

文章编号: 1006-4710(2011)04-0461-05

# 土壤水分运动方程的径向基配点法

李永秀<sup>1</sup>, 秦新强<sup>1</sup>, 王全九<sup>2</sup>, 苏李君<sup>2</sup>

(1. 西安理工大学 理学院, 陕西 西安 710054; 2. 西安理工大学 水资源研究所, 陕西 西安 710048)

**摘要:** 为解决一维土壤水分运动问题, 结合径向基函数与配点法, 提出了一种新的无网格方法——径向基配点法无网格算法, 证明了解的存在性和唯一性, 并通过具体的实例, 将该方法与有限差分法比较, 结果表明该方法具有计算精度高且易于实现的优点。

**关键词:** 无网格法; 径向基函数; 配点法; 土壤水分运动方程

中图分类号: S275.6 文献标志码: A

## The Radial Basis Functions Collocation Method for Soil-Water Movement Equation

LI Yongxiu<sup>1</sup>, QIN Xinqiang<sup>1</sup>, WANG Quanjiu<sup>2</sup>, SU Lijun<sup>2</sup>

(1. Faculty of Science, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China;

2. Institute of Water Resource, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

**Abstract:** To solve the problem of 1-D soil water movement, and in combination of radial basis function with collocation method, a new meshfree method is proposed, that is radial basis collocation method for meshfree method. The existence and uniqueness of the solution is proved. A comparison of the new method with the finite difference method through numerical examples shows that the new method has high accuracy and is easily accomplished.

**Key words:** meshfree method; radial basis function; collocation method; soil-water movement equation

径向基函数配点法<sup>[1-3]</sup>是一种求解微分方程数值解的无网格方法, 径向基函数具有形式简单、各向同性等优点。目前, 求解土壤水分运动方程的数值方法主要是有限差分法<sup>[4-7]</sup>和有限元法<sup>[8-11]</sup>, 近年来随着无网格的发展, 也有不少学者用最小二乘配点法<sup>[12]</sup>和径向基函数法<sup>[13-14]</sup>求解土壤水分渗流问题。由于水分运动的基本方程大部分是对流扩散方程, 用有限差分法和有限元法容易产生数值振荡, 而径向基函数配点法能够很好地处理这类问题。

本文介绍了径向基函数和配点法的基本理论, 并针对一维土壤水分运动方程, 构造了一种新的数值方法——径向基配点无网格法, 同时证明了数值解的存在性和唯一性。通过具体算例的计算, 再与

有限差分法比较, 可知该方法计算精度高且易于实现。

## 1 径向基配点法

### 1.1 径向基函数

径向基函数(Radial Basis Function, RBF)是指依赖于径向坐标  $r$  的函数:

$\varphi_j(r) = \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|)$ , 其中  $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|$  是节点  $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{x}_j$  的欧几里得距离。对任意函数  $u(\mathbf{x})$  可以用径向基函数近似为:

$$u(\mathbf{x}) \approx u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(\mathbf{x}) = \Phi^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1)$$

其中  $N$  为插值节点数,  $\mathbf{x}_j$  为布置在  $\Omega$  上的插值节点,

收稿日期: 2011-07-28

基金项目: 陕西省教育厅自然科学基金资助项目(2010JK719); 西安理工大学校基金资助项目(108-210918)。

作者简介: 李永秀(1986-), 女, 山西临县人, 硕士生, 研究方向为微分方程数值解及其应用。E-mail: liyongxiuggjy@163.com。秦新强(1962-), 男, 陕西蓝田人, 教授, 博士, 研究方向为微分方程数值解及其应用、计算机图形学与辅助几何设计等。E-mail: xqqin@xaut.edu.cn。

$\Phi^T(\mathbf{x}) = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N]$ ,  $\mathbf{a} = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T$ ,  $u_j$  为待定系数。

在数值计算中,通常采用的径向基函数有 MQ 函数(Multiquadrics):  $\sqrt{c^2 + r^2}$ , ( $c > 0$ ); 高斯函数(Gaussians):  $\exp(-cr^2)$ , ( $c > 0$ ); 逆 MQ 函数(Inverse Multiquadrics):  $1/\sqrt{c^2 + r^2}$ , ( $c > 0$ ) 等, 本文选用高斯函数求解。

## 1.2 配点法

许多问题往往归结为给定边界条件与初始条件的偏微分方程求解问题,即定解问题。设定解问题的偏微分方程及其边界条件分别为:

$$L[u(\mathbf{x})] = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega \quad (2)$$

$$B[u(\mathbf{x})] = g(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Gamma \quad (3)$$

其中  $L$  和  $B$  为微分算子。

配点法的思路是在域内选定  $N_\Omega$  个点,使各节点满足平衡方程(2),在边界上选定  $N_\Gamma$  个点,使各节点满足边界条件(3),即函数  $u(\mathbf{x})$  可以用与一组离散节点  $\mathbf{x}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 相对应的紧支函数  $\varphi_j(\mathbf{x})$  的线性组合近似为:

$$u(\mathbf{x}) \approx u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(\mathbf{x}) = \Phi^T(\mathbf{x}) \mathbf{a} \quad (4)$$

代入(2),(3),有:

$$\sum_{j=1}^N L[\varphi_j(\mathbf{x}_k)] u_j = f(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k \in \Omega, k = 1, 2, \dots, N_\Omega$$

$$\sum_{j=1}^N B[\varphi_j(\mathbf{x}_k)] u_j = g(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k \in \Gamma, k = 1, 2, \dots, N_\Gamma$$

此处设  $L$  和  $B$  为线性算子。当  $N_\Omega + N_\Gamma > N$  时,是一个超定线性方程组,需要用最小二乘法求解;当  $N_\Omega + N_\Gamma = N$  时,则求解节点近似值的是一个线性方程组;如果  $L$  和  $B$  为非线性算子,则得到的是一个非线性方程组,此时需要采用迭代法求解节点近似值。常用的非线性方程组的求解方法有:直接迭代法、增量法和牛顿-拉弗森法等。

## 2 数值方法的构造与解的存在唯一性

### 2.1 径向基配点法

以含水率  $\theta$  为因变量的一维非饱和土壤水分运动基本方程为:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} + s(z, t) & 0 \leq z \leq L, t > 0 \\ \theta(z, 0) = \theta_a & t = 0, z \geq 0 \\ \theta(0, t) = \theta_b & z = 0, t > 0 \\ \theta(L, t) = \theta_a & z = L, t > 0 \end{cases} \quad (5)$$

式中,  $\theta$  为土壤体积含水率,  $D(\theta)$  和  $K(\theta)$  分别为非

饱和土壤水扩散率和导水率,  $D(\theta) > 0$ ,  $D(\theta)$  和  $K(\theta)$  均为连续函数,  $s(z, t)$  为根系吸水项,  $t$  为时间,  $z$  为距离,  $z = 0$  为地平面,  $z$  向下为正,  $\theta_a$  为均匀分布的初始含水率,  $\theta_b$  为地表因湿润条件而维持不变的含水率。

由于二阶导项为非线性项,不能直接采用配点法,因此我们先对其做一阶中心差分处理:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right]_{z=z_j} \approx \frac{1}{2\Delta z} \left\{ \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right]_{z=z_{j+1}} - \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right]_{z=z_{j-1}} \right\} = \frac{1}{2\Delta z} \left[ D(\theta_{j+1}) \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_{z=z_{j+1}} - D(\theta_{j-1}) \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_{z=z_{j-1}} \right] \quad (6)$$

其中,  $\Delta z$  为空间步长, 当  $j = 1, N$  时,  $z_j$  为边界点; 当  $j = 2, 3, \dots, N-1$  时,  $z_j$  为内点。

方程(5)的左端项采用向前差分离散,则

$$\left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_{z=z_j}^{t=t^{n+1}} \approx \left( \frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\Delta t} \right)_{z=z_j} = \frac{\theta_j^{n+1} - \theta_j^n}{\Delta t} \quad (7)$$

方程(5)的右端第二项采用中心差分离散,则

$$\left( \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \right)_{z=z_j}^{t=t^{n+1}} \approx \frac{K(\theta_{j+1}^{n+1}) - K(\theta_{j-1}^{n+1})}{2\Delta z} \quad (8)$$

$\theta(z, t^n)$  的近似值  $\tilde{\theta}(z, t^n)$  可表示为:

$$\tilde{\theta}(z, t^n) = \sum_{j=1}^N u_j^n \varphi(\|z - z_j\|) = \sum_{j=1}^N u_j^n \varphi_j(z) \quad (9)$$

采用配点法,要求上式在边界点处满足边界条件,在域内满足微分方程,有:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N u_j^{n+1} \left\{ \varphi_j(z_i) - \frac{\Delta t}{2\Delta z} \left[ D(\theta_{i+1}^{n+1}) \left( \frac{d\varphi_j(z)}{dz} \right)_{z=z_{i+1}} - D(\theta_{i-1}^{n+1}) \left( \frac{d\varphi_j(z)}{dz} \right)_{z=z_{i-1}} \right] \right\} = \theta_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta z} (K(\theta_{i+1}^{n+1}) - K(\theta_{i-1}^{n+1})) + s(z, t) \Delta t \\ (i = 2, 3, \dots, N-1; n = 0, 1, 2, \dots) \\ \theta_i^0 = \theta_a \quad (i = 2, 3, \dots, N-1) \\ \sum_{j=1}^N u_j^{n+1} \varphi_j(z_1) = \theta_b^{n+1}, \sum_{j=1}^N u_j^{n+1} \varphi_j(z_N) = \theta_a^{n+1} \\ (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (10)$$

令:

$$\psi_j(z_i) = \varphi_j(z_i) - \frac{\Delta t}{2\Delta z} \left[ D(\theta_{i+1}^{n+1}) \left( \frac{d\varphi_j(z)}{dz} \right)_{z=z_{i+1}} - D(\theta_{i-1}^{n+1}) \left( \frac{d\varphi_j(z)}{dz} \right)_{z=z_{i-1}} \right]$$

$$f_i^{n+1} = \theta_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta z} (K(\theta_{i+1}^{n+1}) - K(\theta_{i-1}^{n+1})) + s(z, t) \Delta t$$

则(10)式可写成矩阵方程形式

$$HU = F \tag{11}$$

其中：

$$H = \begin{bmatrix} \psi_1(z_1) & \psi_2(z_1) & \psi_3(z_1) & \cdots & \psi_N(z_1) \\ \psi_1(z_2) & \psi_2(z_2) & \psi_3(z_2) & \cdots & \psi_N(z_2) \\ \psi_1(z_3) & \psi_2(z_3) & \psi_3(z_3) & \cdots & \psi_N(z_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(z_N) & \psi_2(z_N) & \psi_3(z_N) & \cdots & \psi_N(z_N) \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$U = [u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_{N-1}^{n+1}, u_N^{n+1}]^T \tag{13}$$

$$F = [f_1^{n+1}, f_2^{n+1}, \dots, f_{N-1}^{n+1}, f_N^{n+1}]^T \tag{14}$$

### 2.2 解的存在唯一性

**定理 1** 如果径向基函数  $\varphi(r)$  的傅里叶变换  $F[\varphi](\omega)$  几乎处处大于零, 则  $H$  可逆, 即矩阵方程(11)存在唯一解。

**证明:** 首先证明  $\{\varphi_j(z)\}_{j=1}^N$  和  $\{\psi_j(z)\}_{j=1}^N$  的线性无关性。

假设  $\{\varphi_j(z)\}_{j=1}^N$  线性相关, 则存在一组不全为零的实数  $\lambda_j (1 \leq j \leq N)$ , 使得:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \lambda_j \varphi_j(z) &= 0 \\ 0 &= \sum_{j=1}^N \lambda_j \varphi_j(z) = \int_{R^d} \sum_{j=1}^N \lambda_j F[\varphi] e^{i\langle z-z_j, \omega \rangle} d\omega = \\ & \int_{R^d} e^{i\langle z, \omega \rangle} F[\varphi] \sum_{j=1}^N \lambda_j e^{-i\langle z_j, \omega \rangle} d\omega \end{aligned}$$

由定理条件,  $F[\varphi] > 0$ , 且  $e^{i\langle z, \omega \rangle}$  不恒等于 0, 所以  $\sum_{j=1}^N \lambda_j e^{-i\langle z_j, \omega \rangle} = 0$ , 从而  $\lambda_j = 0 (j = 1, 2, \dots, N)$  与假设矛盾, 因此向量组  $\{\varphi_j(z)\}_{j=1}^N$  是线性无关的。

同理, 假设  $\{\psi_j(z)\}_{j=1}^N$  线性相关, 则存在一组不全为零的实数  $\lambda_j (1 \leq j \leq N)$ , 使得:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \lambda_j \psi_j(z) &= 0 \\ 0 &= \sum_{j=1}^N \lambda_j \psi_j(z) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \left\{ \varphi_j(z) - \frac{\Delta t}{2\Delta z} \left[ D(\theta(z + \Delta z)) \frac{d\varphi_j(z + \Delta z)}{dz} - D(\theta(z - \Delta z)) \frac{d\varphi_j(z - \Delta z)}{dz} \right] \right\} = \sum_{j=1}^N \lambda_j \left\{ \varphi_j(z) - D(\theta(\xi)) \frac{\Delta t}{2\Delta z} \left[ \frac{d\varphi_j(z + \Delta z)}{dz} - \frac{d\varphi_j(z - \Delta z)}{dz} \right] \right\} \end{aligned}$$

其中  $\theta(\xi) \in [\theta(z - \Delta z), \theta(z + \Delta z)]$ , 当  $\Delta z \rightarrow 0$  时, 则有:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^N \lambda_j \left\{ \varphi_j(z) - D[\theta(\xi)] \Delta t \frac{d^2 \varphi_j(z)}{dz^2} \right\} = \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^N \lambda_j (F[\varphi] e^{i\omega(z-z_j)} - (i\omega)^2 D(\theta(\xi)) F[\varphi] \Delta t e^{i\omega(z-z_j)}) d\omega \end{aligned}$$

令  $z = z_k$ , 则有:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (F[\varphi] e^{i\omega z_k} \sum_{j=1}^N \lambda_j e^{-i\omega z_j} [1 - (i\omega)^2 D(\theta_k(\xi)) \Delta t] d\omega = \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} (F[\varphi] e^{i\omega z_k} \sum_{j=1}^N \lambda_j e^{-i\omega z_j} [1 + \omega^2 D(\theta_k(\xi)) \Delta t] d\omega \end{aligned}$$

其中  $D(\theta_k(\xi)) > 0, \theta_k(\xi) \in [\theta(z - \Delta z), \theta(z + \Delta z)]$ , 且  $F[\varphi] > 0$ 。所以  $\sum_{j=1}^N \lambda_j e^{-i\omega z_j} = 0$ , 从而  $\lambda_j = 0 (j = 1, 2, \dots, N)$ , 与假设矛盾, 因此向量组  $\{\psi_j(z)\}_{j=1}^N$  是线性无关的, 那么  $H$  可逆, 即方程(11)存在唯一解。

### 3 数值算例

**算例 1** 一维水平吸渗的土壤水分运动方程。

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + f & (0 \leq z \leq 1, t > 0) \\ \theta(z, 0) = \theta_0 & (t = 0, z \geq 0) \\ \theta(0, t) = f_1 & (z = 0, t > 0) \\ \theta(1, t) = f_N & (z = 1, t > 0) \end{cases}$$

取  $D(\theta) = \theta + 1$ , 真解为  $\theta(z, t) = tz^2 + 1, f = -6t^2z^2 + z^2 - 4t, \theta_0, f_1, f_N$  由真解确定, 空间步长  $h = 0.05$  m, 时间步长  $\Delta t = 0.01$  d, 选取高斯函数  $\exp(-cr^2), (c > 0)$  作为径向基函数, 误差采用  $L_2$  范数进行估计。

算例 1 数值计算结果和精确解的比较如图 1 所示。

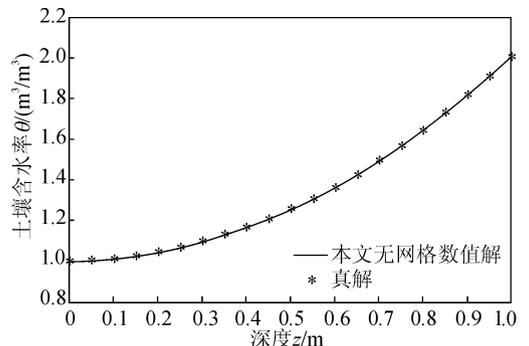


图 1 算例 1 本文算法解与真解比较  
Fig. 1 Comparison of the numerical solution and the exact solution for example 1

由图可知, 本文算法具有较高的计算精度。在不同

的空间步长下,时间步长  $\Delta t = 0.01$  d,选择高斯函数中不同的参数  $c$ ,得到算例1 本文算法的数值结果如表1 所示。

表2 为取空间步长0.05 m,时间步长0.01 d,算例1 本文算法与有限差分法之间的计算时间和误差比较。

表1 算例1 本文算法数值结果

Tab.1 Numerical solution of example 1

空间步长 /m	参数 $c$	计算时间 /s	计算误差
0.10	1.5	32.795 45	8.0311e-005
	2	0.856 685	5.5001e-005
	2.5	0.578 921	5.7009e-005
0.05	19	25.981 676	1.8223e-005
	20	5.931 563	3.8160e-005
	21	2.865 717	3.2701e-005
0.02	225	19.699 30	4.3484e-004
	226	7.236 284	4.0896e-004
	227	7.523 348	4.1835e-004

表2 算例1 本文算法与有限差分法的比较

Tab.2 The results of the method of this paper compared with that of finite difference method for example 1

算法	本文算法		有限差分法	
	$t = 0.5$ d	$t = 1$ d	$t = 0.5$ d	$t = 1$ d
计算时间/s	1.128 088	2.293 426	0.381 037	0.761 973
计算误差	3.0556e-005	4.4568e-005	3.1000e-003	1.0700e-003

**算例2 一维垂直入渗的土壤水分运动方程。**

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} + f & (0 \leq z \leq 1, t > 0) \\ \theta(z, 0) = \theta_0 & (t = 0, z \geq 0) \\ \theta(0, t) = f_1 & (z = 0, t > 0) \\ \theta(1, t) = f_N & (z = 1, t > 0) \end{cases}$$

取  $D(\theta) = \theta + 100, K(\theta) = \theta$ ,真解为  $\theta(z, t) = tz - tz^2, f = -6t^2z^2 + 6t^2z - z^2 - t^2 + 2tz + z + 199t, \theta_0, f_1, f_N$  由真解确定,空间步长  $h = 0.02$  m,时间步长  $\Delta t = 0.01$  d,依然选取高斯函数作为径向基函数。

算例2 数值计算结果和精确解的比较如图2 所示。由图2 可知,本文算法解与精确解相当吻合。时间步长取  $\Delta t = 0.01$  d,选择不同的空间步长和高斯函数中不同的参数  $c$ ,得到算例2 本文算法的数值结果如表3 所示。表4 为算例2 本文格式与有限差分法之间的计算时间和误差比较,空间步长取 0.05 m,时间步长取 0.01 d。

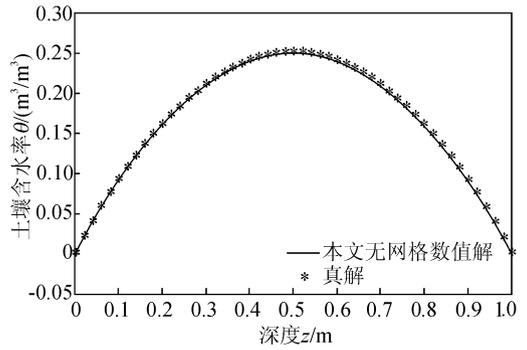


图2 算例2 本文算法解与真解比较  
Fig.2 Comparison of the numerical solution and the exact solution for example 2

表3 算例2 本文算法数值结果

Tab.3 Numerical solution of example 2

空间步长 /m	参数 $c$	计算时间 /s	计算误差
0.10	1.7	17.863 944	8.9285e-005
	2	1.350 477	5.3087e-005
	2.5	0.440 467	2.7888e-005
0.05	19	57.890 294	6.5034e-005
	22	1.660 988	9.0434e-005
	25	1.636 406	1.3197e-004
0.02	215	28.090 494	2.2269e-004
	220	9.491 019	2.3763e-004
	225	9.217 350	2.5130e-004

表4 算例2 本文算法与有限差分法的比较

Tab.4 The results of the method of this paper compared with that of finite difference method for Example 2

算法	本文算法		有限差分法	
	$t = 0.5$ d	$t = 1$ d	$t = 0.5$ d	$t = 1$ d
计算时间/s	0.739 657	1.660 988	0.291 490	0.318 205
计算误差	8.7046e-005	9.0434e-005	1.6000e-003	2.0000e-003

**4 结 论**

通过具体数值算例,将径向基无网格法与有限差分法求解一维土壤水分运动方程的计算精度进行比较,得知本文算法计算精度较高,实现容易。此外,数值试验观察发现:空间步长以及时间步长的选取对计算精度有直接影响,而径向基函数的选取和参数  $c$  的选取是保证计算精度的关键因素。

**参考文献:**

[1] Duan Yong, Tan Yongji. On condition number of meshless collocation method using radial basis functions [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 172 (1): 141-

- 147.
- [2] Hu H Y, Li Z C, Cheng A H. Radial Basis Collocation Methods for Elliptic Boundary Value Problems [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2005, 50(1-2): 289-320.
- [3] Su Lijun, Qin Xinqiang, Miao Baoshan, et al. Radial basis function collocation method with difference for nonlinear convection-dominated diffusion equations[C]//2010 Sixth International Conference on Natural Computation, Yantai, China, 2010;3023-3027.
- [4] 雷志栋, 杨诗秀, 谢森传. 土壤水动力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1988.
- [5] 雷志栋, 杨诗秀. 非饱和土壤水一维流动的数值计算[J]. 土壤学报, 1982, 19(2): 141-152.  
Lei Zhidong, Yang Shixiu. Numerical method of one-dimensional flow through unsaturated soils [J]. Acta Pedologica Sinica, 1982, 19(2): 141-152.
- [6] 李道西, 罗金耀. 地下滴灌土壤水分运动数值模拟[J]. 节水灌溉, 2004, 4(04): 4-7.  
Li Daoxi, Luo Jinyao. Numerical simulation of soil-water movement in subsurface drip irrigation [J]. Water Saving Irrigation, 2004, 4(04): 4-7.
- [7] 高西宁, 郭巍, 张玉龙. 非饱和土壤水分一维运动的数值模拟[J]. 安徽农业科学, 2006, 34(16): 3879-3880.  
Gao Xining, Guo Wei, Zhang Yulong. Numerical model of one-dimensional flow through unsaturated soil [J]. Journal of Anhui Agricultural Sciences, 2006, 34(16): 3879-3880.
- [8] 张耀峰, 张德生, 武新乾. 一维非饱和土壤水分运动的数值模拟[J]. 纺织高校基础科学学报, 2004, 17(2): 123-127.  
Zhang Yaofeng, Zhang Desheng, Wu Xinqian. Numerical simulation for 1-D water flow in unsaturated soils [J]. Basic Sciences Journal of Textile Universities, 2004, 17(2): 123-127.
- [9] 孙慧, 周德亮. 用无网格伽辽金法求解稳定地下水流问题[J]. 地下水, 2008, 30(6): 1-2.  
Sun Hui, Zhou Deliang. Solution of the steady groundwater flowing problem by the element-free galerkin in method [J]. Ground Water, 2008, 30(6): 1-2.
- [10] 张华, 陈善雄, 陈守义. 非饱和土入渗的数值模拟[J]. 岩土力学, 2003, 24(5): 715-718.  
Zhang Hua, Chen Shanxiang, Chen Shouyi. Numerical simulation of infiltration in unsaturated soil [J]. Rock and Soil Mechanics, 2003, 24(5): 715-718.
- [11] 卢小超, 吴大鸿. 非饱和土入渗的数值模拟[J]. 中国水运, 2006, 4(4): 136-137.  
Lu Xiaochao, Wu Dahong. Numerical simulation of infiltration in unsaturated soil [J]. China Water Transport, 2006, 4(4): 136-137.
- [12] 隋晓艳, 周德亮. 用最小二乘配点法解地下水稳定流问题[J]. 地下水, 2010, 32(1): 15-16.  
Sui Xiaoyan, Zhou Deliang. Application of least-square collocation meshless method in simulation of steady groundwater flow [J]. Ground Water, 2010, 32(1): 15-16.
- [13] 周德亮, 王焕丽. 径向基函数法在地下水模拟中的应用[J]. 辽宁师范大学学报, 2008, 31(4): 390-392.  
Zhou Deliang, Wang Huanli. Application of RBF in simulation of groundwater flow [J]. Journal of Liaoning Normal University, 2008, 31(4): 390-392.
- [14] 钱向东. 基于紧支径向基函数的配点型无网格法[J]. 河海大学学报, 2001, 29(1): 96-98.  
Qian Xiangdong. A meshless method with compactly supported radial basis functions [J]. Journal of Hohai University, 2001, 29(1): 96-98.

(责任编辑 杨小丽)