 1997.
- [3] 王建军, 李其汉, 李润方. 齿轮系统非线性研究进展 [J]. *力学进展*, 2005, 35(1):37-51.
Wang Jianjun, Li Qihan, Li Runfang. Research advances for nonlinear vibration of gear transmission systems [J]. *Advances in Mechanics*, 2005, 35(1):37-51.
- [4] Borner J, Houser D R. Friction and bending moments on gear noise exciations [J]. *SAE Transaction*, 1996(105):1669-1676.
- [5] Velex P, Cahouet V. Experimental and numerical investigations on the influence of tooth friction in spur and helical

gear dynamics [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2000(122):515-522.

- [6] Vaishya M, Houser D R. Modeling and Analysis of Sliding Friction in Gear Dynamics; Proceeding of the Eighth ASME International Power Transmission and Gearing Conference [C]. ASME, USA, 2000.
- [7] Song He. Effect of Sliding Friction on Spur And Helical Gear Dynamics and Vibro-Acoustics [D]. USA: The Ohio State University, 2008.
- [8] Song He, Sungmin Cho, Rajendra Singh. Prediction of dynamic friction forces in spur gears using alternate sliding friction formulations [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 309(3-5):843-851.
- [9] Liu G, Parker R G. Impact of tooth friction and its bending effect on gear dynamics [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 320(4-5):1039-1063.
- [10] Parker R G, Lin J. Mesh phasing relationships in planetary and epicyclic gears [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2004, (126):365-370.
- [11] Lin J, Parker R G. Mesh stiffness variation instabilities in two-stage gear systems [J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2002, (124):68-76.
- [12] Lin J, Parker R G. Planetary gear parametric instability caused by mesh stiffness variation [J]. *Journal of Sound and Vibration* 2002, 249(1):129-145.
- [13] Nayfeh A H, Mook D T. *Nonlinear Oscillations* [M]. New York: John Wiley, 1979.
- [14] 王高雄, 周之铭, 周思铭, 等. 常微分方程 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1983.
- [15] Richards J A. *Analysis of Periodically Time-Varying Systems* [M]. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [16] Vaishya M, Singh R. Analysis of periodically varying gear mesh systems with coulomb friction using floquet theory [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 243(3):525-545.

(责任编辑 王卫勋)