

文章编号: 1006-4710(2011)03-0344-06

# 静水中气泡上升运动特性的数值模拟研究

鞠花<sup>1</sup>, 陈刚<sup>2</sup>, 李国栋<sup>2</sup>

(1. 西安理工大学 理学院, 陕西 西安 710048; 2. 西安理工大学 水利水电学院, 陕西 西安 710048)

**摘要:** 采用数值模拟和实验研究相结合的方法, 对静水中气泡上升运动特性进行了研究。在考虑和不考虑 Basset 力的情况下对推导出的静水中单个气泡上升运动控制方程进行耦合求解的基础上, 对比分析了不同初始半径气泡上升速度模拟值与实测值之间的差异, 研究了在考虑 Basset 力的情况下静水中不同初始半径气泡的模拟上升速度与时间的关系以及上升速度和初始半径对气泡半径变化率的影响。

**关键词:** 气泡; Basset 力; 上升速度; 初始半径; 数值模拟

**中图分类号:** O359<sup>+</sup>.1 **文献标志码:** A

## Research on Numerical Simulation of Motion Behaviors of Single Bubble Rising in Still Water

JU Hua<sup>1</sup>, CHEN Gang<sup>2</sup>, LI Guodong<sup>2</sup>

(1. Faculty of Science, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China;

2. Faculty of Water Resources and Hydroelectric Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

**Abstract:** The integrated method of numerical simulation and experimental study is adopted to carry out research on the motion behaviors of bubble rising in still water. Under the condition of considering Basset force and without considering it, the couple solution to the derived equation for the single bubble rising motion control in still water is carried out, on the basis of which, a comparative analysis is made of the differences between the simulated values of rising velocities of bubbles with different initial radiuses and the real determined ones. Also, this paper studies the relation between time and the simulation rising velocities of the bubbles with different initial radiuses in still water as well as the effect of the rising velocities and initial radius upon the bubble radius variation rates under the condition of considering Basset forces.

**Key words:** bubble; Basset force; rising velocity; initial radius; numerical simulation

气泡广泛存在于化工、生物、医药、动力设备、核反应堆、航天、热能等领域, 如水轮机和水泵的空化空蚀、船舶螺旋桨水流、气-液化学反应、废水处理等, 因而对气泡运动规律的研究对生产实际、流体力学及两相流动的发展都有着重要的意义, 也越来越受到国内外学者的关注。目前利用实验测量、理论分析、数值模拟等方法对液体中气泡的上浮速度、气液传质、气泡分布等问题已进行了较为全面的研究<sup>[1-11]</sup>, 并得到了许多实用性的研究成果, 而针对气

泡上升运动的加速过程和气泡半径变化率对气泡上升运动特性的影响等方面的研究相对较少<sup>[12-16]</sup>。

本研究采用数值模拟和实验研究相结合的方法, 通过受力分析, 对静水中单个气泡上升运动过程中的气泡运动平衡方程和气泡半径变化率方程进行了理论推导, 并将考虑和不考虑 Basset 力情况下的不同初始半径气泡上升速度模拟值与实测值进行了比较分析; 研究了静水中不同初始半径气泡的上升速度与时间的关系以及上升速度和初始半径对气泡

收稿日期: 2011-03-28

基金项目: 陕西省教育厅科学研究计划基金资助项目(08JK404)。

作者简介: 鞠花(1976-), 女, 河南郑州人, 博士生, 研究方向为气液两相流理论与数值模拟。E-mail: jhlkx@126.com。陈刚(1966-), 男, 四川绵阳人, 教授, 博导, 研究方向为水力学与流体力学。E-mail: Chen\_g@mail.xaut.edu.cn。

半径变化率的影响, 以期为更好地对液体中气泡的运动研究、利用提供理论依据。

## 1 模拟理论与方法

### 1.1 运动控制方程

#### 1.1.1 基本假定

为了研究的方便, 在对静水中气泡上升运动特性进行数值模拟前, 做两个假设: ①初始半径较小的气泡在短距离上升运动过程中的形状始终保持为球形; ②气泡内的气体温度始终保证恒温状态。

#### 1.1.2 气泡运动平衡方程

在上述两个假定的基础上, 建立静水中单个气泡上升运动的运动平衡方程为:

$$m_b \frac{du}{dt} = F_g + F_b + F_d + F_A + F_B \quad (1)$$

式中,  $m_b$  是气泡质量;  $u$  为气泡上升速度;  $t$  为时间变量;  $m_b \frac{du}{dt}$  为气泡运动的惯性质量力; 重力  $F_g$  和浮力

$F_b$  可分别表示为  $F_g = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_b g$  和  $F_b = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_L g$ ,

其中  $r$  是气泡的半径,  $\rho_b$ 、 $\rho_L$  分别是气泡和液体的密度; 粘性阻力  $F_d$  可表示为  $F_d = -\frac{1}{2}\pi r^2 \rho_L C_d u^2$  [2], 其中  $C_d$  为气泡运动的阻力系数; Basset 力  $F_B$  和附加质量力  $F_A$  均是气泡加速过程中所产生的附加力 [17],

$F_B = -K_B r^2 \sqrt{\pi \mu \rho_L} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{du}{d\tau} d\tau$ , 其中  $K_B$  为 Basset 力经验系数 [4];  $F_A = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_L K_m \frac{du}{dt}$ , 其中  $K_m$  为附加质量力经验系数 [4];  $\mu$  为液体动力粘性系数。

将上述各力表达式代入式(1), 整理得静水中单个气泡上升运动平衡方程为:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_b + K_m \rho_L) \frac{du}{dt} = \\ \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_L - \rho_b) g - \frac{1}{2}\pi r^2 \rho_L C_d u^2 - \\ K_B r^2 \sqrt{\pi \mu \rho_L} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{du}{d\tau} d\tau \end{aligned} \quad (2)$$

#### 1.1.3 气泡半径变化率控制方程

由于气泡在静水中作上升运动时自身体积要发生变化, 而导致了气泡半径的变化, 因此要研究静水中气泡的上升运动规律就必须考虑气泡半径的变化情况。气泡在静水中作上升运动时气泡所受压强的计算公式为:

$$P = P_0 + \rho_L g (H - Z) + \frac{2\sigma}{r} \quad (3)$$

式中,  $P_0$  为大气压强;  $H$  为水面高度;  $Z$  为气泡在静水中所处的位置高度, 这里建立的坐标原点在水底;  $\sigma$  为水的表面张力系数。

将式(3)及气泡体积公式代入克拉伯龙方程  $PV = nRT$ , 得:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \left[ P_0 + \rho_L g (H - Z) + \frac{2\sigma}{r} \right] = nRT \quad (4)$$

当水温均匀恒定时,  $T$  为常量, 式(4)的右边为常数。对式(4)两边对时间  $t$  求导并整理得:

$$\left[ 3(\rho_b + \rho_L (H - Z)) + \frac{4\sigma}{r} \right] \frac{dr}{dt} = r \rho_L g \frac{dZ}{dt} \quad (5)$$

由于  $\frac{dZ}{dt} = u$ , 故得气泡在静水中上升运动时的半径变化率方程为:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{r \rho_L g u}{3[\rho_b + \rho_L (H - Z)] + \frac{4\sigma}{r}} \quad (6)$$

将式(2)和式(6)联立, 得到气泡在静水中上升运动的控制方程组。

## 1.2 数值计算方法与参数取值确定

### 1) 数值计算方法

为了提高数值计算结果的精度, 本研究采用先预测再校正的方法即改进的 Euler 法 [18-20], 通过自适应变步长方法联立求解由式(2)和(6)组成的控制方程组。即当解的变化较慢时采用较大的计算步长, 从而使得计算速度很快; 当方程的解变化较快时, 积分步长会自动地变小, 从而使得计算的精度提高。由于式(2)中的 Basset 力广义积分式包含一个奇异端点, 为进行数值解算需要对该广义积分项进行处理, 处理方法参见文献 [14]。

### 2) 气泡上升高度确定

在求解过程中, 涉及到的第  $j$  个  $\Delta t$  时刻气泡的上升高度  $Z_j$  的计算公式为  $Z_j = \sum_{i=1}^j u_i \Delta t$ , 其中  $u_i$  为第  $i$  个时刻气泡的上升速度。

### 3) 参数取值确定

取  $\rho_b = 1.29 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_L = 1000 \text{ kg/m}^3$ ; 附加质量力经验系数  $K_m = 0.5$  [21], 水的动力粘性系数  $\mu = 1005 \text{ } \mu\text{Pa} \cdot \text{s}$ , Basset 力经验系数  $K_B = 2.88 + 3.12/(Ac + 1)^3$ , 其中加速度模数  $Ac = u^2 / \left( 2r \frac{du}{dt} \right)$  [4, 21]。在模拟气泡运动过程中, 初始条件是气泡的初速度为零。

根据以往研究成果 [13], 阻力系数  $C_d$  与雷诺数  $Re$  之间的关系式为  $C_d = \frac{aRe^b + c}{Re}$ , 气泡上浮终速度  $u$  与

阻力系数  $C_d$  之间的关系式为  $u = \sqrt{\frac{8r(\rho_L - \rho_b)g}{3\rho_L C_d}}$ 。本研究利用试验中实测的静水中的气泡上升终速度  $u$  和气泡的半径  $r$ , 可以推求与终速度  $u$  对应的阻力系数  $C_d$  和雷诺数  $Re$ 。根据试验资料分析得到的多组 ( $C_d$ ,  $Re$ ) 结果, 采用文献[22]中所采用的非线性参数拟合方法得到阻力系数  $C_d$  与雷诺数  $Re$  之间的关系式中的三个参数值, 即  $a = 1.01$ ,  $b = 0.648$ ,  $c = 24$ 。

## 2 试验测定装置及方法

本研究用于测定静水中上升气泡速度的试验装置如图1所示。

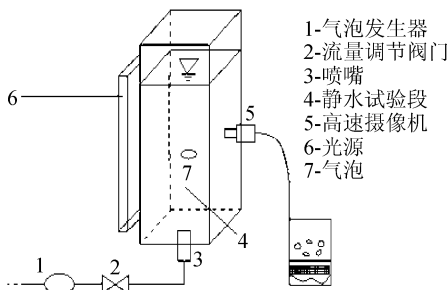


图1 试验装置示意图

Fig.1 Schematic diagram of experimental equipment

试验水箱是横截面面积为  $100 \text{ cm}^2$ , 高度为  $1.28 \text{ m}$  具有良好透光性能的上方出口敞开式有机玻璃水箱。箱内装有室温下运动粘滞系数为  $1.05 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  和传导率为  $2.2 \text{ } \mu\text{s}/\text{cm}$  的淡水, 试验中静水水深为  $45.8 \text{ cm}$ 。

静水试验装置中的气泡注射处设在水箱底部中心, 空气压缩机产生的气体经稳压装置调节后通过医学针头向试验装置内等时距注入均匀直径的单个气泡, 试验中通过改变针头内径来改变生成气泡的初始半径。

试验装置的光源采用两台由  $1000$  个  $\phi 5 \text{ mm}$  红光发光二极管组成的二极管光源, 每台最大输出功率为  $30 \text{ W}$ 。

摄影系统使用美国 FASTEC IMAGING 公司生产的 Troubleshooter1 000、分辨率  $640 \times 480$ 、帧频  $1000 \text{ FPS}$  的高速摄像机, 镜头采用型号为 AVENIR  $8.0 \sim 88 \text{ mm}$ ,  $1:1.2$  近摄镜头和型号为尼康 AF  $20 \sim 35 \text{ mm f}/2.8 \text{ D IF}$  镜头, 在试验中轮换使用。采用 SAN-710PAN/TILT & LNES CONTROLLER 系列云台控制器对镜头的光圈和焦距进行调节。

试验获得的原始图像, 由于试验条件等的限制,

不免存在一些不足, 如气泡亮度不均匀, 图像模糊、背景不均匀等, 因此有必要在抽取气泡特征以前对原始图像进行图像增强处理。本试验中图像预处理采用静止背景析出法, 即将气泡原图减去利用所编程序生成的背景后得到的图像; 而图像的处理即气泡的提取采用由最大类间方差阈值分割法<sup>[18]</sup>对求反后图像进行阈值分割所编写的程序, 得到二值化图像, 以便计算气泡运动的上升速度、上升高度、气泡半径等参数。

## 3 模拟结果与分析

### 3.1 考虑与不考虑 Basset 力情况下气泡上升速度模拟值与实测值的比较分析

当不考虑气泡上浮过程中加速度的影响, 即气泡在上浮过程中仅受到浮力与粘性阻力的作用时, 经理论推导可以得到初始半径为  $r$  的球形气泡上升终速度<sup>[12]</sup>。但是, 气泡从产生到上浮的过程中必然存在一个加速过程。Duineveld P C<sup>[1]</sup>通过实验的方法测试了半径在  $0.33 \sim 1.00 \text{ mm}$  的气泡的上升速度, 结果显示气泡上浮速度并不是马上变为常数, 而是在经过一定的加速距离后逐步到达上浮末速度。因此, 对于短距离气泡的上浮过程, 必须考虑气泡上浮过程中由加速度引起的虚拟质量力和 Basset 力对上浮速度的影响。

由前述 Basset 力的表达式可知, Basset 力的大小与气泡运动过程中的速度变化有关, 即气泡加速度和气泡半径变化率越大, 所受到的 Basset 力越大。本研究利用数值模拟结果与实验测定结果对比分析了考虑与不考虑 Basset 力情况下不同初始半径的气泡上升速度的模拟值与气泡上升速度实测值之间的差异, 详见图2。

由图2可见, 当气泡的初始半径比较小即  $r = 0.405 \text{ mm}$  时, 与考虑 Basset 力时的结果相比, 不考虑 Basset 力时的气泡上升速度模拟值与实测值的差异更小; 当气泡初始半径在  $0.68 \sim 0.965 \text{ mm}$  之间时, 考虑 Basset 力时的气泡上升速度模拟值越来越接近实测值, 而不考虑 Basset 力时的气泡上升速度模拟值与实测值的差异越来越大。这说明, 在进行静水中气泡上升运动模拟时, 应根据气泡初始半径的大小, 合理确定 Basset 力的取舍。从图2(d)可以看出, 当气泡的初始半径比较大即  $r = 1.260 \text{ mm}$  时, 与考虑 Basset 力和不考虑 Basset 力两种情况下的模拟值相比, 气泡上升速度实测值普遍偏小, 且速度值呈波动上升变化, 其原因可能是: 当气泡半径比较大时, 由于受到表面张力的影响, 气泡形状在气泡运动

过程中容易发生变形,不再保持球形,而气泡形状的改变将导致气泡的后尾迹产生扰动,使气泡速度不

断发生变化。因此,本研究建立的静水中气泡上升运动模拟方法不适于初始半径较大的气泡。

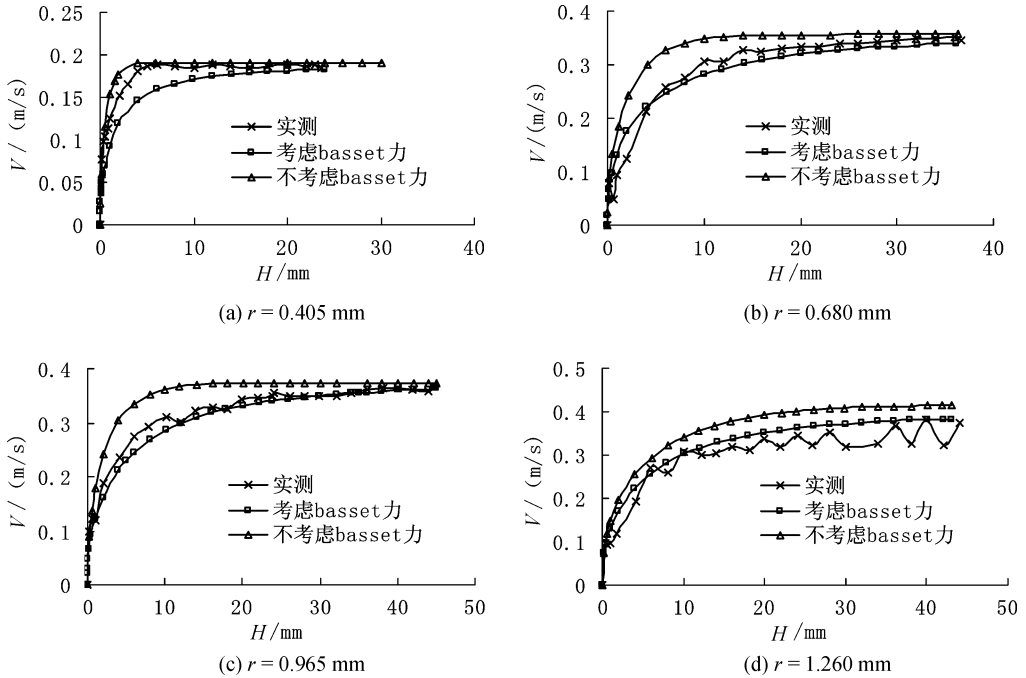


图2 考虑与不考虑 Basset 力情况下不同上升高度时气泡上升速度模拟值与实测值比较图

Fig.2 Comparisons of observed values and simulated ones of rising bubbles at different rising locations, respectively with and without the consideration of Basset force or not

### 3.2 静水中不同初始半径气泡的上升速度与时间的关系

当考虑气泡在上升过程中受到附加质量力和 Basset 力作用时,利用本研究建立的数值模型分析得到的静水中不同初始半径气泡的模拟上升速度与时间的关系曲线(见图3)。

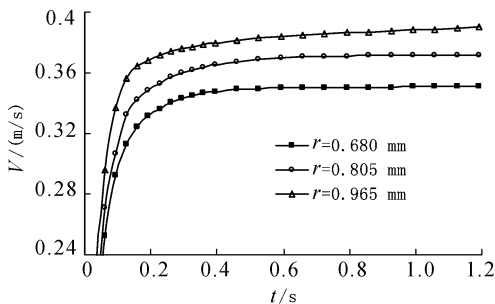


图3 静水中不同初始半径气泡的模拟上升速度与时间的关系曲线

Fig.3 The curves of simulated rising velocities of bubbles with different initial radiuses versus time in still water under

由图3可见,在气泡初始半径  $r < 1.25$  mm 情况下,上升时间相同时,气泡的初始半径越大,上升速度也越大;气泡初始半径越小,在静水中上升运动过程中达到终速度所经历的时间越短。当考虑气泡在上升过程中受到附加质量力和 Basset 力作用时,

气泡做加速度逐渐趋于零的运动<sup>[1,13]</sup>。下面从理论上分析初始半径不同的气泡达到上升终速度所经历的时间不同的原因。

这里以粘性阻力为参照来分析气泡所受到的力对气泡加速上升过程中的影响。根据上文中给出的 Basset 力  $F_B$  和粘性阻力  $F_d$  的表达式可得,  $\frac{F_B}{F_d} =$

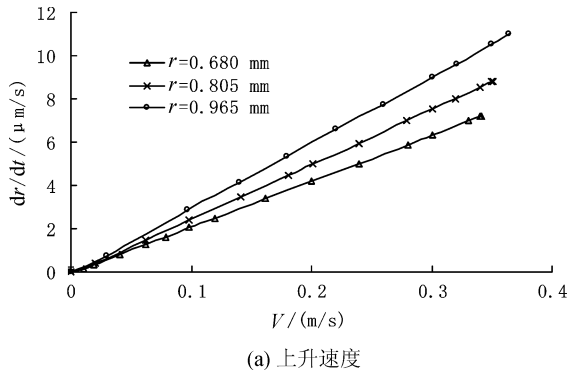
$$\frac{2K_B \sqrt{\pi\mu\rho_L} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{du}{d\tau} d\tau}{\pi\rho_L C_d u^2}$$

根据本研究的模拟计算结果可知,当气泡上升时间  $t$  等于 0.4 s 左右时,对于初始半径较小的气泡而言,Basset 力与粘性阻力的比值已很小,气泡近似处于一种受力平衡的状态,其运动状态已趋于匀速上升运动;而此时对于初始半径较大的气泡而言,Basset 力与粘性阻力的比值仍然较大,此时气泡的上升运动仍然具有一定的加速度。上述研究结果与付攀等<sup>[13]</sup> 和田恒斗等<sup>[14]</sup> 的研究成果基本一致。因此,初始半径较大的气泡相对于小气泡的加速时间要长得多,达到上升终速度的时间也更长。

### 3.3 模拟上升速度和初始半径对气泡半径变化率的影响

气泡在静止液体中运动时,其半径的变化受到

流体静压力、气泡表面张力、气泡表面的气体扩散率、流体中溶解气体的浓度等因素的影响<sup>[12]</sup>。气泡半径变化率的大小直接影响到气泡上升运动特性及上升末速度的大小。由式(6)可见,在静水中等温



上升气泡的半径变化率是气泡半径  $r$  和位置高度  $Z$  的函数。图 4(a)、4(b) 分别是不同初始半径的气泡在静水中上升运动过程中的气泡半径变化率模拟值与上升速度、上升高度之间的关系曲线图。

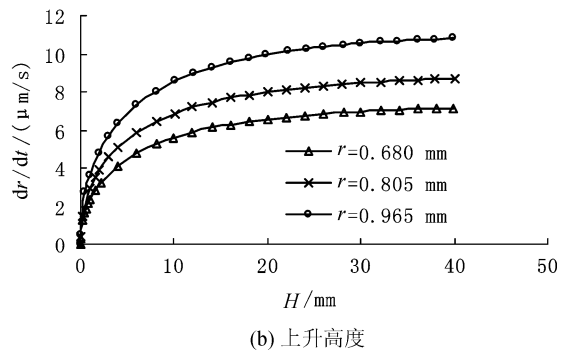


图 4 不同初始半径的气泡半径变化率随模拟上升速度和上升高度的变化曲线

Fig. 4 The curve of radius variation rates of rising bubbles versus simulated rising velocities and rising locations respectively

由图 4(a) 可见,气泡半径变化率随着上升速度的增加而增加;对于相同速度的气泡而言,初始半径大的气泡的半径变化率比初始半径小的气泡的半径变化率大,此规律也可由公式(6)得到。

由图 4(b) 可见,上升高度相同时,气泡初始半径越大,半径变化率越大;初始半径相同时,上升高度越大,气泡半径变化率越大,也就是说,气泡在静水中上升运动过程中,小气泡比大气泡稳定,深水中的气泡比浅水中的气泡稳定。这与徐麦荣等人<sup>[16]</sup>的研究结果相一致。

## 4 结 论

本研究从受力分析的角度对静水中单个气泡上升运动过程中的气泡运动平衡方程和气泡半径变化率方程进行了理论推导,并将考虑和不考虑 Basset 力情况下的不同初始半径气泡上升速度模拟值与实测值进行了比较分析;且分析了静水中不同初始半径气泡的上升速度与时间的关系以及上升速度和初始半径对气泡半径变化率的影响,得到如下结论:

1) 根据本研究推导的静水中单个气泡上升运动控制方程得到的气泡上升速度数值模拟结果与实验测定结果具有很好的一致性;气泡上升的加速过程产生的 Basset 力对不同初始半径气泡上升速度的影响程度有较大差异,气泡初始半径越大,影响程度越大。因此,在进行静水中气泡上升运动模拟时,应根据气泡初始半径的大小,合理确定 Basset 力的取舍问题。

2) 气泡初始半径越大,静水中气泡上升速度也

越大;气泡初始半径越小,其在静水中上升运动过程中达到终速度所经历的时间越短。在进行静水中气泡上升运动模拟时,应考虑气泡上升的加速过程。

3) 气泡上升过程中的半径变化率随气泡初始半径和上升速度的增大而增大。

## 参考文献:

- [1] Duineveld P C. The rise velocity and shape of bubbles in pure water at high Reynolds number [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1995, 292: 325-332.
- [2] Delnoij E, Kuipers J, Swaaij W V. Dynamic simulation of gas-liquid two-phase flow: effect of column aspect ratio on the flow structure [J]. *Chemical Engineering Science*, 1977, 52(21): 3759-3772.
- [3] Chakraborty B B, Tutejia G S. Motion of an expanding, spherical gas bubble in a viscous liquid under gravity [J]. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 1993, 5(8): 1879-1882.
- [4] Odar F, Hamilton W S. Forces on a sphere accelerating in a viscous fluid [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1964, 18: 591-592.
- [5] Moore D W. The velocity of rise of distorted gas bubbles in a liquid of small viscosity [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1965, 23: 749-766.
- [6] Yeh Hsuehieh, Yang Wenjei. Dynamics of bubbles moving in liquids with pressure gradient [J]. *Journal of Applied Physics*, 1968, 39(7): 3156-3165.
- [7] 张建生, 吕青, 孙传东, 等. 高速摄影技术对水中气泡运动规律的研究 [J]. *光子学报*, 2000, 29(10): 952-955.  
Zhang Jiansheng, Lü Qing, Sun Chuandong, et al. The moment of air bubbles in water by use of high speed photog-

- raphy [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2000, 29 (10): 952-955.
- [8] 孙中国, 席光, 项利峰. 基于无网格法的水中气泡上升运动数值模拟[J]. *工程热物理学报*, 2007, 28 (5): 772-774.  
Sun Zhongguo, Xi Guang, Xiang Lifeng. Simulation on rising bubble in water with mesh free method[J]. *Journal of Engineering Thermophysics*, 2007, 28(5): 772-774.
- [9] 张淑君, 吴锤结, 王惠. 单个三维气泡运动的直接数值模拟[J]. *河海大学学报: 自然科学版*, 2005, 33 (5): 534-537.  
Zhang Shujun, Wu Chuijie, Wang Hui. Numerical simulation of rise and deformation of a three-dimensional gas bubble[J]. *Journal of Hohai University (Natural Sciences)*, 2005, 33(5): 534-537.
- [10] 刘胜. 水中气泡运动规律的研究[J]. *重庆交通学院学报*, 2007, 26(3): 136-152.  
Liu Sheng. Study on the law of bubble movement in water [J]. *Journal of Chongqing Jiaotong University*, 2007, 26 (3): 136-152.
- [11] 程文, 周孝德, 郭瑾珑, 等. 水中气泡上升速度的实验研究[J]. *西安理工大学学报*, 2000, 16(1): 57-60.  
Cheng Wen, Zhou Xiaode, Guo Jinglong, et al. Experiment study of the velocity of bubble rising in water[J]. *Journal of Xi'an University of Technology*, 2000, 16(1): 57-60.
- [12] 石晟玮, 王江安, 蒋兴舟. 水中微气泡上浮过程的力学影响因子研究[J]. *海军工程大学学报*, 2008, 20(3): 83-87.  
Shi Shengwei, Wang Jiangan, Jiang Xingzhou. Experimental study of micro-bubble rising based on PIV [J]. *Journal of Naval University of Engineering*, 2008, 20 (3): 83-87.
- [13] 付攀, 王路. 水中微气泡运动特性的理论与仿真[J]. *舰船电子工程*, 2009, 29(4): 155-158.  
Fu Pan, Wang Lu. Theoretical study and simulation of a single micro-bubble in still water[J]. *Ship Electronic Engineering*, 2009, 29(4): 155-158.
- [14] 田恒斗, 金良安, 丁兆红, 等. 液体中气泡上浮与传质过程的耦合模型[J]. *化工学报*, 2010, 61(1): 15-21.  
Tian Hengdou, Jin Liangan, Ding Zhaohong, et al. Coupling model for bubble rise and mass transfer process in liquid[J]. *Journal of the Chemical Industry and Engineering Society of China*, 2010, 61(1): 15-21.
- [15] 朱江江, 陈伯义. 水面舰船尾流气泡半径变化规律的研究[J]. *热科学与技术*, 2005, 4(2): 146-149.  
Zhu Jiangjiang, Chen Boyi. Study of variation law of bubble radius in surface ship wake[J]. *Journal of Thermal Science and Technology*, 2005, 4(2): 146-149.
- [16] 徐麦荣, 刘成云. 水中浮升气泡的半径和速度变化[J]. *大学物理*, 2008, 27(11): 14-17.  
Xu Mairong, Liu Chengyun. The change of radius and velocity of the rising bubble in water [J]. *College Physics*, 2008, 27(11): 14-17.
- [17] 由长福, 祁海鹰, 徐旭常. Basset 力研究进展与应用分析[J]. *应用力学学报*, 2002, 19(2): 31-33.  
You Changfu, Qi Haiying, Xu Xuchang. Progresses and applications of basset force[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2002, 19(2): 31-33.
- [18] Chen M. An automatic recognition of the best threshold for image[J]. *Computer Applications and Software*, 2006, 23(4): 85-86.
- [19] 李庆扬. 数值分析[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2004.
- [20] 余德浩. 微分方程数值解法[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [21] 郭烈锦. 两相与多相流动力学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2002.
- [22] 邹存友, 常毓文, 唐玮, 等. 三参数非线性方程自动拟合方法的研究及应用[J]. *石油天然气学报*, 2009, 31(2): 111-115.  
Zou Cunyou, Chang Yuwen, Tang Wei, et al. Study and application of automatic matching method for non-linear function with three parameters[J]. *Journal of Oil and Gas Technology*, 2009, 31(2): 111-115.

(责任编辑 李虹燕)