文章编号: 1006-4710(2012)03-0326-04

对弹性力学势能原理等价性提法的商榷

汤安民, 李智慧
(西安理工大学 土木建筑工程学院, 陕西 西安 710048)

摘要: 从热力学第一定律出发可得到功能原理、平衡条件、几何方程。从热力学第二定律出发可得到最小变形能原理、最小势能原理。热力学第一定律和热力学第二定律是两类物理性质不同的弹性变形条件,二者相互独立,前者可确定弹性变形大小,后者可确定弹性变形分布规律。弹性力学中最小势能原理等价于平衡条件、广义势能原理等价于弹性力学基本方程的提法并不正确。

关键词: 弹性变形; 热力学定律; 势能原理; 最小变形能原理

中图分类号: O346.1　　**文献标志码:** A

Discussions on the Equivalence of Potential Energy Principle in Elastic Mechanics

TANG Anmin, LI Zhihui
(Faculty of Civil Engineering and Architecture, Xi' an University of Technology, Xi' an 710048, China)

Abstract: The principle of work and energy, equilibrium conditions and geometric equations can be derived based on the first law of thermodynamics, and minimum deformation principle and principle of minimum potential energy can be derived based on the second law of thermodynamics. These are two elastic deformation conditions with different physical properties, and being independent of each other. The magnitudes of elastic deformation can be determined by the former, and the distributions law can be determined by the latter. The wordings that principle of minimum potential energy is equivalent to equilibrium conditions and generalized principle of potential energy is equivalent to the basic equations of elasticity are not correct.

Key words: elastic deformation; laws of thermodynamics; principle of potential energy; minimum deformation energy principle

弹性力学中材料受力作用产生原子间位置的改变形成弹性变形,研究弹性变形引用的物理量有外力、位移、应力、应变和变形能,在弹性场中它们一一对应。弹性变形场是一保守场,系统能量可以用势能描述。变形过程中,外力在弹性变形上做功其势能减小量,等于材料内弹性势能即变形能的增加量,系统能量守恒。对于受力物体可能存在许多平衡位置,有些是稳定的,有些是不稳定的;拉格朗日指出:如果一个保守系统的势能在平衡位置是严格极小,则该平衡状态稳定。在实际中受力物体一般均处在稳定平衡状态,而非稳定的平衡状态往往并不真实存在。这里有两个不同物理概念,即平衡条件与稳定条件,显然拉格朗日认为,最小势能的存在是稳定平衡状态中的稳定条件[1]。

稳定平衡的弹性变形过程也是一热力学过程。对于弹性变形,其变形大小应符合热力学第一定律,而变形分布则须符合热力学第二定律。热力学第一定律可给出弹性变形过程的平衡条件,热力学第二定律可给出其稳定条件。热力学第一定律、第二定律是相互独立的[2],因此平衡条件与稳定条件也是相互独立的,由平衡条件不能推出稳定条件,由稳定条件也不能推出平衡条件。现有弹性力学理论中,

收稿日期: 2012-03-20
基金项目: 陕西省教育厅自然科学专项基金资助项目(2010JK745)。
作者简介: 汤安民(1957-),男,陕西潼关人,正高级工程师,研究方向为力学实验和断裂理论。
E-mail: tangmin@ xaut. edu. cn。

认为最小势能原理等价于平衡条件，广义势能原理等价于弹性力学全部基本方程[3]。这种认识值得商榷[4-5]，相关数学方程推导过程的正确性也值得推敲。

1 势能原理建立过程中推导上存在的问题

1.1 广义势能原理等价于弹性力学基本方程推导过程存在的问题

具有三类变量的广义势能原理的泛函为：

$$\delta\Pi_3=0$$

$$\Pi_3=\iiint_v\left\{A(e_{ij})-u_i\bar{F}_i-\sigma_{ij}\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]\right\}\mathrm{d}v-\iint_{s_u}\sigma_{ij}n_j(u_i-\bar{u}_i)\mathrm{d}s-\iint_{s_p}u_i\bar{p}_i\mathrm{d}s \tag{1}$$

一般认为弹性力学的基本方程等价于泛函 Π_3 取驻值的条件，常见推导方法如下：

$$\delta\Pi_3=\iiint_v\left\{\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\delta e_{ij}-\bar{F}_i\delta u_i-\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]\delta\sigma_{ij}-\sigma_{ij}(\delta e_{ij}-\delta u_{i,j})\right\}\mathrm{d}v-\iint_{s_u}\left[(u_i-\bar{u}_i)\delta(\sigma_{ij}n_j)+\sigma_{ij}n_j\delta u_i\right]\mathrm{d}s-\iint_{s_p}\bar{p}_i\delta u_i\mathrm{d}s=0 \tag{2}$$

运用高斯公式可得：

$$\iiint_v\sigma_{ij}\delta(u_{i,j})\mathrm{d}v=\iiint_v(\sigma_{ij}\delta u_i)_{,j}\mathrm{d}v-\iiint_v\sigma_{ij,j}\delta u_i\mathrm{d}v=\iint_{s_u}\sigma_{ij}n_j\delta u_i\mathrm{d}s+\iint_{s_p}\sigma_{ij}n_j\delta u_i\mathrm{d}s-\iiint_v\sigma_{ij,j}\delta u_i\mathrm{d}v \tag{3}$$

将式(3) 代入式(2) 得：

$$\delta\Pi_3=\iiint_v\left\{\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}-\sigma_{ij}\right)\delta e_{ij}-(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\delta u_i-\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]\delta\sigma_{ij}\right\}\mathrm{d}v-\iint_{s_u}(u_i-\bar{u}_i)\delta(\sigma_{ij}n_j)\mathrm{d}s+\iint_{s_p}(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)\delta u_i\mathrm{d}s=0 \tag{4}$$

由于 δe_{ij}、δu_i、$\delta\sigma_{ij}$ 在 v 域内、$\delta\sigma_{ij}$ 在 s_u 上和 δu_i 在 s_p 上都是独立并任意的，所以从上式便可得到弹性力学的全部基本方程和边界条件[6]。

对于外力作用下的弹性体，内力是由外力作用引起的弹性体内部间的相互作用，应力是内力集度。外力和由其产生的应力是同一力系，外力不变则应力不变；外力若以某种方式变化，应力也会以该方式作相应变化。同样外部作用以位移叙述时，外边界上的位移与弹性体内的应变也有着一一对应的关系。在以上推导过程中，是将外部作用量如体力、面力、边界位移看作恒定不变，不参与变分，却将相应的内部量如应力、应变、变形能看成变量函数，参与变分。由于使用了这种错误做法，故得出的广义势能原理泛函驻值条件等价于弹性力学基本方程这一结论也是错误的，同时也抹掉了广义势能原理自身独立的物理意义。

1.2 最小势能原理等价于平衡方程推导过程存在的问题

在线弹性力学中，外力以准平衡态逐渐施加在结构上，外力在弹性变形上做的功全部转化为物体内的变形能，即：

$$\int_v\frac{1}{2}f_iu_i\mathrm{d}v+\int_s\frac{1}{2}p_iu_i\mathrm{d}s=\int_v\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}v \tag{5}$$

式(5) 为功能原理。对两边取变分，则式(5) 还可写成：

$$\delta\int_v\frac{1}{2}f_iu_i\mathrm{d}v+\delta\int_s\frac{1}{2}p_iu_i\mathrm{d}s=\delta\int_v\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}v \tag{6}$$

将其推广，外力在可能位移上所做的功，等于与外力对应的应力在与可能位移对应的可能应变上所做的功，即：

$$\int_vf_i\delta u_i\mathrm{d}v+\int_sp_i\delta u_i\mathrm{d}s=\int_v\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\mathrm{d}v \tag{7}$$

式(7) 即虚位移原理。

引入弹性变形能密度 $A(\varepsilon_{ij})=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$，且 $\sigma_{ij}=\partial A(\varepsilon_{ij})/\partial\varepsilon_{ij}$，有：

$$\delta\left(\int_vf_iu_i\mathrm{d}v\right)+\delta\left(\int_sp_iu_i\mathrm{d}s\right)=\delta\left(\int_vA(\varepsilon_{ij})\mathrm{d}v\right)=\delta\left(\int_v\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}v\right) \tag{8}$$

$$\delta\Pi=\delta\left(\int_v\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}v-\int_vf_iu_i\mathrm{d}v-\int_sp_iu_i\mathrm{d}s\right)=0 \tag{9}$$

$$\Pi=\int_vA(\varepsilon_{ij})\mathrm{d}v-\int_vf_iu_i\mathrm{d}v-\int_sp_iu_i\mathrm{d}s \tag{10}$$

以上就是最小势能原理的建立过程[6]。比较(8) 式与(6) 式，两式左边相差一半右边却相同，作为等式不可能两者都正确。(8) 式推导过程存在问题，即将外部作用量体力、面力看作恒定不变，而将应力、变形能看作变量函数。这种情况下，恒定的外力与变化的应力将不再是同一力系的外力、内力，它们在某一变形上做功不再相等，所以(8) 式是错误的，等式两边能量已不再相等，由(7) 式并不能得到(9) 式。平衡方程等价于虚位移原理，但虚位移原理不等价于最小势能原理。

考虑实际情况，外力和对应的应力是同一力系，

外力不变应力也不变,外力若以某种方式改变,应力会以该方式相应地改变。

情形1:外力和相应的应力都恒定不变,在可能变形上做功,(7)式可写成:

$$\delta\left(\int_v f_i u_i \mathrm{d}v\right) + \delta\left(\int_s p_i u_i \mathrm{d}s\right) = \delta\left(\int_v \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}v\right) \quad (11)$$

$$\begin{cases} \delta \Pi_1 = 0 \\ \Pi_1 = \int_v \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}v - \int_v f_i u_i \mathrm{d}v - \int_s p_i u_i \mathrm{d}s \end{cases} \quad (12)$$

情形2:外力和对应的应力分别是位移及对应应变的函数,简单设为线性,则:

$$f_i = a u_i$$
$$p_i = b u_i$$
$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

则(7)式又可写为:

$$\int_v a u_i \delta u_i \mathrm{d}v + \int_s b u_i \delta u_i \mathrm{d}s = \int_v C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\delta\varepsilon_{ij}\mathrm{d}v \quad (13)$$

$$\delta\left(\frac{1}{2}\int_v a u_i^2 \mathrm{d}v\right) + \delta\left(\frac{1}{2}\int_s b u_i^2 \mathrm{d}s\right) = \delta\left(\frac{1}{2}\int_v C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}v\right) \quad (14)$$

$$\delta\left(\frac{1}{2}\int_v f_i u_i \mathrm{d}v\right) + \delta\left(\frac{1}{2}\int_s p_i u_i \mathrm{d}s\right) = \delta\left(\frac{1}{2}\int_v \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}v\right) \quad (15)$$

$$\begin{cases} \delta \Pi_2 = 0 \\ \Pi_2 = \int_v \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}v - \int_v \frac{1}{2}f_i u_i \mathrm{d}v - \int_s \frac{1}{2}p_i u_i \mathrm{d}s \end{cases} \quad (16)$$

从虚位移原理出发,外力在可能位移上所做的功等于其应力在相应可能应变上所做的功,即外力势能的减小量,等于弹性体变形能的增加量,弹性系统总势能保持不变。(12)、(16)式的势能表达仅反映着变形能的增加等于外力势能减小的能量守恒关系。由于虚位移原理的实质是能量守恒,系统总势能无论对可能变形、真实变形都不发生变化,也就推导不出最小势能原理,最小势能原理等价于平衡条件的说法也就没有根据。

2 热力学第二定律与弹性变形能极值原理

材料受载荷作用发生弹性变形,由热力学第一定律,结构单位体积中变形能的增加δU应当等于外界给定的热能δQ与外力对它所做功δA之和[2-3],即:

$$\delta U = \delta Q + \delta A = \delta Q + T:\delta\Gamma \quad (17)$$

仅考虑静载等温的弹性变形过程,$\delta Q = 0$。得到:变形能等于外力在弹性变形上做的功,即弹性变形过程系统能量守恒,总势能不变。

当结构从一个平衡状态经缓慢加载到达一个新的平衡状态时,由热力学第二定律,加载过程应满足Clausius不等式:

$$\delta U - \theta\delta S - T:\delta\Gamma \geqslant 0 \quad (18)$$

把变形能看作应变ε_{ij}和熵的函数,将δU按Talor级数展开:

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial S}\delta S + \sum_{i,j}\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}\delta S^2 + \sum_{i,j}\frac{\partial^2 U}{\partial\varepsilon_{ij}\partial S}\delta\varepsilon_{ij}\delta S + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l}\frac{\partial^2 U}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{kl} \quad (19)$$

(18)式成为:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S} - \theta\right)\delta S + \left(\frac{\partial U}{\partial\varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij}\right)\delta\varepsilon_{ij} + \delta^2 U + \cdots \geqslant 0 \quad (20)$$

为使不等式成立,应有:

$$\begin{cases} \theta = \dfrac{\partial U}{\partial S} \\ \sigma_{ij} = \dfrac{\partial U}{\partial\varepsilon_{ij}} \\ \delta^2 U \geqslant 0 \end{cases} \quad (21)$$

$$\delta^2 U = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}\delta S^2 + \sum_{i,j}\frac{\partial^2 U}{\partial\varepsilon_{ij}\partial S}\delta\varepsilon_{ij}\delta S + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l}\frac{\partial^2 U}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{kl} \geqslant 0 \quad (22)$$

式(22)给出平衡状态下变形能是正定的并取最小值[3]。式(17)表达的系统总势能不变和式(22)指出的系统中变形能取最小值,是稳定平衡弹性变形过程的平衡条件和稳定条件。

结构在准静载作用下,发生稳定平衡的弹性变形过程是一个热力学过程,可以用应力场、应变场、变形能场等物理量描述弹性变形的大小和分布。弹性变形的大小将遵循热力学第一定律,用变形能描述结构上弹性变形大小时,结构中变形能大小等于外力在弹性变形上所做功,即功能原理;用应力场描述弹性变形大小时,应力与外力大小要满足平衡方程,即平衡条件;用应变场描述弹性变形大小时,应变与位移大小要满足几何方程,即几何条件;功能原理、平衡条件、几何条件物理意义本质相同,均反映内部量与外部量的平衡关系,属热力学第一定律对确定弹性变形大小给出的条件。

弹性变形的分布遵循热力学第二定律,即满足热力学第一定律所有可能的弹性变形分布中,变形能取最小值的是真实的弹性变形分布。对线弹性体受力结构,取变形前位置为势能零点,结构上总势能为变形能与外力势能之和,按现有外力势能的计算

方法，则总势能数值上等于变形能，真实弹性变形分布其变形能取最小值，就可得到系统势能取最小值。

3 讨 论

1）对于稳定平衡的弹性变形体，其上弹性变形大小和弹性变形分布规律是需要求解的。前者遵循热力学第一定律，后者遵循热力学第二定律。现有理论中，将最小势能原理等价于平衡方程，导致在理论上缺少了对弹性变形分布规律的把握和理解。在材料力学中，靠实验观察提出平面假设，给出变形分布。在弹性力学中，通过逆解法，先给出应力函数或位移函数，其实质也是先给出了变形分布。明确认识最小势能原理、最小变形能原理是不同于功能原理、平衡条件、几何方程物理性质的另一类弹性变形基本条件，可把握弹性变形分布规律[4-5]，进而完善弹性力学基本理论。

2）变形协调方程一直被用来确定变形分布规律，它是由几何方程通过求导叠加组建起来的，完善性至今尚未被完全证明[3]。从物理性质上分析，完善的变形协调方程不应出自热力学第一定律范畴，而应由热力学第二定律来确定，弹性体变形协调的本质是变形能取极小值，相关内容有待进一步讨论。

4 结 论

最小势能原理不等价于平衡条件，广义势能原理也不等价于弹性力学基本方程。

从热力学第一定律出发可得到功能原理、平衡条件、几何方程。从热力学第二定律可得到最小变形能原理、最小势能原理。热力学第一定律和热力学第二定律是两类物理性质不同的弹性变形条件，前者可确定弹性变形大小，后者可确定弹性变形分布规律。

参考文献：

[1] 费志中. 弹性稳定[M]. 北京：煤炭工业出版社，1987.

[2] 范宏昌. 热学[M]. 北京：科学出版社，2003.

[3] 王敏中，王炜，武际可. 弹性力学教程[M]. 北京：北京大学出版社，2002.

[4] 汤安民，李智慧，莫宵依. 用能量原理推导园轴扭转弹性变形与应力分布[J]. 西安理工大学学报，2010，26(4)：403-406.
Tang Anmin, Li Zhihui, Mo Xiaoyi. The elastic deformation and stress distribution of circular shaft torsion derived from energy principle [J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2010, 26(4): 403-406.

[5] 汤安民，许明达，赵蕾. 自由变形结构弹塑性分析的新方法[J]. 广西大学学报：自然科学版，2009，34(1)：36-39.
Tang Anmin, Xu Mingda, Zhaolei. New method for elasto-plastic analysis of free-form deformation structure [J]. Journal of Guangxi University (Natural Science Edition), 2009, 34(1): 36-39.

[6] 鹫津久一郎[日]. 弹性和塑性力学中的变分法[M]. 北京：科学出版社，1984：1012-1022.

[7] 王龙甫. 弹性理论[M]. 北京：科学出版社，1979.

（责任编辑 王卫勋）