文章编号: 1006-4710(2012)03-0308-03

形如 $a\cdots a0\cdots0$ 的完全方幂

李江华[1]，王睿莉[2]，曲桢[1]，孙晓青[1]

(1. 西安理工大学 理学院，陕西 西安 710048；2. 西安市浐灞第一中学，陕西 西安 710024)

摘要: 设 l 是适合 $l\geq3$ 的正整数，a 是适合 $1\leq a\leq9$ 的正整数，设 $a_k\cdots a_1a_0$ 表示十进制正整数 $a_0+10a_1+\cdots+10^ka_k$，其中 $a_i(i=0,1,\cdots,k)$ 是适合 $0\leq a_i\leq9$ 的整数，运用初等方法证明了当 $l=3$ 时，形如 $a\cdots a0\cdots0$ 的三次方幂仅有 10^{3m} 和 8.10^{3m}；当 $l>3$ 时形如 $a\cdots a0\cdots0$ 的 l 次方幂仅有 10^{lm}，其中 m 是正整数。

关键词: 十进制正整数；完全方幂；指数 Diophantine 方程

中图分类号: O156.7　　　**文献标志码:** A

Perfect Powers of the Form $a\cdots a0\cdots0$

LI Jianghua[1], WANG Ruili[2], QU Zhen[1], SUN Xiaoqing[1]

(1. Faculty of Science, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China; 2. The First Middle School of Chanba, Xi'an 710024, China)

Abstract: Let l be a positive integer with $l\geq3$, and let a be a positive integer with $1\leq a\leq9$. Let $n=a_k\cdots a_1a_0$ denote the decimal positive integer of $n=a_0+10a_1+\cdots+10^ka_k$, where $a_i(i=0,1,\cdots,k)$ are integers with $0\leq a_i\leq9$. In this paper, some elementary methods are used to prove that if $l=3$, then all l-power of the form $n=a\cdots a0\cdots0$ are $n=10^{3m}$ and $n=8.10^{3m}$; if $l>3$, then all l-power of the form $n=a\cdots a0\cdots0$ are $n=10^{lm}$, where m is a positive integer.

Key words: decimal positive integer; perfect power; exponential Diophantine equation

设 $\boldsymbol{Z},\boldsymbol{N}$ 分别表示全体整数和正整数的集合。对于给定的正整数 n，如果它可表成十进制的形式，即：

$$n=a_0+10a_1+\cdots+10^ka_k, k\geq0, 0\leq a_i\leq9, \quad i=0,1,\cdots,k, \tag{1}$$

则记作 $n=a_k\cdots a_1a_0$。长期以来，特殊形状的十进制正整数中的完全方幂是一个引人关注的数论问题[1]。例如，Oblath R[2]，Inkeri K[3]，Bugeaud Y 和 Mignotte M[4] 等人讨论并最终确定了所有形如 $(aa\cdots a)$ 的完全方幂。设 l 是适合 $l\geq3$ 的正整数，a 和 b 是适合 $0\leq a,b\leq9$，$a\neq0$ 且 $a\neq b$ 的整数。最近，Kihel O 和 Luca F[5] 讨论了形如 $(a\cdots ab\cdots b)$ 的 l 次方幂. 他们运用有关指数 Diophantine 方程的深刻结果证明了对于给定的 l，除了 $n=10^{lm}$ 和 8.10^{3m} $(m\in N)$ 以外，仅有有限多个形如 $n=a\cdots ab\cdots b$ 的 l 次方幂。本研究运用初等方法解决了 $b=0$ 时的情况，即证明了：

当 $l=3$ 时，形如 $n=(a\cdots a0\cdots0)$ 的三次方幂仅有 $n=10^{3m}$ 和 8.10^{3m}；

当 $l>3$ 时，形如 $n=(a\cdots a0\cdots0)$ 的 l 次方幂仅有 $n=10^{lm}$，其中 m 是正整数。

1 引理

引理 1 设 k,t 是大于 1 的正整数。当 $gcd(k,t)=1$ 时，存在正整数 d，有：

$$k\mid t^d-1 \tag{2}$$

如果 d_0 是适合(2)的最小正整数，则正整数 d 满足(2)的充要条件是 $d_0\mid d$。

证明过程参见文献[6]的定理 3.7.4。

引理 2 设 m,t 是大于 1 的正整数，又设 $f(t,m)=(t^m-1)/(t-1)$。对于奇素数 p，如果 $p\mid t-1$ 且 p^α

收稿日期: 2012-05-26

基金项目: 陕西省自然科学基金资助项目(2012K06-43)；陕西省教育厅专项基金资助项目(12JK0874)。

作者简介: 李江华(1980-)，女，陕西渭南人，博士，讲师，研究方向为解析数论及其应用。E-mail: Jianghuali@xaut.edu.cn。

$\parallel t-1$，则必有：

① $gct(t-1,f(t,p))=p$；

② $p\parallel f(t,p)$；

③ 如果 $p^{\beta}\parallel f(t,m)$，其中 β 是适合 $\beta\geq\alpha$ 的正整数，则 $m=p^{\beta-\alpha}m_1$，其中 m_1 是适合 $p*m_1$ 的正整数。

证明过程参见文献[7]。

引理 3 方程 $\frac{x^m-1}{X-1}=Y^n,X,Y,m,n\in\boldsymbol{N}$,

$$x>1,m>2,n>1 \tag{3}$$

仅有解 $(X,Y,m,n)=(3,11,5,2),(7,20,4,2)$ 和 $(18,7,3,3)$ 适合 $X\leq10^6$。

证明过程参见文献[8]。

引理 4 方程 $X^m-Y^n=1,X,Y,m,n\in\boldsymbol{N}$,

$$\min\{X,Y,m,n\}>1 \tag{4}$$

仅有解 $(X,Y,m,n)=(3,2,2,3)$。

证明过程参见文献[9]。

2 定理的证明

设 $n=(a\cdots a0\cdots 0)$ 是 l 次方幂，其中 a 和 0 的个数分别是 r 和 $s+1$，此时存在正整数 x，使得：

$$n=10^{s+1}\left(\frac{10^r-1}{10-1}\right)a=x^l \tag{5}$$

首先考虑 $r=1$ 时的情况。从(5)式可得：

$$n=10^{s+1}a=x^l \tag{6}$$

如果 $a=1$，则从(6)式可知 $l|s+1$，故有 $s+1=lm$，其中 m 是正整数。将 $s+1=lm$ 代入(6)式即得 $x=10^m$ 以及：

$$n=10^{lm} \tag{7}$$

如果 $a=2$，则从(6)式有：

$$2^{s+2}\cdot5^{s+1}=x^l \tag{8}$$

从(8)式可得 $l|s+2$ 且 $l|s+1$。然而，由于 $l\geq3$，所以 $l|s+2$ 且 $l|s+1$ 是不可能的。同理可证明，如果 $a\in\{3,4,5,6,7,9\}$，则(6)式不成立。

如果 $a=8$，则从(6)式可知：

$$n=2^{s+4}\cdot5^{s+1}=x^l \tag{9}$$

从(9)可知 $l|s+4$ 且 $l|s+1$，所以 $l=3$，而且 $s+1=3m$，其中 m 是正整数，因此从(9)式可得 $x=2.\,10^m$ 以及：

$$n=8.\,10^{3m} \tag{10}$$

从上述分析可知，当 $r=1$ 时仅当 n 适合(7)式和(10)式时 n 是 l 次方幂。

以下考虑 $r>1$ 时的情况，此时从(5)式可得：

$$10^{s+1}(10^r-1)a=9x^l \tag{11}$$

如果 $a=1$，则因：

$$gcd(10^{s+1},10^r-1)=gcd(10^{s+1},9)=1 \tag{12}$$

所以由(11)式可知：

$$10^{s+1}=f^l,\ 10^r-1=9g^l,\quad x=fg,\ f,\ g\in\boldsymbol{N} \tag{13}$$

从(13)式中第二个等式可得：

$$\frac{10^r-1}{10-1}=g^l \tag{14}$$

显然，当 $r=2$ 时从(14)式得 $11=g^l$，此结果自相矛盾；当 $r>2$ 时，根据引理 3 可知(14)式不成立。

如果 $a=2$，则从(11)式可得：

$$2^{s+2}\cdot5^{s+1}(10^r-1)=9x^l \tag{15}$$

从(15)式可知 $l|s+2$ 且 $l|s+1$。然而，因为 $l\geq3$，故上述结果不成立。

同理可证，如果 $a\in\{4,5,8\}$，则(11)式不成立。

如果 $a=3$，则从(11)式可得：

$$10^{s+1}(10^r-1)=3x^l \tag{16}$$

根据(12)式，从(16)式可知：

$$10^{s+1}=f^l,\ 10^r-1=3g^l,\quad x=fg,\ f,\ g\in\boldsymbol{N} \tag{17}$$

因为 $3^2|10^r-1$，所以从(17)式中第二个等式可知：

设 $3^{\alpha}\parallel g$，则：

$$g=3^{\alpha}h,h\in\boldsymbol{N},3*h \tag{18}$$

将(18)式代入(17)式中第二个等式可得：

$$10^r-1=3^{\alpha l+1}h^l \tag{19}$$

由于 $\alpha l+1\geq4$ 且 $3^2\parallel10-1$，所以根据引理 2 的结论③，从(19)式可知：

$$r=3^{\alpha l-1}t,\ t\in\boldsymbol{N} \tag{20}$$

从(20)式可知 $3|r$，故从(19)可得：

$$10^r-1=(10^{r/3}-1)\left(\frac{(10^{r/3})^3-1}{10^{r/3}}\right)=3^{\alpha l+1}h^l \tag{21}$$

因为从引理 2 的结论①和②分别可知 $gcd(10^{r/3}-1,(10^{r/3})^3-1)/(10^{r/3}-1))=3$ 以及 $3\parallel((10^{r/3})^3-1)/(10^{r/3}-1)$，所以从(21)可得：

$$10^{r/3}-1=3^{\alpha l}k^l,k\in\boldsymbol{N} \tag{22}$$

然而，从(20)式知 $r/3\geq3$，所以根据引理 4 可知(22)式不可能成立。同理可证：如果 $a=6$，则(11)式也不成立。

如果 $a=7$，则从(11)式可得：

$$10^{s+1}(10^r-1)\cdot7=9x^l \tag{23}$$

从(23)式可知 $7|x$。设 $7^{\alpha}\parallel x$ 则有：

$$x=7^{\alpha}y,y\in\boldsymbol{N},7*y \tag{24}$$

将(24)式代入(23)可得：

$$10^{s+1}(10^r-1)=3^2\cdot7^{\alpha l-1}\cdot y^l \tag{25}$$

根据(12)式，从(25)式可知：

$$10^r - 1 = 3^2 \cdot 7^{\alpha l-1} \cdot z^l, z \in \boldsymbol{N} \tag{26}$$

由于适合 $10^d - 1 \equiv 0 (\bmod 7)$ 的最小正整数 d 等于 6,所以根据引理1,从(26)式可知 $6 | r$,因此 r 必为偶数,此时,从(26)式可得:

$$(10^{r/2} + 1)\left(\frac{10^{r-2} - 1}{10 - 1}\right) = 7^{\alpha l-1} z^l \tag{27}$$

当 $4 | r$ 时,$r/2$ 是偶数,由于 $7 * 10^{r/2} + 1$ 且 $gcd(10^{r/2} + 1, (10^{r/2} - 1)/(10 - 1)) = 1$,所以由(27)式可得:

$$\begin{gathered} 10^{r/2} + 1 = f^l, \\ \frac{10^{r-2} - 1}{10 - 1} = 7^{\alpha l-1} g^l, \\ z = fg,\ f,\ g \in \boldsymbol{N} \end{gathered} \tag{28}$$

然而,根据引理4可知(28)式中第一个等式不可能成立。

当 $4 * r$, $r/2$ 是奇数,而且 $(10/7) = (3/7) = -(7/3) = -(1/3) = -1$,其中 $(* / *)$ 是 Legender 符号(参见文献[6]第三章),所以 $7 * 10^{r/2} - 1$,因此由(27)式可得:

$$\begin{gathered} 10^{r/2} + 1 = 7^{\alpha l-1} f^l,\ \frac{10^{r/2} - 1}{10 - 1} = g^l, \\ z = fg,\ f,\ g \in \boldsymbol{N} \end{gathered} \tag{29}$$

但是,根据引理3可知(29)式中第二个等式不可能成立。

如果 $a = 9$,则从(11)式可得:

$$10^{s+1}(10^r - 1) = x^l \tag{30}$$

根据(12)式,从(30)式可知:

$$\begin{gathered} 10^{s+1} = f^l,\ 10^r - 1 = g^l, \\ x = fg,\ f,\ g \in \boldsymbol{N} \end{gathered} \tag{31}$$

然而,因为 $r > l$ 且 $l \geq 3$,所以根据引理4可知(31)式中第二个等式不可能成立。综上所述可知:当 $r > 1$ 时,$n = (a \cdots a0 \cdots a)$ 都不是 l 次方幂,定理证完。

参考文献:

[1] Dickson L E. History of the theory of numbers[M]. Washington: Carnegie institution,1920.

[2] Oblath R. Une propriete des puissances parfaites [J]. Mathesis,1956,65(4):356-364.

[3] Inkeri K. On the diophantine equation $a(x^n - 1)/(x - 1) = y^m$[J]. Acta Arith,1972,21(3):299-311.

[4] Bugeaud Y, Mignotte M. On integers with identical digits [J]. Mathematika,1999,46(4):411-417.

[5] Kihel O, Luca F. Perfect powers with all equal digits but one [J]. Integer,2005,8(5):1-7.

[6] 华罗庚. 数论导引[M]. 北京:科学出版社,1979.

[7] Moller K. Untere schranke fur die anzahl der primzahlen, aus denen x, y, z der fermatschen geichung $x^n + y^n = z^n$ bestehen muss [J]. Mathmatics Nachr, 1955, 14 (1): 25-28.

[8] Bugeaud Y, Hanrot G, Mignotte M. On the diophantine equatiori $n(x^n - l)/(x - l) = y^q$ Ⅲ[J]. Processor London Mathmatics Society(3),2002,84(1):59-78.

[9] Mihailescu P. Primary cyclotomic units and a proof of catalan's conjecture[J]. Reine Angew Mathmatics,2004, 572:167-195.

(责任编辑 李虹燕)