文章编号：1006-4710(2012)02-0161-07

具有双重不确定性非线性系统输出反馈鲁棒控制

李江，钱富才

(西安理工大学 自动化与信息工程学院，陕西 西安 710048)

摘要： 对同时具有参数不确定性和随机干扰的非线性系统，通过扩展状态向量，构造间接型输出反馈控制器，运用T-S模糊理论、线性矩阵不等式(LMI)技术和并行分布补偿(PDC)结构，提出了具有双重不确定性非线性系统的鲁棒模糊控制器设计法。以倒立摆系统为被控对象，仿真结果验证了所设计方法的有效性。

关键词： 线性矩阵不等式；鲁棒控制；Takagi-Sugeno模型；并行分布补偿方法

中图分类号： TP273　　**文献标志码：** A

Output Feedback Robust Control for Nonlinear Systems with Dual Uncertainties

LI Jiang, QIAN Fucai

(Faculty of Automation and Information Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

Abstract: The non-linear systems with parameter uncertainity and stochastic noise is studied in this paper. The indirect-type output feedback controller is formed via expending state vector. T-S fuzzy theory, linear matrix inequality (LMI) technique and parallel distribution compensation (PDC) structure are used to suggest the design method of robust fuzzy controller with dual uncertainity and non-linear system. With the inverted pendulum system as the controlled object, the simulation results indicate the effectiveness of the proposed method.

Key words: linear matrix inequalitie (LMI); robust control; Takagi-Sugeno model; parallel distributed compensation (PDC) approach

近年来，一些学者应用T-S模糊模型法研究参数不确定性、系统变量受约束等非线性系统控制问题[1-4]。上述文献研究非线性控制问题时都考虑了系统只受参数不确定性或者噪声干扰一种情况的影响。文献[5-9]分析了具有参数不确定性和噪声干扰的LQG保性能控制及对偶控制问题，但是这些研究方法都要求系统必须为线性模型，对于非线性模型则无能为力。

本研究在上述研究基础上，针对具有双重不确定性非线性系统，提出设计间接型输出反馈鲁棒控制器法。利用T-S模糊模型、LMI技术和PDC结构控制器设计方法，给出鲁棒模糊控制器的设计方法，最后通过仿真实例验证所设计方法有效。

1　问题的描述

考虑下列连续时间动态系统：

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(t)=f(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t))+\boldsymbol{w}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=h(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t))+\boldsymbol{v}(t)\end{cases}\tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{x}(t)\in R^n$是状态向量，$\boldsymbol{u}(t)\in R^p$是输入向量，$\boldsymbol{y}(t)\in R^q$是测量向量，$\boldsymbol{w}(t)\sim(0,\boldsymbol{V}_1)$和$\boldsymbol{v}(t)\sim(0,\boldsymbol{V}_2)$为不相关的过程噪声和测量噪声向量，$f$和$h$分别是$n$维和$q$维非线性函数。本研究用下面的泛函评价给定控制律的性能，即性能指标为：

$$J=\lim_{T\to\infty}E\left[\frac{1}{T}\int_0^T(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t))\mathrm{d}t\right]\tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{R}$分别为半正定矩阵和正定矩阵且有适当

收稿日期： 2012-02-16

基金项目： 国家自然科学基金资助项目(60874033)；高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20116118110008)。

作者简介： 李江(1983-)，男，陕西西安人，博士生，研究方向为鲁棒控制、随机控制和全球定位。E-mail：lijiang0613@163.com。钱富才(1963-)，男，陕西西安人，博士，教授，研究方向为随机控制、最优控制等。E-mail：fcqian@xaut.edu.cn。

维数。

本研究设计由输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 驱动的控制器,为:

$$\begin{cases}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}_c\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}_c\boldsymbol{y}(t) \\ \boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{C}_c\hat{\boldsymbol{x}}(t)\end{cases}$$

从而使得(1)式渐进稳定,且相应的闭环性能指标满足 $J \leqslant J^*$,J^* 是某个确定的常数,即:

$$(P) \quad J \leq J^*$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = f(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)) + \boldsymbol{w}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = h(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)) + \boldsymbol{v}(t)\end{cases}$$

对(1)式设计控制器是非常困难的,然而应用T-S模糊模型将(1)式近似分段线性化,可以将一个非线性问题转化为多个局部线性问题来处理,用一组模糊蕴含条件语句来描述,即:

$$R^i: IF\ z_1(t) \in M_{i1}\ and \cdots and\ z_p(t) \in M_{ip}$$

$$THEN \begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A}_i + \Delta\boldsymbol{A}_i)\boldsymbol{x}(t) + (\boldsymbol{B}_i + \Delta\boldsymbol{B}_i)\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{w}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = (\boldsymbol{C}_i + \Delta\boldsymbol{C}_i)\boldsymbol{x}(t) + (\boldsymbol{D}_i + \Delta\boldsymbol{D}_i)\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{v}(t)\end{cases} \tag{3}$$

(3)式为对原系统局部线性化状态的空间描述。可见子系统(3)式中有两种不确定性存在。一种是系统中存在的参数不确定性。如(3)式中 $\Delta\boldsymbol{A}_i$,$\Delta\boldsymbol{B}_i$,$\Delta\boldsymbol{C}_i$,$\Delta\boldsymbol{D}_i$ 所示,反映子系统模型中参数不确定性,假定它们是范数有界的且具有形式,为:

$$\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{A}_i & \Delta\boldsymbol{B}_i \\ \Delta\boldsymbol{C}_i & \Delta\boldsymbol{D}_i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_{ai} \\ \boldsymbol{H}_{bi}\end{bmatrix}\boldsymbol{F}_i[\boldsymbol{E}_{ai} \quad \boldsymbol{E}_{bi}]$$

式中,$\boldsymbol{F}_i$ 是一个满足 $\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_i \leqslant \boldsymbol{I}$ 的不确定矩阵,$\boldsymbol{H}_{ai}$,$\boldsymbol{H}_{bi}$,$\boldsymbol{E}_{ai}$,$\boldsymbol{E}_{bi}$ 是已知适当维数的常数矩阵,反映了不确定参数的结构信息。

另一种不确定性是系统受到外部噪声干扰,如(3)式中 $\boldsymbol{w}(t)$ 和 $\boldsymbol{v}(t)$ 所示,其中 $\boldsymbol{A}_i$,$\boldsymbol{B}_i$,$\boldsymbol{C}_i$,$\boldsymbol{D}_i$ 为已知适当维数实常数矩阵;R_i 表示模糊系统第 i 条规则,$z_j(t)$,$j=1,2,\cdots,p$ 为前提变量(通常是 $\boldsymbol{x}(t)$ 的函数),$M_{ji}(t)$,$(i=1,2,\cdots,r,\ j=1,2,\cdots,p)$ 为分量 $z_j(t)$ 的论域上的模糊集合,r 为规则数。

对系统(3)运用单点模糊化和平均加权解模糊方法,可得近似原系统的模糊模型,其表述方式为:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))[(\boldsymbol{A}_i + \Delta\boldsymbol{A}_i)\boldsymbol{x}(t) + \\ \qquad (\boldsymbol{B}_i + \Delta\boldsymbol{B}_i)\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{w}(t)] \\ \boldsymbol{y}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))[(\boldsymbol{C}_i + \Delta\boldsymbol{C}_i)\boldsymbol{x}(t) + \\ \qquad (\boldsymbol{D}_i + \Delta\boldsymbol{D}_i)\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{v}(t)]\end{cases} \tag{4}$$

其中,$h_i(z(t))$ 为第 i 条模糊规则的隶属度函数,且有:

$$0 < h_i(z(t)) < 1, \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) = 1$$

假定系统的状态是不可直接测量的,则研究的问题成为对系统(4)和性能指标(2)设计一个PDC结构的模糊控制器,即:

令 Ω^i 表示第 i 个子系统对应的控制器,R^i:$IF\ z_1(t) \in M_{i1}\ and \cdots and\ z_p(t) \in M_{ip}$

$$THEN \begin{cases}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}_{ci}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}_{ci}\boldsymbol{y}(t) \\ \boldsymbol{u}_i(t) = \boldsymbol{C}_{ci}\hat{\boldsymbol{x}}(t)\end{cases} \tag{5}$$

其中,$\hat{\boldsymbol{x}}(t) \in \mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{A}_{ci}$,$\boldsymbol{B}_{ci}$ 和 $\boldsymbol{C}_{ci}$ 是待定的子系统控制器系数矩阵。则整个系统的控制器为:

$$\boldsymbol{u}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\boldsymbol{C}_{ci}\hat{\boldsymbol{x}}(t) \tag{6}$$

将控制器(6)应用到系统(4)中,可得由系统输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 间接控制的闭环系统,即:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))[(\bar{\boldsymbol{A}}_i + \bar{\boldsymbol{H}}_i\boldsymbol{F}_i\bar{\boldsymbol{E}}_i)\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \bar{\boldsymbol{B}}_i\bar{\boldsymbol{w}}(t)] \tag{7}$$

其中:

$$\bar{\boldsymbol{A}}_i = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_i & \boldsymbol{B}_i\sum_{j=1}^{r} h_j(z(t))\boldsymbol{C}_{cj} \\ \boldsymbol{B}_{ci}\boldsymbol{C}_i & \boldsymbol{A}_{ci} + \boldsymbol{B}_{ci}\boldsymbol{D}_i\sum_{j=1}^{r} h_j(z(t))\boldsymbol{C}_{cj}\end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{B}}_i = \begin{bmatrix}\boldsymbol{V}_1^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{B}_{ci}\boldsymbol{V}_2^{\frac{1}{2}}\end{bmatrix}, \bar{\boldsymbol{H}}_i = \begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_{ai} \\ \boldsymbol{B}_{ci}\boldsymbol{H}_{bi}\end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{w}} = \left[\boldsymbol{V}_1^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{w}(t) \quad \boldsymbol{V}_2^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{v}(t)\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\bar{\boldsymbol{E}}_i = \left[\boldsymbol{E}_{ai} \quad \boldsymbol{E}_{bi}\sum_{j=1}^{r} h_j(z(t))\boldsymbol{C}_{cj}\right]$$

经过这样的数学变换,求解原非线性控制问题成为了求解闭环系统的控制问题,即:

$$(CLP) \qquad J \leq J^*$$

$$\text{s.t.} \quad \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))[(\bar{\boldsymbol{A}}_i + \bar{\boldsymbol{B}}_i\boldsymbol{F}_i\bar{\boldsymbol{E}}_i)\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \bar{\boldsymbol{B}}_i\bar{\boldsymbol{w}}(t)] \tag{8}$$

2 定理及主要结论

定义1 二次稳定

对于不确定连续随机系统(3),如果存在正定对称阵 $\bar{\boldsymbol{Q}} > 0$,使:

$$(\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{H}_{ai}\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{E}_{ai})^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{Q}} + \overline{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{H}_{ai}\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{E}_{bi}) < 0$$

并且 $\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_i \leq \boldsymbol{I}$,则不确定随机系统(3)是二次稳定的;同理,对于不确定连续随机系统(4),如果存在(6)式表示的输出反馈控制器,且存在公共正定对称矩阵 $\overline{\boldsymbol{Q}} > 0$,使得:

$$(\overline{\boldsymbol{A}}_i + \overline{\boldsymbol{H}}_i\boldsymbol{F}_i\overline{\boldsymbol{E}}_i)^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{Q}} + \overline{\boldsymbol{Q}}(\overline{\boldsymbol{A}}_i + \overline{\boldsymbol{H}}_i\boldsymbol{F}_i\overline{\boldsymbol{E}}_i) < 0$$

则闭环系统(7)是二次稳定的。

定义 2[5] 对于不确定连续随机系统(4)中的每一个子系统和性能指标(2),如果存在(5)式表示的输出反馈控制器,且存在对称正定矩阵 $\overline{\boldsymbol{Q}} > 0$,致使由隶属度函数构成的闭环系统(7)中每个子系统满足:

$$(\overline{\boldsymbol{A}}_i + \overline{\boldsymbol{H}}_i\boldsymbol{F}_i\overline{\boldsymbol{E}}_i)\overline{\boldsymbol{Q}} + \overline{\boldsymbol{Q}}(\overline{\boldsymbol{A}}_i + \overline{\boldsymbol{H}}_i\boldsymbol{F}_i\overline{\boldsymbol{E}}_i)^{\mathrm{T}} + \overline{\boldsymbol{B}}_i\overline{\boldsymbol{B}}_i^{\mathrm{T}} < 0 \quad (9)$$

则输出反馈控制器(5)是二次保性能控制器。

引理 1 给定适当维数矩阵 $\boldsymbol{Y},\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{Y}$ 是对称的,则:

$$\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{F}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} < 0$$

对所有满足 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} < \boldsymbol{I}$ 的矩阵 $\boldsymbol{F}$ 成立,当且仅当存在一个常数 $\varepsilon > 0$ 时,有:

$$\boldsymbol{Y} + \varepsilon\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E} < 0$$

引理 2 矩阵的 Schur 补性质。对给定矩阵 $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_{11} & \boldsymbol{S}_{12} \\ \boldsymbol{S}_{21} & \boldsymbol{S}_{22} \end{bmatrix}$,有三个等价的条件为:

① $\boldsymbol{S} < 0$

② $\boldsymbol{S}_{11} < 0, \boldsymbol{S}_{22} - \boldsymbol{S}_{12}\boldsymbol{S}_{11}^{-1}\boldsymbol{S}_{12} < 0$

③ $\boldsymbol{S}_{22} < 0, \boldsymbol{S}_{11} - \boldsymbol{S}_{12}\boldsymbol{S}_{22}^{-1}\boldsymbol{S}_{12} < 0$

定理 1 如果存在对称正定矩阵 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y} > 0$,和矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i$, $\widetilde{\boldsymbol{B}}_i$, $\widetilde{\boldsymbol{C}}_i$, $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{ij}$ 以及常数 ε_i, ε_{ij} 和 $\varepsilon_{ji}(i<j)$ 使(10)式和(11)式同时成立,那么闭环系统(7)是二次保性能稳定的。

$$\boldsymbol{U}_{ii} = \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{U}_1 & \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}} + \widetilde{\boldsymbol{A}}_i & \boldsymbol{X}\boldsymbol{V}_1^{1/2} & \widetilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{V}_2^{1/2} & \boldsymbol{X}\boldsymbol{H}_{ai} + \widetilde{\boldsymbol{B}}_i\boldsymbol{H}_{bi} & \boldsymbol{E}_{ai}^{\mathrm{T}} \\ \Delta\boldsymbol{U}_2 & \boldsymbol{V}_1^{1/2} & 0 & \boldsymbol{H}_{ai} & \boldsymbol{Y}\boldsymbol{E}_{ai}^{\mathrm{T}} + \widetilde{\boldsymbol{C}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{bi}^{\mathrm{T}} & \\ * & * & -\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\boldsymbol{I} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_i^{-1}\boldsymbol{I} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon_i \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

$$\Delta\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{B}}_i^{\mathrm{T}} + \widetilde{\boldsymbol{B}}_i\boldsymbol{C}_i, \Delta\boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{B}_i\widetilde{\boldsymbol{C}}_i + \widetilde{\boldsymbol{C}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{S}_{ij} = \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{S}_1 & \Delta\boldsymbol{S}_2 & \boldsymbol{X}\boldsymbol{H}_{ai} + \widetilde{\boldsymbol{B}}_i\boldsymbol{H}_{bi} & \boldsymbol{E}_{ai}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{X}\boldsymbol{H}_{aj} + \widetilde{\boldsymbol{B}}_i\boldsymbol{H}_{bj} & \boldsymbol{E}_{aj}^{\mathrm{T}} \\ * & \Delta\boldsymbol{S}_3 & \boldsymbol{H}_{ai} & \boldsymbol{Y}\boldsymbol{E}_{ai}^{\mathrm{T}} + \widetilde{\boldsymbol{C}}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{bi}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{H}_{aj} & \boldsymbol{Y}\boldsymbol{E}_{aj}^{\mathrm{T}} + \widetilde{\boldsymbol{C}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{bj}^{\mathrm{T}} \\ * & * & -\varepsilon_{ij}^{-1}\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_{ij} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_{ji}^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon_{ji}\boldsymbol{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

$$\Delta\boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{A}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_j + \boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{B}}_i^{\mathrm{T}} + \widetilde{\boldsymbol{B}}_i\boldsymbol{C}_i + \boldsymbol{C}_j^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{B}}_j^{\mathrm{T}} + \widetilde{\boldsymbol{B}}_j\boldsymbol{C}_j,$$

$$\Delta\boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A}_j^{\mathrm{T}} + \widetilde{\boldsymbol{A}}_{ij}^{\mathrm{T}} + \widetilde{\boldsymbol{A}}_{ji}^{\mathrm{T}},$$

$$\Delta\boldsymbol{S}_3 = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}_j^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A}_j\boldsymbol{Y} + \widetilde{\boldsymbol{C}}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}_i\widetilde{\boldsymbol{C}}_j + \widetilde{\boldsymbol{C}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_j^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}_j\widetilde{\boldsymbol{C}}_i$$

证明 由定义 1 和 T-S 模糊模型的稳定性定义可知,如果存在一个公共的正定矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得(9)式所表示的子系统组成的闭环系统(7)是二次稳定的,即以下不等式成立。

$$\sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))[(\overline{\boldsymbol{A}}_i + \overline{\boldsymbol{H}}_i\boldsymbol{F}_i\overline{\boldsymbol{E}}_i)\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}(\overline{\boldsymbol{A}}_i + \overline{\boldsymbol{H}}_i\boldsymbol{F}_i\overline{\boldsymbol{E}}_i)^{\mathrm{T}} + \overline{\boldsymbol{B}}_i\overline{\boldsymbol{B}}_i^{\mathrm{T}}] < 0, i = 1,2,\cdots,r。$$

将 $\overline{\boldsymbol{A}}_i,\overline{\boldsymbol{B}}_i,\overline{\boldsymbol{E}}_i,\overline{\boldsymbol{H}}_i$ 代入上式,则有:

$$\sum_{i=1}^{r} h_i^2(z(t))[(\hat{\boldsymbol{A}}_{ii} + \overline{\boldsymbol{H}}_i\boldsymbol{F}_i\hat{\boldsymbol{E}}_{ii})\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}(\hat{\boldsymbol{A}}_{ii} + \overline{\boldsymbol{H}}_i\boldsymbol{F}_i\hat{\boldsymbol{E}}_{ii}^{\mathrm{T}} + \overline{\boldsymbol{B}}_i\overline{\boldsymbol{B}}_i^{\mathrm{T}}] + \sum_{i=1}^{r}\sum_{i<j} h_i(z(t))h_i(z(t)) \times$$

$$[(\hat{A}_{ij}+\bar{H}_iF_i\hat{E}_{ij}P+P(\hat{A}_{ij}+\bar{H}_iF_i\hat{E}_{ij})^{\mathrm{T}}+(\hat{A}_{ji}+\bar{H}_jF_j\hat{E}_{ji}P+P(\hat{A}_{ji}+\bar{H}_jF_j\hat{E}_{ji}{}^{\mathrm{T}}]<0 \tag{12}$$

其中：

$$\hat{A}_{ii}=\begin{bmatrix}A_i & B_iC_{ci}\\ B_{ci}C_i & A_{ci}+B_{ci}D_iC_{ci}\end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_{ij}=\begin{bmatrix}A_i & B_iC_{cj}\\ B_{ci}C_i & A_{ci}+B_{ci}D_iC_{cj}\end{bmatrix}$$

$$\hat{E}_{ii}=[E_{ai}\quad E_{bi}C_{ci}]$$

$$\hat{E}_{ij}=[E_{ai}\quad E_{bi}C_{cj}]$$

在(12)式中，将矩阵 P 和它的逆矩阵 P^{-1} 分块，即：

$$P=\begin{bmatrix}Y & N\\ N^{\mathrm{T}} & *\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}X & \mathrm{M}\\ M^{\mathrm{T}} & *\end{bmatrix}$$

其中，$*$ 表示任意矩阵，$X,Y\in R^{n\times n}$是对称矩阵。

由 $PP^{-1}=I$，可得：

$$P\begin{bmatrix}X\\ M^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I\\ 0\end{bmatrix}$$

进一步可得：

$$P\begin{bmatrix}X & I\\ M^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I & Y\\ 0 & N^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

定义 $F_1=\begin{bmatrix}X & I\\ M^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}$，$F_2=\begin{bmatrix}I & Y\\ 0 & N^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$，则 $PF_1=F_2$，对(12)式第一项括号中的式子，应用引理1和引理2进行转化，再对其左右分别乘以矩阵 $diag\{F_1{}^{\mathrm{T}},I,I,I\}$ 和 $diag\{F_1,I,I,I\}$，可得：

$$\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}F_1^{\mathrm{T}}\hat{A}_{ii}PF_1+\\ F_1^{\mathrm{T}}P\hat{A}_{ii}^{\mathrm{T}}F_1\end{pmatrix} & F_1^{\mathrm{T}}\bar{B}_i & F_1^{\mathrm{T}}\bar{H}_{\mathrm{i}} & F_1^{\mathrm{T}}P\hat{E}_{ii}^{\mathrm{T}}\\ * & -I & 0 & 0\\ * & * & -\varepsilon_i^{-1}I & 0\\ * & * & * & -\varepsilon_iI\end{bmatrix}<0$$

进一步的矩阵运算，为：

$$F_1^{\mathrm{T}}P\hat{A}_{ii}^{\mathrm{T}}F_1=(PF_1)^{\mathrm{T}}\hat{A}_{ii}^{\mathrm{T}}F_1=F_2^{\mathrm{T}}\hat{A}_{ii}^{\mathrm{T}}F_1=$$

$$\begin{bmatrix}A_i^{\mathrm{T}}X+C_i^{\mathrm{T}}B_{ci}^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}} & A_i^{\mathrm{T}}\\ \begin{pmatrix}YA_i^{\mathrm{T}}X+NC_{ci}^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}X+\\ YC_i^{\mathrm{T}}B_{ci}^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}+N(A_{ci}^{\mathrm{T}}+\\ C_{ci}^{\mathrm{T}}D_i^{\mathrm{T}}B_{ci}^{\mathrm{T}})M^{\mathrm{T}}\end{pmatrix} & YA_i^{\mathrm{T}}+NC_{ci}^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

令：

$$\tilde{A}_{ii}^{\mathrm{T}}=YA_i^{\mathrm{T}}X+NC_{ci}^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}X+YC_i^{\mathrm{T}}B_{ci}^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}+N(A_{ci}^{\mathrm{T}}+C_{ci}^{\mathrm{T}}D_i^{\mathrm{T}}B_{ci}^{\mathrm{T}})M^{\mathrm{T}}$$

$$\tilde{B}_i=MB_{ci}$$

$$\tilde{C}_i=C_{ci}N^{\mathrm{T}}$$

则有：

$$F_1^{\mathrm{T}}P\hat{A}_{ii}^{\mathrm{T}}F_1=F_2^{\mathrm{T}}\hat{A}_{ii}^{\mathrm{T}}F_1=$$

$$\begin{bmatrix}A_i^{\mathrm{T}}X+C_i^{\mathrm{T}}\tilde{B}_i^{\mathrm{T}} & A_i^{\mathrm{T}}\\ \tilde{A}_{ii}^{\mathrm{T}} & YA_i^{\mathrm{T}}+\tilde{C}_i^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

同样可得：

$$F_1^{\mathrm{T}}\bar{H}_i=\begin{bmatrix}XH_{ai}+\tilde{B}_iH_{bi}\\ H_{ai}\end{bmatrix}$$

$$F_1^{\mathrm{T}}P\hat{E}_{ii}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}E_{ai}^{\mathrm{T}}\\ YE_{ai}^{\mathrm{T}}+\tilde{C}_i^{\mathrm{T}}E_{bi}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

$$F_1^{\mathrm{T}}\bar{B}_i=\begin{bmatrix}\mathrm{X}\mathrm{V}_1^{\frac{1}{2}} & \tilde{B}_i\mathrm{V}_2^{\frac{1}{2}}\\ \mathrm{V}_1^{\frac{1}{2}} & 0\end{bmatrix}$$

于是，可得(10)式。

同理，对(12)式第二项方括号中的式子应用引理1和引理2转化后，再对其左右分别乘以矩阵 $diag\{F_1{}^{\mathrm{T}},I,I,I,I\}$ 和 $diag\{F_1,I,I,I,I\}$，化简可得(11)式。

得到矩阵 X 和 Y 的值后，由于 $MN^{\mathrm{T}}=I\text{-}XY$，可通过矩阵 $I\text{-}XY$ 的奇异值分解来得到满秩矩阵 M 和 N，则控制器参数矩阵为：

$$\begin{aligned}C_{ci}&=\tilde{C}_i(N^{\mathrm{T}})^{-1}\\ B_{ci}&=M^{-1}\tilde{B}_i\\ A_{ci}&=M^{-1}(\tilde{A}_i-XA_iY)(N^{\mathrm{T}})^{-1}-M^{-1}XB_iC_{ci}-\\ &\quad B_{ci}C_iY(N^{\mathrm{T}})^{-1}-B_{ci}D_iC_{ci}\end{aligned} \tag{13}$$

定理得证。

定理2 对不确定连续随机系统(4)和性能指标(2)，如果系统的输出反馈控制器(6)是二次保性能控制器，则存在一个公共的对称正定矩阵 P，使闭环系统(7)二次稳定，则闭环系统性能指标的上界为：

$$J<tr\left(\begin{bmatrix}Q & 0\\ 0 & \sum_{j=1}^{r}h_j^2(z(t))C_{ci}^{\mathrm{T}}RC_{cj}\end{bmatrix}P\right)= \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{r}h_j^2(z(t))tr(\tilde{C}_j^{\mathrm{T}}P\hat{C}_j^{\mathrm{T}})$$

其中, $\widetilde{\boldsymbol{C}}_j = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{R}^{1/2}\boldsymbol{C}_{cj} \end{bmatrix}$, $tr(\cdot)$ 表示求矩阵的迹。

证明 闭环系统(7)中的第 i 个子系统为:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = (\bar{\boldsymbol{A}}_i + \bar{\boldsymbol{B}}_i\boldsymbol{F}_i\bar{\boldsymbol{E}}_i)\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \bar{\boldsymbol{B}}_i\bar{\boldsymbol{w}}(t)$$

假设初始条件 $\bar{\boldsymbol{x}}_0(0)$ 为随机向量,具有方差矩阵 $\boldsymbol{Q}_0 = \boldsymbol{E}\{\bar{\boldsymbol{x}}(0)\bar{\boldsymbol{x}}(0)^{\mathrm{T}}\} \geq 0$ 。在 t 时刻的状态协方差阵为[11]:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{Q}}_{i\Delta}(t,0) &= \boldsymbol{E}\{\bar{\boldsymbol{x}}(t)\tilde{\boldsymbol{x}}(t)^{\mathrm{T}}\} = \\ &\boldsymbol{\Phi}_i(t,0)\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{\Phi}_i(t,0)^{\mathrm{T}} + \\ &\int_0^t \boldsymbol{\Phi}_i(t,\tau)\bar{B}_i\bar{B}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_i(t,\tau)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{15}$$

其中, $\boldsymbol{\Phi}_i(t,\tau)$ 为状态转移矩阵,即 $\boldsymbol{\Phi}_i(t,\tau) = e^{(\bar{A}_i+\bar{H}_iF_i\bar{E}_i)(t-\tau)}$ 。

令 $\boldsymbol{\eta}$ 为任意给定向量,则存在表达式,为:

$$\begin{aligned} &\int_0^t \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_i(t,\tau)\bar{\boldsymbol{B}}_i\bar{\boldsymbol{B}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_i(t,\tau)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}\mathrm{d}\tau = \\ &\int_0^t \boldsymbol{\eta}(\tau)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{B}}_i\bar{\boldsymbol{B}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}(\tau)\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

其中, $\boldsymbol{\eta}(\tau) = \boldsymbol{\Phi}_i(t,\tau)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}$ 为状态方程的解,即:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(\tau) = -(\bar{\boldsymbol{A}}_i + \bar{\boldsymbol{H}}_i\boldsymbol{F}_i\bar{\boldsymbol{E}}_i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}(\tau) \tag{16}$$

易知, $\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\Phi}_i(t,t)\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}$。选取 Lyapunov 函数 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{P}$ 是对称正定矩阵。由(9)式和(16)式得:

$$\boldsymbol{\eta}(\tau)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{B}}_i\bar{\boldsymbol{B}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}(\tau) < \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\eta}(\tau))}{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}$$

对上式两边积分,将(15)式代入可得:

$$\bar{\boldsymbol{Q}}_{i\Delta}(t,0) < \boldsymbol{\Phi}_i(t,0)\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{\Phi}_i(t,0)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{P} \tag{17}$$

由 r 个子系统组成闭环系统(7)的性能指标表达式,即(2)式可表示为:

$$\begin{aligned} J = \lim_{T\to\infty}\sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{E}\Bigg(\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \hat{\boldsymbol{x}}(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \times \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q} & 0 \\ 0 & (\sum_{j=1}^{r} h_j(z(t))\boldsymbol{C}_{cj})^{\mathrm{T}}R(\sum_{j=1}^{r} h_j(z(t))\boldsymbol{C}_{cj}) \end{bmatrix} \times \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \hat{\boldsymbol{x}}(t) \end{bmatrix}\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{18}$$

假设闭环系统(7)是二次稳定的,将(17)式带入(18)式,化简可得定理 2 中的结论。

3 仿真研究

考虑随机倒立摆动力学模型,即:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + \boldsymbol{w}(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \Gamma(\boldsymbol{x}(t))/\Psi(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{w}(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t) + \boldsymbol{w}(t) \\ \dot{x}_4(t) &= a\boldsymbol{u}(t) + \mu\Theta(\boldsymbol{x}(t)) - abx_4(t) + \boldsymbol{w}(t) \\ y(t) &= \boldsymbol{I}[x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t) \quad x_4(t)]^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{v}(t) \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} \Gamma(x(t)) &= g\sin(x_1(t)) - \cos(x_1(t)) \times \\ &a\boldsymbol{u}(t) + \mu x_2^2(t)\sin(x_1(t)) - abx_4(t) \\ \Psi(x(t)) &= \frac{3}{4}l - \mu\cos^2(x_1(t)) \end{aligned}$$

$$\Theta(x(t)) = x_2^2(t)\sin(x_1(t)) - \dot{x}_2(t)\cos(x_1(t))$$

式中, $\boldsymbol{I}$ 为四阶单位矩阵, $x_1(t)$ 为摆杆与竖直方向之间的夹角, $x_2(t)$ 为摆杆旋转的角速度, $x_3(t)$ 是小车偏离平衡位置的距离, $x_4(t)$ 为小车运动的速度。 $\boldsymbol{u}(t)$ 是电机提供的小车沿水平方向的驱动力。 $\boldsymbol{w}(t)$ 、 $\boldsymbol{v}(t)$ 为外界随机干扰,辅助变量 $a = 1/(m+M)$, $\mu = ml/(m+M)$,其他参数物理意义及取值见表 1。

表 1 倒立摆模型参数

Tab. 1 Inverted pendulum model parameters

参数	参数值
摆杆质心距节点的距离/m	0.25
摆杆质量/kg	0.109
小车质量/kg	1.32
小车摩擦力系数/($\mathrm{N \cdot s \cdot m^{-1}}$)	0.1
重力加速度/($\mathrm{m \cdot s^{-2}}$)	9.8

上述随机非线性系统采用 T-S 模糊模型进行局部线性化。以 $x_1(t)$ 的状态作为系统线性化的前提变量,分别在 0°和 ±45°三个工作点处对原系统局部线性化,得到形如(4)式的随机 T-S 模糊模型。其中,在 ±45°工作点线性化的模型参数是一致的,这样原系统就可以用两条 T-S 模糊规则来近似表示,其子系统模型参数为:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 31.1840 & 0 & 0 & 0.2227 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.5947 & 0 & 0 & -0.0741 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.1502 & 0 & 0 & 0.1529 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.0165 & 0 & 0 & -0.7204 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.226\,8 \\ 0 \\ 0.742\,3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.528\,8 \\ 0 \\ 0.740\,4 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}_{a1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{E}_{b1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}_{a2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{E}_{b2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{I}_4, \boldsymbol{H}_{a1} = \boldsymbol{H}_{a2} = 0.01 \times \boldsymbol{I}_4,$$
$$\boldsymbol{H}_{b1} = \boldsymbol{H}_{b2} = diag\{1,1,1,1\}$$

其中,下角标“1”是系统状态 $x_1(t)$ 在0°附近的线性化模型参数,下角标“2”是 $x_1(t)$ 在 ±45°附近的线性化模型参数。

假定系统为高斯噪声,即 $\boldsymbol{w}(t) \sim (0, \boldsymbol{V}_1), \boldsymbol{v}(t) \sim (0, \boldsymbol{V}_2)$。令 $\boldsymbol{V}_1 = \{0.05, 0.1, 0.05, 0.1\}$, $V_2 = 0.01$。性能指标权阵为:$\boldsymbol{Q} = diag\{1, 0.01, 1, 0.01\}$, $\boldsymbol{R} = 0.01$。初始状态 $\boldsymbol{x}(0) = [0.2, 1, -1, -0.2]^{\mathrm{T}}$,应用本研究提出的控制器设计方法,用 LMI 求解(10)和(11)的可行性问题。不同的 ε_i, ε_{ij} 和 ε_{ji} 对应不同的目标函数值。

计算可知,当 $\varepsilon_i = 0.708$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = 1.709$ 时,相应的闭环系统性能指标(2)的最小上界为 $J^* < 4.0548$。此时,对应的对称正定矩阵 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 为:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} -15.477 & -11.269 & -0.046 & -0.203 \\ -11.269 & 0.652 & -0.420 & 4.828 \\ -0.046 & -0.420 & -0.359 & -37.363 \\ -0.203 & 4.828 & -37.363 & 440.662 \end{bmatrix} > 0$$

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} -0.128 & -0.644 & -0.458 & -0.452 \\ -3.222 & -3.474 & 0.038 & 0.234 \\ 0.042 & 0.038 & 0 & -0.071 \\ 0.202 & 0.234 & -0.071 & -0.011 \end{bmatrix} > 0$$

由于 $\boldsymbol{MN}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{XY}$, 故对 $\boldsymbol{I}\text{-}\boldsymbol{XY}$ 进行奇异值分解,可得:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} -0.412 & -0.644 & -0.458 & -0.452 \\ 0.410 & -0.683 & -0.003 & 0.603 \\ -0.800 & 0.041 & 0.096 & 0.592 \\ 0.142 & 0.340 & -0.885 & 0.283 \end{bmatrix}$$

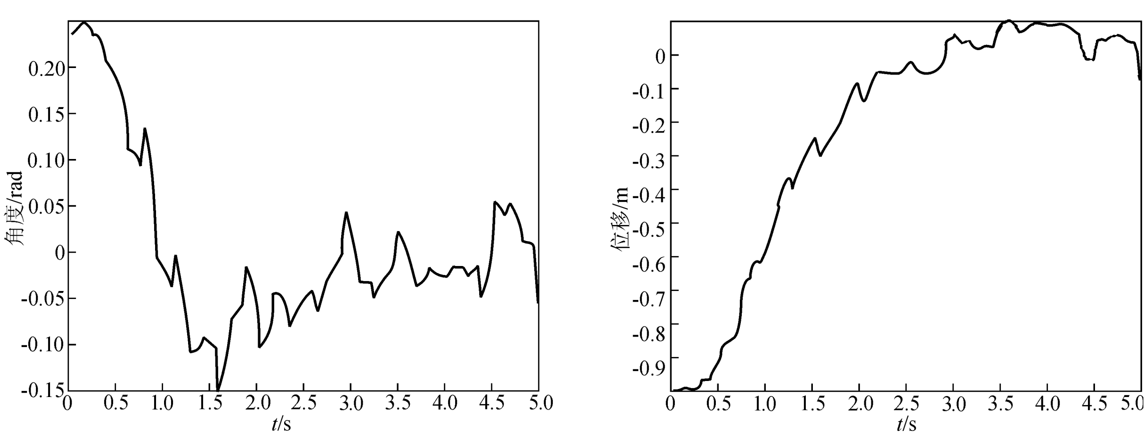
$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 114.851 & 0 \\ 6.652 & 73.316 & 165.867 & -0.510 \\ 7.972 & 13.122 & -39.837 & 11.071 \\ -1.263 & -6.252 & -6.630 & -1.228 \end{bmatrix}$$

将求解出的矩阵 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$、$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{N}$ 和子系统的模型参数矩阵带入式(13),即可得到式(5)表示的子系统输出反馈控制器参数。

将设计出的控制器用于原随机非线性倒立摆模型。选取三角形隶属度函数来构造模糊控制器。系统的主要状态量仿真结果如图1所示。图1中“实线”为系统状态及控制量的实际值,“虚线”为目标值。

为了验证控制器的鲁棒性,改变原系统中参数,使得 $l = 0.5$、$b = 0.2$,仿真结果如图2所示。在原系统上分别对状态向量 $x_1(t)$ 和 $x_3(t)$ 在1.5 s和3.5 s时加入脉冲干扰信号,其仿真结果如图3所示。

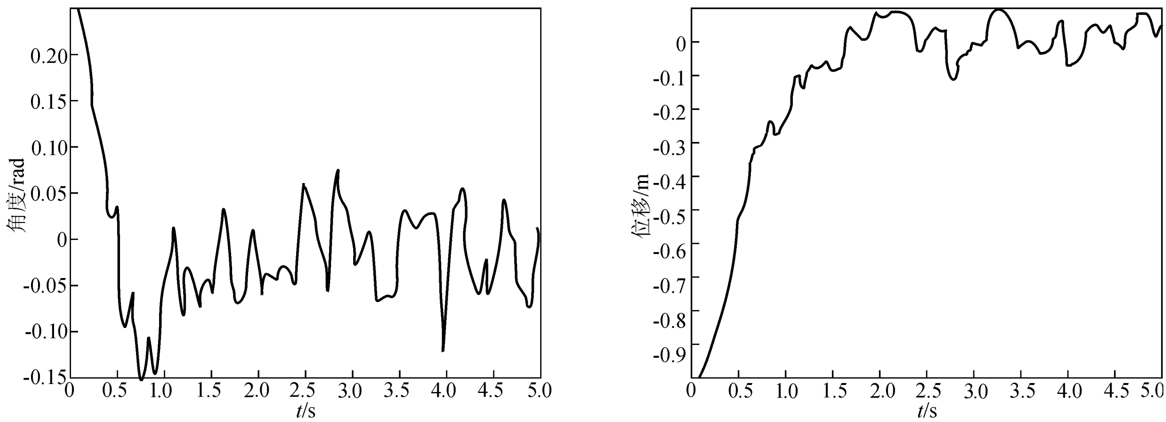
由仿真结果可以看出,本研究所给出的随机模糊控制器设计法,具有较强的鲁棒性,能够使倒立摆系统的状态向量在受到两种不确定干扰的情况下回到平衡位置。



(a) 闭环系统角度响应　　(b) 闭环系统的位移响应

图1　模型参数 $l = 0.25$, $b = 0.1$ 时闭环系统的状态响应

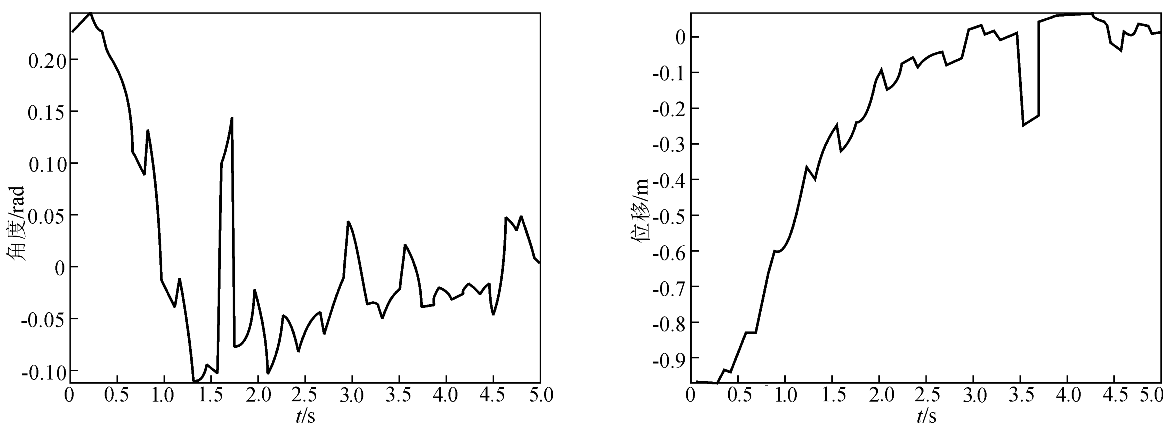
Fig. 1　Closed-loop system state response when the model parameters are $l = 0.25$, $b = 0.1$



(a) 闭环系统角度响应　　(b) 闭环系统的位移响应

图 2　模型参数 $l=0.5$,$b=0.2$ 时闭环系统的状态响应

Fig. 2　Closed-loop system state response when the model parameters are $l=0.5$, $b=0.2$



(a) 闭环系统角度响应　　(b) 闭环系统的位移响应

图 3　施加干扰脉冲时模型参数 $l=0.25$,$b=0.1$ 时闭环系统状态响应

Fig. 3　Simulation results of impuls interference imposed when the model parameters are $l=0.25$, $b=0.1$

4　结　论

1) 通过扩展系统的状态向量,设计出的输出反馈模糊控制器,对系统的控制范围大、鲁棒性强。为解决系统具有双重不确定性控制问题提供了一种有效地控制策略。

2) 系统稳定性是建立在 T-S 模糊模型存在一个公共的正定矩阵,使每个子系统同时稳定的基础上的。有学者提出,局部控制器是根据局部线性模型设计的,将这些局部控制器混合得到的全局控制器能否保证原始非线性系统的稳定性[12-13],仍然缺乏理论性证明,这将是本研究下一步将进行的工作。

参考文献:

[1] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of system and applications to modeling and control[J]. IEEE Transactions on Systems, 1985, 15(1): 116-132.

[2] Chen Zhaona, Liu Bin, Jing Yuanwei. Robust stabilization for T-S fuzzy control systems with parametric uncertainties vua LMI approach;2008 Chinese control and decision conference[C]. Yantai,China,2008: 3398-3402.

[3] Ding Baocang. Quadratic boundedness via dynamic output feedback for constrained nonlinear systems in Takagi-Sugeno's form[J]. Automatica, 2009, 45(9): 2093-2098.

[4] Duan Li, Fucai Qian , Peilin Fu. Variance minimization approach for a class of dual control problems[J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 2002, 47(12): 2010-2020.

[5] Petersen I R. Guaranteed cost LQG control of uncertain linear system[J]. IEEE Proceeding: Control Theory and Applactions, 1995, 142(2): 95-102.

[6] Qian Fucai, Gao Jianjun, Li Duan. Adaptive robust tracking for uncertain system: 49rd IEEE conference on decision and control[C]. Atlanta, Georgia,USA, 2010.

[7] Qian Fucai, Guo Xie, Liu Ding, et al. Nonlinear optimal trade-off control for LQG problem: American control conference [C]. Baltimore, Maryland, USA, 2010, 5: 1931-1936.

[8] Li Duan, Qian Fucai, Gao Jianjun. Performance first control for discrete time LQG problems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2009, 54(9): 2225-2230.

[9] Li Duan, Qian Fucai, Fu Peilin. Optimal nominal dual control for discrete time LQG problem with unknown parameters[J]. Automatica, 2008, 44(1): 119-127.

(责任编辑　李虹燕)