文章编号：1006-4710(2011)04-0477-04

广义准二维玻色-爱因斯坦凝聚方程的初边值问题

游淑军[1,2]，宁效琦[1]，刘振海[2]

（1. 中南大学 数学科学与计算技术学院，湖南 长沙 410083；2. 怀化学院 数学系，湖南 怀化 418008）

摘要： 考虑广义带空间调制非线性的准二维玻色-爱因斯坦凝聚方程。研究其初边值问题解的存在性和唯一性。通过一系列的先验估计，利用 Galerkin 方法验证了上述问题广义解的存在性，并进而确认了解的唯一性。

关键词： 玻色-爱因斯坦凝聚；初边值问题；广义解

中图分类号： O175.29　　**文献标志码：** A

Initial Boundary Value Problem for Generalized Quasi-Two Dimensional Bose-Einstein Condensates

YOU Shujun[1,2], NING Xiaoqi[1], LIU Zhenhai[2]

(1. School of Mathematical Science and Computing Technology, Central South University, Changsha 410083, China; 2. Department of Mathematics, Huaihua University, Huaihua 418008, China)

Abstract: Consider the existence and uniqueness of the solution to the initial boundary value problem for a generalized quasi-two dimensional Bose-Einstein condensates with spatially modulated nonlinearity and obtain the existence and uniqueness of the generalized solution to the problem by a priori integral estimates and Galerkin method.

Key words: Bose-Einstein condensates; initial boundary value problem; generalized solution

玻色-爱因斯坦凝聚是玻色子原子在冷却到绝对零度附近时所呈现出的一种气态的、超流性的物态。在这种状态下，几乎全部原子都聚集到能量最低的量子态，所有的原子就象一个原子一样，具有完全相同的物理性质。BEC 体具有奇特的性质可以用来设计精确度更高的原子钟，将光储存起来，甚至还可以用玻色-爱因斯坦凝聚体来模拟黑洞。因此对 BEC 的研究对物理学的发展和科学技术的进步将有着深刻的影响。

BEC 的状态可以通过凝聚波函数 φ 来描述。假设所有的原子都被凝聚，利用平均场理论处理波色子得到总能量，保持原子数不变使能量最小化，得到 G-P 方程为：

$$i\hbar\varphi_t(\vec{r}) = \left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V(\vec{r}) + g|\varphi(\vec{r})|^2\right)\varphi(\vec{r}) \tag{1}$$

其中，$\hbar$ 为普朗克常数，m 为玻色子的质量，$V(\vec{r})$ 为外势，g 表示原子间相互作用的强度。

G-P 方程很好的描述了 BEC 的行为，因而常用来做理论分析。

随着著名的玻色 - 爱因斯坦凝聚实验的实现，有关 BEC 的实验和理论研究工作被大量而广泛地开展[1-10]。文献[2]研究了光晶格中 BEC 的动力学性质，解析地讨论了光晶格的维数对自囚禁、孤波和呼吸子等动力学行为的影响。

然而，大部分有关带空间调制非线性的玻色 - 爱因斯坦凝聚方程的研究都局限在准一维的情形下。

在 BEC 被限制在谐波陷阱中的情况下 G-P 方程变为准二维玻色 - 爱因斯坦凝聚方程，即：

$$i\varphi_t = -\frac{1}{2}(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) +$$

收稿日期： 2011-06-25

基金项目： 国家自然科学基金资助项目(10971019)；湖南省教育厅基金资助项目(10C1056)；怀化学院科研基金资助项目(HHUY2011-01)。

作者简介： 游淑军(1979-)，女，湖南祁阳人，博士生，研究方向为偏微分方程的理论与应用。E-mail：ysj980@yahoo.com.cn。刘振海(1958-)，男，湖南益阳人，教授，博导，研究方向为偏微分方程、最优控制与优化。E-mail：zhhliu@mail.csu.edu.cn。

$$\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)\varphi+ g(x,y)|\varphi|^2\varphi \quad (x,y)\in\Omega,\ t\in(0,T) \tag{2}$$

式中,$\Omega=[a,b]\times[c,d]\subset\mathbf{R}^2$。

本研究考虑如下广义带空间调制非线性的准二维玻色-爱因斯坦凝聚方程的适定性,即:

$$i\varphi_t=-\frac{1}{2}(\varphi_{xx}+\varphi_{yy})+\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)\varphi+g(x,y)|\varphi|^p\varphi \quad 0<p<2 \quad (x,y)\in\Omega \quad t\in(0,T) \tag{3}$$

研究式(3)带如下初边值条件时广义解的存在性和唯一性,即:

$$\varphi|_{\partial\Omega}=0,\quad t\in[0,T] \tag{4}$$

$$\varphi|_{t=0}=\varphi_0(x,y),\quad (x,y)\in\Omega \tag{5}$$

在本研究中笔者用 C 和 C_i 表示不同的可能依赖初始值的正常数。

1 先验估计

引理1 如果 $\varphi_0(x,y)\in L^2(\Omega)$,则公式(3)~(5)的解为:

$$\|\varphi(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}=\|\varphi_0(x,y)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

证明:将(3)式与 φ 做内积得:

$$(i\varphi_t,\varphi)=-\frac{1}{2}(\varphi_{xx}+\varphi_{yy},\varphi)+\frac{1}{2}\omega^2((x^2+y^2)\varphi,\varphi)+(g(x,y)|\varphi|^p\varphi,\varphi) \tag{6}$$

由于:

$$\mathrm{Im}(i\varphi_t,\varphi)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\mathrm{Im}[-\frac{1}{2}(\varphi_{xx}+\varphi_{yy},\varphi)+\frac{1}{2}\omega^2((x^2+y^2)\varphi,\varphi)+(g(x,y)|\varphi|^p\varphi,\varphi)]=0$$

所以由(6)式知:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\varphi(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}=0$$

从而有:

$$\|\varphi(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}=\|\varphi_0(x,y)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

引理2 如果 $\varphi_0(x,y)\in H_0^1(\Omega)\cap L^{p+2}(\Omega)$,则公式(3)~(5)的解为:

$$E(t)=E(0)$$

其中:

$$E(t)=\frac{1}{4}\|\varphi_x\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{4}\|\varphi_y\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\omega^2}{4}\iint_\Omega(x^2+y^2)|\varphi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{1}{p+2}\iint_\Omega g(x,y)|\varphi|^{p+2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

证明:将(3)式与 φ_t 做内积,得:

$$(i\varphi_t,\varphi_t)=-\frac{1}{2}(\varphi_{xx}+\varphi_{yy},\varphi_t)+\frac{1}{2}\omega^2((x^2+y^2)\varphi,\varphi_t)+(g(x,y)|\varphi|^p\varphi,\varphi_t) \tag{7}$$

由于:

$$\mathrm{Re}(i\varphi_t,\varphi_t)=0$$

$$\mathrm{Re}\left[-\frac{1}{2}(\varphi_{xx}+\varphi_{yy},\varphi_t)\right]=\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\varphi_x\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\varphi_y\|^2_{L^2(\Omega)})$$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\omega^2((x^2+y^2)\varphi,\varphi_t)\right]=\frac{\omega^2}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_\Omega(x^2+y^2)|\varphi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{Re}(g(x,y)|\varphi|^p\varphi,\varphi_t)=\frac{1}{p+2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_\Omega g(x,y)|\varphi|^{p+2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

则由(7)式知:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\frac{1}{4}\|\varphi_x\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{4}\|\varphi_y\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\omega^2}{4}\iint_\Omega(x^2+y^2)|\varphi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{1}{p+2}\iint_\Omega g(x,y)|\varphi|^{p+2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y]=0 \tag{8}$$

记:

$$E(t)=\frac{1}{4}\|\varphi_x\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{4}\|\varphi_y\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\omega^2}{4}\iint_\Omega(x^2+y^2)|\varphi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{1}{p+2}\iint_\Omega g(x,y)|\varphi|^{p+2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

则由(7)式得:

$$E(t)=E(0)$$

引理3 如果 $u\in L^q(\Omega)$,$D^m u\in L^r(\Omega)$,$1\leqslant q,r\leqslant\infty$,$0\leqslant j\leqslant m$,$\Omega\subseteq\mathbf{R}^n$,则:

$$\|D^j u\|_{L^p(\Omega)}\leqslant C\|D^m u\|^{\alpha}_{L^r(\Omega)}\|u\|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)}$$

其中,C 是正常数,$0 \leqslant \frac{j}{m} \leqslant \alpha \leqslant 1$,并且有：

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + \alpha\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + (1-\alpha)\frac{1}{q}$$

引理 4 如果引理 2 的条件成立,并且存在一个常数 $M > 0$ 使得 $|g(x,y)| \leqslant M, (x,y) \in \Omega$,则有：

$$\|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C$$
$$\|\varphi\|_{L^{p+2}(\Omega)} \leqslant C$$

证明:由引理 2 知：

$$\frac{1}{4}\|\varphi_x\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4}\|\varphi_y\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\omega^2}{4}\iint_\Omega (x^2+y^2)|\varphi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant |E(0)| + \frac{1}{p+2}\iint_\Omega |g(x,y)||\varphi|^{p+2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant |E(0)| + \frac{M}{p+2}\iint_\Omega |\varphi|^{p+2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{9}$$

由引理 3 及 Youg 不等式[4-6] 得：

$$\frac{M}{p+2}\iint_\Omega |\varphi|^{p+2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant C\|\nabla\varphi\|^p_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{8}\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + C \tag{10}$$

于是由 (9)、(10) 式可得：

$$\|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C$$
$$\|\varphi\|_{L^{p+2}(\Omega)} \leqslant C$$

引理 5 如果引理 4 的条件成立，则有 $\|\varphi_t\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C$。

证明 将 (3) 式对 t 微分一次,然后与 φ_t 做内积得：

$$(i\varphi_{tt},\varphi_t) = -\frac{1}{2}(\varphi_{xxt}+\varphi_{yyt},\varphi_t) + \frac{1}{2}\omega^2((x^2+y^2)\varphi_t,\varphi_t) + (g(x,y)|\varphi|^p_t\varphi,\varphi_t) + (g(x,y)|\varphi|^p\varphi_t,\varphi_t) \tag{11}$$

由于：

$$\mathrm{lm}(i\varphi_{tt},\varphi_t) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\varphi_t\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\mathrm{lm}\Big[-\frac{1}{2}(\varphi_{xxt}+\varphi_{yyt},\varphi_t) + \frac{1}{2}\omega^2((x^2+y^2)\varphi_t,\varphi_t) + (g(x,y)|\varphi|^p\varphi_t,\varphi_t)\Big] = 0$$

$$\mathrm{lm}(g(x,y)|\varphi|^p_t\varphi,\varphi_t) = \mathrm{lm}\Big[\frac{p}{2}\iint_\Omega g(x,y)|\varphi|^{p-2}(\varphi_t\bar{\varphi}+\varphi\bar{\varphi}_t)\varphi\bar{\varphi}_t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big] = \mathrm{lm}\Big[\frac{p}{2}\iint_\Omega g(x,y)|\varphi|^{p-2}\varphi^2(\bar{\varphi}_t)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big] \leqslant \frac{p}{2}\iint_\Omega g(x,y)|\varphi|^p|\varphi_t|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \frac{pM}{2}\|\varphi\|^p_{L^\infty(\Omega)}\|\varphi_t\|^2_{L^2(\Omega)}$$

利用引理 3, Sobolev 嵌入定理和引理 4 得：

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C\|\varphi\|^{\frac{1}{2}}_{H^{1,1}}\|\varphi\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)} \leqslant C\|\varphi\|^{\frac{1}{2}}_{H^1}\|\varphi\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)} \leqslant C$$

因此从 (11) 式可得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\varphi_t\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C\|\varphi_t\|^2_{L^2(\Omega)}$$

利用 Gronwall 不等式得：

$$\|\varphi_t\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C$$

2 公式(3) ~ (5) 整体广义解的存在唯一性

利用上一节的先验估计及 Galerkin 方法可得：

定理1 如果 $\varphi_0(x,y) \in H^1_0(\Omega) \cap L^{p+2}(\Omega)$,并且存在一个常数 $M>0$ 使得 $|g(x,y)| \leqslant M, (x,y) \in \Omega$,则初边值公式(3) ~ (5) 存在整体广义解：

$$\varphi(x,y,t) \in L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega) \cap L^{p+2}(\Omega))$$
$$\varphi_t(x,y,t) \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

定理2 如果定理1 的条件成立,那么初边值公式(3) ~ (5) 的整体广义解是唯一的。

证明:设公式(3) ~ (5) 有两个解 φ 和 ψ。令 $u = \varphi - \psi$,则从公式(3) ~ (5) 得到 u 满足方程为：

$$iu_t = -\frac{1}{2}(u_{xx}+u_{yy}) + \frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)u + g(x,y)(|\varphi|^p\varphi - |\psi|^p\psi)$$
$$(x,y) \in \Omega,\ t \in (0,T) \tag{12}$$
$$u(x,t)|_{\partial\Omega} = 0$$
$$\Omega = [a,b]\times[c,d],\ t \in [0,T] \tag{13}$$
$$u(x,y)|_{t=0} = 0,\quad (x,y) \in \Omega \tag{14}$$

将 (12) 式与 u 做内积得：

$$(iu_t,u) = -\frac{1}{2}(u_{xx}+u_{yy},u) + \frac{1}{2}\omega^2[(x^2+y^2)u,u] + (g(x,y)(|\varphi|^p\varphi - |\psi|^p\psi),u) \tag{15}$$

由于：

$$\mathrm{lm}(iu_t,u) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\mathrm{lm}(u_{xx}+u_{yy},u)=$$
$$\mathrm{lm}((x^2+y^2)u,u)=0$$
$$\mathrm{lm}(g(x,y)(|\varphi|^p\varphi-|\psi|^p\psi),u)\leqslant$$
$$M(p+1)\iint_\Omega \sup\{|\varphi|^p,|\psi|^p\}|u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant$$
$$M(p+1)(\|\varphi\|^p_{L^\infty(\Omega)}+\|\psi\|^p_{L^\infty(\Omega)})\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

因此从(15)式得:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\leqslant C\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

利用 Gronwall 不等式及(14)式可得:

$$u=0$$

参考文献:

[1] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, et al. Observation of bose-einstein condensation in a dilute atomic vapor[J]. Science, 1995, 269(5221): 198-201.

[2] Xue J, Zhang A, Liu J. Self-trapping of Bose-Einstein condensates in optical lattices: the effect of the lattice dimension[J]. Physical Review A, 2008, 77(1): 36-37.

[3] Salerno M, Kontop V V, Bludov Y V. Long-living bloch oscillations of matter waves in periodic potentials[J]. Physical Review Letters, 2008, 101(3): 04-08.

[4] Brazhnyi V A, Kontop V V , Perez-garcia V M, et al. Dissipation-induced coherent structures in bose-einstein condensates[J]. Physical Review Letters, 2009, 102(14): 41.

[5] Avelar A T, Bazeiad C W B. Solitons with cubic and quintic nonlinearities modulated in space and time[J]. Physical Review E, 2009, 79(2): 56-57.

[6] Dion C M, Cancès E. Ground state of the time-independent Gross-Pitaevskii equation[J]. Computer Physics Commun, 2007, 177: 787-798.

[7] Dion C M, Cancès E. Spectral method for the time-dependent Gross-Pitaevskii equation with a harmonic trap[J]. Physics Review E, 2003, 67(4): 67-72.

[8] Luo X Y, Liu X S, Ding P Z. Numerical study of interaction of two Bose-Einstein condensates[J]. Chinese Journal of Atomic and Molecular Physics, 2007, 24 (2):418-420.

[9] Hua W, Liu X S, Ding P Z. Dynamic study for numerical solution of Gross-Pitaevskii equation[J]. Chinese Computational Physics, 2006, 23: 483-488.

[10] Liu X S, Qi Y Y, He J F, et al. Recent progress in symplectic algorithms for use in quantum systems[J]. Communications in Computational Physics, 2007, 2: 1-53.

(责任编辑 李虹燕)