

文章编号: 1006-4710(2013)01-0109-05

# 基于循环迭代的分形插值函数的构造及其盒维数

朱晴, 冯志刚

(江苏大学 理学院, 江苏 镇江 212013)

**摘要:** 为了更加精确地拟合复杂的非光滑曲线, 采用了在原有分形插值函数的基础上构造一类更加复杂的分形函数的方法, 笔者称这样的分形函数为基于循环迭代的分形插值函数, 并对这类分形插值函数的构造方法及其计盒维数的计算进行了研究, 给出了其维数定理。

**关键词:** 分形插值函数; 循环迭代; 计盒维数

**中图分类号:** O184

**文献标志码:** A

## Construction and Dimension of Fractal Interpolation Function Based on the Cyclical Iterance

ZHU Qing, FENG Zhigang

(Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

**Abstract:** In order to further fit the complex nonsmooth curves, a more complex fractal function is constructed on the basis of the original fractal interpolation functions. The authors call them as such factional interpolation functions based on the cyclical iterance and carry out the study of the construction method of these fractal functions and the calculation of box dimension and present the dimension law in this paper.

**Key words:** fractal interpolation function; cyclical iterance; box dimension

1986 年, Barnsley<sup>[1]</sup> 运用迭代函数系的理论引出了分形插值函数 (FIF) 的概念, 这是一种新的插值方法, 特别在非光滑曲线的拟合中显示了其独特的优越性。此后, 越来越多的文章给出了分形插值函数的连续性、盒维数、积分性、光滑性以及 FIF 的应用等内容<sup>[2-4]</sup>, 还有的是研究了分形与小波之间的关系<sup>[5]</sup> 等等。

分形维数是表征自相似系统和结构的定量性质。分形图形虽然一般都比较复杂, 但是其复杂程度基本可用非整数维数去量化, 因此维数的研究在分形学习中有着重要的地位<sup>[6-7]</sup>。而对于本文引入的基于分形插值函数的更为复杂的基于循环迭代的分形插值函数, 它可以对自然界的那些粗糙的、不规则的自然现象及自然规律等作出较分形插值函数更加精确的刻画和模拟, 因此对其维数的研究就显得更为重要。我们也可以将后者看做是超分形插值函数<sup>[8]</sup> 的一种特殊情况, 目前有文章对超分

形插值函数的各项性质 (连续性、积分性和光滑性等) 进行了研究<sup>[1,8]</sup>。但是对于超分形插值函数的盒维数的研究并不是很深入。而本篇论文提出了基于循环迭代的分形插值函数的概念, 并讨论了其盒维数的计算方法。

### 1 基于循环迭代的分形插值函数的构造

假设:  $S_0 = \{(x_i, y_i) \in \mathbf{R}^2; i = 0, 1, 2, \dots, N\}$  是给定的平面点集, 定义映射:

$$\omega_{n,k}: I \times \mathbf{R} \rightarrow I \times \mathbf{R}$$

$$(k = 1, 2, \dots, M, M > 1, n = 1, 2, \dots, N)$$

$$\omega_{n,k}(x, y) = (L_n(x), G_{n,k}(x, y))$$

其中  $I \in [a, b], a, b \in \mathbf{R}$  且:

$$\begin{cases} L_n(x) = a_n x + b_n \\ G_{n,k}(x, y) = e_{n,k} x + \gamma_{n,k} y + f_{n,k} \end{cases} \quad 0 \leq \gamma_{n,k} < 1$$

并且满足连续性条件:

$$G_{n,k}(x_0, y_0) = y_{n-1}$$

收稿日期: 2012-11-02

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51079064)。

作者简介: 朱晴, 女, 硕士生。E-mail: zhuqing0511@126.com。

冯志刚, 男, 教授, 硕士生导师, 主要研究方向为分形几何理论。E-mail: zgfgf@ujs.edu.cn。

$$G_{n,k}(x_N, y_N) = y_n$$

即:

$$\omega_{n+1,k}(x_0, y_0) = \omega_{n,k}(x_N, y_N)$$

从而对于每个  $k \in \{1, 2, \dots, M\}$ , 式(1)所示表达式都是对应于  $S_0 = \{(x_i, y_i) \in \mathbf{R}^2; i = 0, 1, 2, \dots, N\}$  的迭代函数系。

$$\{\mathbf{R}^2; \omega_{n,k}: n = 1, 2, \dots, N\} \quad (1)$$

所以对于  $\forall k \in \{1, 2, \dots, M\}$  可以构造映射:

$$\{W_k: H(\mathbf{R}^2) \rightarrow H(\mathbf{R}^2), k = 1, 2, \dots, M\}$$

其中  $H(\mathbf{R}^2)$  是由  $\mathbf{R}^2$  中所有有界闭集组成的集合类, 对于  $\forall G \in H(\mathbf{R}^2)$ , 定义:

$$\begin{cases} W_k(G) = \bigcup_{n=1}^N \omega_{n,k}(G) \\ \omega_{n,k}(G) = \omega_{n,k}(x, y), \forall (x, y) \in G \end{cases} \quad (2)$$

令  $\Lambda$  是定义在序列  $1, 2, \dots, M$  上的码空间, 即:

$$\Lambda = \{\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k \dots, \sigma_i = 1, 2, \dots, M, i = 1, 2, \dots, k\}$$

现在取  $\sigma$  为循环码, 即在  $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k \dots$  中有:

$$\sigma_{jM+h} = h, j = 0, 1, 2, \dots; h = 1, 2, \dots, M$$

令:

$$W_\sigma = W_{\sigma_1} \circ W_{\sigma_2} \circ \dots \circ W_{\sigma_k} \circ \dots \quad (3)$$

式中  $W_\sigma$  为循环复合, 且:

$$W_\sigma^k = W_{\sigma_1} \circ W_{\sigma_2} \circ \dots \circ W_{\sigma_k}$$

再令:

$$W = W_{\sigma_{jM+1}} \circ W_{\sigma_{jM+2}} \circ \dots \circ W_{\sigma_{(j+1)M}}$$

下面讨论  $W$  的一般形式。

如上述, 当  $\sigma(\sigma \in \Lambda)$  为循环码时, 为了便于书写, 笔者简单地设  $j = 0$ , 即:

$$\sigma = \overline{12 \dots M}$$

$$W = W_1 \circ W_2 \circ \dots \circ W_M$$

其中  $W_k (k = 1, 2, \dots, M)$  可通过试(1)、(2)计算。

因此, 当  $k = 1, 2, \dots, M; n = 0, 1, 2, \dots, N$  时, 由式(2)可得:

$$\begin{aligned} W &= W_1 \circ W_2 \circ \dots \circ W_M = \\ &\bigcup_{n_1=1}^N \bigcup_{n_2=1}^N \dots \bigcup_{n_M=1}^N \omega_{n_1,1} \circ \omega_{n_2,2} \circ \dots \circ \omega_{n_M,M}(G) = \\ &\bigcup_{n_1=1}^N \bigcup_{n_2=1}^N \dots \bigcup_{n_M=1}^N W_{n_1 n_2 \dots n_M}(G) \end{aligned} \quad (4)$$

式中:

$$W_{n_1 n_2 \dots n_M}(G) = \omega_{n_1,1} \circ \omega_{n_2,2} \circ \dots \circ \omega_{n_M,M}(G)$$

则式(3)可以写为:

$$W_\sigma = \underbrace{W \circ W \circ \dots \circ W}_{m \uparrow} \circ W_{\sigma_{jM+1}} \circ W_{\sigma_{jM+2}} \circ \dots \circ W_{\sigma_{jM+h}}$$

令:

$$\begin{aligned} A_h &= W_{\sigma_{jM+1}} \circ W_{\sigma_{jM+2}} \circ \dots \circ W_{\sigma_{jM+h}} \\ (h &= 1, 2, \dots, M-1) \end{aligned}$$

则式(3)可以写成:

$$W_\sigma = \underbrace{W \circ W \circ \dots \circ W}_{m \uparrow} \circ A_h = W^m \circ A_h$$

由式(4)可得:

$$\{W_{n_1 n_2 \dots n_M}(x, y), n_1, n_2, \dots, n_M = 1, 2, \dots, N\} \quad (5)$$

即  $W$  是式(5)引出的变换。

**定理 1** 存在  $I \in [a, b], a, b \in \mathbf{R}$  上的连续函数  $g_\sigma (\sigma = \overline{12 \dots M})$ , 使得  $g_\sigma$  的图像  $G_\sigma = \text{Graph}(g_\sigma) = \{(x, g_\sigma(x)) | x \in I\}$  是迭代函数系(5)的不变集, 即:

$$G_\sigma = \bigcup_{n_1=1}^N \bigcup_{n_2=1}^N \dots \bigcup_{n_M=1}^N W_{n_1 n_2 \dots n_M}(G_\sigma)$$

并且  $g_\sigma(x_i) = y_i, i = 1, 2, \dots, N$ , 则称这样的  $g_\sigma$  为对应于迭代函数系(5)的基于(1)的循环迭代的分形插值函数。

**证明:** 因为  $\omega_{n,k} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ e_{n,k} & \gamma_{n,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  是一个仿

射变换, 且又有  $0 < a_n < 1, 0 \leq \gamma_{n,k} < 1$ , 因此  $\omega_{n,k}$  在某度量  $d$  下是压缩变换 ( $k = 1, 2, \dots, M$ )。

设  $\omega_{n,k} (n = 1, 2, \dots, N)$  是完备度量空间  $(\mathbf{R}^2, d)$  上的一族压缩映射, 压缩因子  $0 \leq s_n < 1, n = 1, 2, \dots, N$ 。由(2)的构造  $W_k: H(\mathbf{R}^2) \rightarrow H(\mathbf{R}^2)$ :

$$W_k(G) = \bigcup_{n=1}^N \omega_{n,k}(G), \forall G \in H(\mathbf{R}^2)$$

由文献[2]可知  $W_k$  是  $(H(\mathbf{R}^2), h)$  上的压缩映射, 压缩因子  $s = \max_{1 \leq n \leq N} s_n < 1$ , 使得:

$$h(W_k(A), W_k(B)) \leq sh(A, B), \forall A, B \in H(\mathbf{R}^2)$$

又因为 Hutchinson 算子  $W_k$  是完备度量空间  $(H(\mathbf{R}^2), h)$  上的压缩映射, 因此(3)也为压缩映射, 进而迭代函数系(5)为双曲迭代函数系, 则存在唯一的吸引子  $A$ , 此吸引子  $A$  即为上述分形插值函数  $g_\sigma (\sigma = \overline{12 \dots M})$ 。

令:

$$W_{n_1 n_2 \dots n_M}(x, y) = \omega_{n_1,1} \circ \omega_{n_2,2} \circ \dots \circ \omega_{n_M,M}(x, y) = \begin{pmatrix} K_{n_1 n_2 \dots n_M}(x) \\ E_{n_1 n_2 \dots n_M}(x, y) \end{pmatrix}$$

其中  $n_1, n_2, \dots, n_M = 1, 2, \dots, N$ , 且  $K_{n_1 n_2 \dots n_M}(x)$  和  $E_{n_1 n_2 \dots n_M}(x, y)$  的计算可参照下面给出的例子的计算方法。笔者写成:

$$\begin{cases} K_{n_1 n_2 \cdots n_M}(x) = a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_M} x + A_{n_1 n_2 \cdots n_M} \\ E_{n_1 n_2 \cdots n_M}(x, y) = B_{n_1 n_2 \cdots n_M} x + \gamma_{n_1} \gamma_{n_2} \cdots \gamma_{n_M} y + C_{n_1 n_2 \cdots n_M} \end{cases}$$

其中记  $a_{n_1 n_2 \cdots n_M} = a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_M}$  为迭代函数系(5)的横向压缩因子,  $\Gamma_{n_1 n_2 \cdots n_M} = \gamma_{n_1} \gamma_{n_2} \cdots \gamma_{n_M}$  为迭代函数系(5)的纵向压缩因子。

由于  $0 \leq \gamma_{n_1}, \gamma_{n_2}, \cdots, \gamma_{n_M} < 1$ , 因此  $0 \leq \gamma_{n_1} \gamma_{n_2} \cdots \gamma_{n_M} < 1$ , 即  $0 \leq \Gamma_{n_1 n_2 \cdots n_M} < 1$

因而, 对某个  $0 \leq \Gamma_{n_1 n_2 \cdots n_M} < 1$  有:

$$\begin{aligned} & |E_{n_1 n_2 \cdots n_M}(u, v_1) - E_{n_1 n_2 \cdots n_M}(u, v_2)| \leq \\ & \Gamma_{n_1 n_2 \cdots n_M} |v_1 - v_2|, (u \in I, v_1, v_2 \in \mathbf{R}) \end{aligned} \quad (6)$$

用  $C(I)$  表示  $I$  上的所有连续函数所组成的集合, 任取  $h \in C(I)$ ,  $|h|_\infty = \max\{|h(x)| \mid x \in I\}$  表示  $h$  的范数, 则  $(C(I); |\cdot|_\infty)$  构成一个完备的度量空间。

令  $C_0(I) = \{h \in C(I) \mid h(x_0) = y_0, h(x_N) = y_N\}$ , 显然  $C_0(I)$  是  $C(I)$  的一个闭子空间, 从而,  $(C_0(I); |\cdot|_\infty)$  也是完备的度量空间。定义  $C_0(I)$  到  $C_0(I)$  的映射  $T$ :

$$(Th)(x) = E_{n_1 n_2 \cdots n_M}(K_{n_1 n_2 \cdots n_M}^{-1}(x), h(K_{n_1 n_2 \cdots n_M}^{-1}(x)))$$

$x \in I_{n_1 n_2 \cdots n_M}$

记:

$$\Gamma = \max_{1 \leq n_1, n_2, \cdots, n_M \leq N} \{\Gamma_{n_1 n_2 \cdots n_M}\}, \forall h_1, h_2 \in C_0(I)$$

由式(6)可得:

$$\|Th_1 - Th_2\|_\infty =$$

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq n_1, n_2, \cdots, n_M \leq N} \left\{ |E_{n_1 n_2 \cdots n_M}(K_{n_1 n_2 \cdots n_M}^{-1}(x), h_1(K_{n_1 n_2 \cdots n_M}^{-1}(x))) - \right. \\ & E_{n_1 n_2 \cdots n_M}(K_{n_1 n_2 \cdots n_M}^{-1}(x), h_2(K_{n_1 n_2 \cdots n_M}^{-1}(x)))| \mid x \in \\ & I_{n_1 n_2 \cdots n_M} \} \leq \max_{1 \leq n_1, n_2, \cdots, n_M \leq N} \left\{ \Gamma_{n_1 n_2 \cdots n_M} |h_1(K_{n_1 n_2 \cdots n_M}^{-1}(x)) - \right. \end{aligned}$$

$$\left. h_2(K_{n_1 n_2 \cdots n_M}^{-1}(x))\right| \mid x \in I_{n_1 n_2 \cdots n_M} \} \leq \Gamma \|h_1 - h_2\|_\infty$$

因此, 映射  $T$  为  $(C_0(I); |\cdot|_\infty)$  上的压缩映射, 由 Banach 不动点原理, 存在唯一的连续函数  $g_\sigma \in C_0(I)$  满足  $Tg_\sigma = g_\sigma$ ,  $\sigma = 12 \cdots M$ , 即:

$$E_{n_1 n_2 \cdots n_M}(K_{n_1 n_2 \cdots n_M}^{-1}(x), g_\sigma(K_{n_1 n_2 \cdots n_M}^{-1}(x))) = g_\sigma$$

$$x \in I_{n_1 n_2 \cdots n_M}$$

现令  $G_\sigma = \text{Graph}(g_\sigma) = \{(x, g_\sigma(x)) \mid x \in I\}$  表示  $g_\sigma$  的图像。

$$\bigcup_{n_1=1}^N \bigcup_{n_2=1}^N \cdots \bigcup_{n_M=1}^N W_{n_1 n_2 \cdots n_M}(G_\sigma) =$$

$$\bigcup_{n_1=1}^N \bigcup_{n_2=1}^N \cdots \bigcup_{n_M=1}^N \{(K_{n_1 n_2 \cdots n_M}^{-1}(x),$$

$$E_{n_1 n_2 \cdots n_M}(x, g_\sigma(x))) \mid x \in I\} =$$

$$\bigcup_{n_1=1}^N \bigcup_{n_2=1}^N \cdots \bigcup_{n_M=1}^N \{(x, E_{n_1 n_2 \cdots n_M}(K_{n_1 n_2 \cdots n_M}^{-1}(x),$$

$$g_\sigma(K_{n_1 n_2 \cdots n_M}^{-1}(x))) \mid x \in I_{n_1 n_2 \cdots n_M}\} =$$

$$\bigcup_{n_1=1}^N \bigcup_{n_2=1}^N \cdots \bigcup_{n_M=1}^N \{(x, g_\sigma(x)) \mid x \in I_{n_1 n_2 \cdots n_M}\} = G_\sigma$$

因此,  $G_\sigma$  是迭代函数系(5)的不变集。

由  $g_\sigma \in C_0(I)$  可知  $g_\sigma(x_0) = y_0$  且  $g_\sigma(x_N) = y_N$ 。当  $i = \{1, 2, \cdots, N^M - 1\}$  时,  $g_\sigma(x_i) = E_i(K_i^{-1}(x_i), g_\sigma(K_i^{-1}(x_i))) = E_i(x_N, g_\sigma(x_N)) = E_i(x_N, y_N) = y_i$

## 2 基于循环迭代的分形插值函数的维数

**定理 2** 令  $g_\sigma$  是由迭代函数系(5)确定的基于循环迭代的分形插值函数, 且  $G_\sigma = \text{Graph}(g_\sigma)$ , 记  $s = \dim_B(G_\sigma)$ , 如果:

$$\sum_{n_1, n_2, \cdots, n_M=1, 2, \cdots, N} |\gamma_{n_1, 1} \gamma_{n_2, 2} \cdots \gamma_{n_M, M}| > 1$$

并且:  $\{(x_i, y_i) \mid i = 0, 1, 2, \cdots, N\}$  不共线, 那么  $\dim_B(G_\sigma)$  就是满足式(7)的唯一解, 否则  $\dim_B(G_\sigma) = 1$ 。

$$\sum_{n_1, n_2, \cdots, n_M=1, 2, \cdots, N} |\gamma_{n_1, 1} \gamma_{n_2, 2} \cdots \gamma_{n_M, M}| \cdot (a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_M})^{s-1} = 1 \quad (7)$$

**证明:** 通过观察式(4), 混合分形插值函数的迭代函数系(5)各有  $N^M$  个横向压缩因子和纵向压缩因子, 记为:  $a_{n_1 n_2 \cdots n_M}, \Gamma_{n_1 n_2 \cdots n_M}$ 。并且:

$$a_{n_1 n_2 \cdots n_M} = a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_M}$$

$$\Gamma_{n_1 n_2 \cdots n_M} = \gamma_{n_1, 1} \gamma_{n_2, 2} \cdots \gamma_{n_M, M}$$

式中  $n_1, n_2, \cdots, n_M = 1, 2, \cdots, N$ ,  $a_i$  为(1)中  $\omega_{i, 1}, \omega_{i, 2}, \cdots, \omega_{i, M}$  的横向压缩因子,  $\gamma_{i, 1}, \gamma_{i, 2}, \cdots, \gamma_{i, M}$  为  $\omega_{i, 1}, \omega_{i, 2}, \cdots, \omega_{i, M}$  的纵向压缩因子,  $i = n_1, n_2, \cdots, n_M$ 。

由分形插值函数的维数定理可得, 维数  $s$  可由

$$\sum_{n_1, n_2, \cdots, n_M=1, 2, \cdots, N} |\Gamma_{n_1 n_2 \cdots n_M}| \cdot (a_{n_1 n_2 \cdots n_M})^{s-1} = 1$$

来确定, 因此容易得到此定理成立。

下面举一个简单例子来说明此类分形插值函数盒维数的计算方法。

例: 令  $I = [0, 1]$  且  $N = 3$ ,  $S_0 = \{(0, 0), (\frac{1}{3}, 1), (\frac{2}{3}, 1), (1, 0)\}$  为给定的一组平面点集, 在构造基于循环迭代的分形插值函数的过程中, 令  $\sigma = 12$ , 则对应的迭代函数系为:

$$\{W_{n_1 n_2}(x, y), n_1, n_2 = 1, 2, 3\}$$

即:

$$W_{11}(x, y) = \omega_{1, 1} \circ \omega_{1, 2}$$

$$W_{12}(x, y) = \omega_{1, 1} \circ \omega_{2, 2}$$

$$W_{13}(x, y) = \omega_{1,1} \circ \omega_{3,2}$$

$$W_{21}(x, y) = \omega_{2,1} \circ \omega_{1,2}$$

$$W_{22}(x, y) = \omega_{2,1} \circ \omega_{2,2}$$

$$W_{23}(x, y) = \omega_{2,1} \circ \omega_{3,2}$$

$$W_{31}(x, y) = \omega_{3,1} \circ \omega_{1,2}$$

$$W_{32}(x, y) = \omega_{3,1} \circ \omega_{2,2}$$

$$W_{33}(x, y) = \omega_{3,1} \circ \omega_{3,2}$$

其中  $\omega_{n,k}$  由(1)式确定,计算方法如下:

$$W_{11}(x, y) = \omega_{1,1} \circ \omega_{1,2}(x, y) =$$

$$\omega_{1,1}(L_1(x), G_{1,2}(x, y)) =$$

$$\begin{pmatrix} a_1(L_1(x)) + b_1 \\ e_{1,1}(L_1(x)) + \gamma_{1,1}(G_{1,2}(x, y)) + f_{1,1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1^2 x + (a_1 b_1 + b_1) \\ (a_1 e_{1,1} + e_{1,2} \gamma_{1,1})x + \gamma_{1,1} \gamma_{1,2} y + (b_1 e_{1,1} + \gamma_{1,1} f_{1,2} + f_{1,1}) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1^2 & 0 \\ a_1 e_{1,1} + e_{1,2} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,1} \gamma_{1,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} a_1 b_1 + b_1 \\ b_1 e_{1,1} + \gamma_{1,1} f_{1,2} + f_{1,1} \end{pmatrix}$$

其余八个可由类似方法计算得到。并且给定

$$\gamma_{n,1} = 0.5, \gamma_{n,2} = 0.8, n = 1, 2, 3。$$

那么,9个横向压缩因子为:

$$a_{11} = a_1^2; a_{12} = a_1 a_2; a_{13} = a_1 a_3$$

$$a_{21} = a_2 a_1; a_{22} = a_2^2; a_{23} = a_2 a_3$$

$$a_{31} = a_3 a_1; a_{32} = a_3 a_2; a_{33} = a_3^2$$

9个纵向压缩因子为:

$$\Gamma_{11} = \gamma_{1,1} \gamma_{1,2}; \Gamma_{12} = \gamma_{1,1} \gamma_{2,2}; \Gamma_{13} = \gamma_{1,1} \gamma_{3,2}$$

$$\Gamma_{21} = \gamma_{2,1} \gamma_{1,2}; \Gamma_{22} = \gamma_{2,1} \gamma_{2,2}; \Gamma_{23} = \gamma_{2,1} \gamma_{3,2}$$

$$\Gamma_{31} = \gamma_{3,1} \gamma_{1,2}; \Gamma_{32} = \gamma_{3,1} \gamma_{2,2}; \Gamma_{33} = \gamma_{3,1} \gamma_{3,2}$$

经计算可得:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{3}$$

并且由已知可得:

$$\gamma_{n,1} = 0.5, \gamma_{n,2} = 0.8, n = 1, 2, 3$$

那么:

$$a_{11} = a_{12} = \cdots = a_{33} = \frac{1}{9}$$

且:

$$\Gamma_{11} = \Gamma_{12} = \cdots = \Gamma_{33} = 0.4$$

又因为  $\{(0,0), (\frac{1}{3},1), (\frac{2}{3},1), (1,0)\}$  不共线,

并且:

$$\sum_{n_1, n_2=1,2,3} |\gamma_{n_1,1} \gamma_{n_2,2}| = 9 \times 0.5 \times 0.8 = 3.6 > 1$$

则可由定理2知其盒维数  $s$  可以由下式确定:

$$\sum_{n_1, n_2=1,2,3} |\gamma_{n_1,1} \gamma_{n_2,2}| (a_{n_1} a_{n_2})^{s-1} = 1$$

即:

$$\sum_{n=1}^9 |0.4| \left(\frac{1}{9}\right)^{s-1} = 1$$

经计算得  $s = 1.5830$ , 即当  $\sigma = \bar{12}$  时,此分形插值函数的盒维数大约等于 1.5830。

注:上例中其它条件不变,若  $\sigma_1 = \bar{1}$  时,分形插值函数  $g_{\sigma_1}$  (见图1)的维数  $s_1$  可以通过分形插值函数的盒维数计算方法得到,经计算  $s_1 = 1.3691$  (参见文献[2]),同样也可计算当  $\sigma_2 = \bar{2}$  时,分形插值函数  $g_{\sigma_2}$  (见图2)的维数  $s_2 = 1.7969$ ,而本例中,当  $\sigma = \bar{12}$  时(图像见图3)其维数  $s = 1.5830$ ,  $s$  的值处在  $s_1$  和  $s_2$  之间,且恰好  $s$  约等于  $s_1$  和  $s_2$  的平均数。

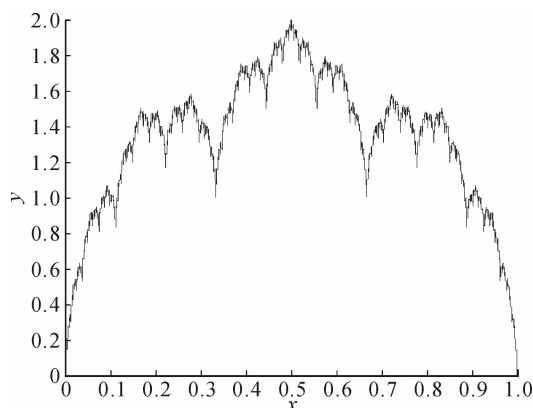


图1  $\sigma_1 = \bar{1}$  时的分形插值函数  $g_{\sigma_1}$

Fig.1 FIF  $g_{\sigma_1}$  for  $\sigma_1 = \bar{1}$

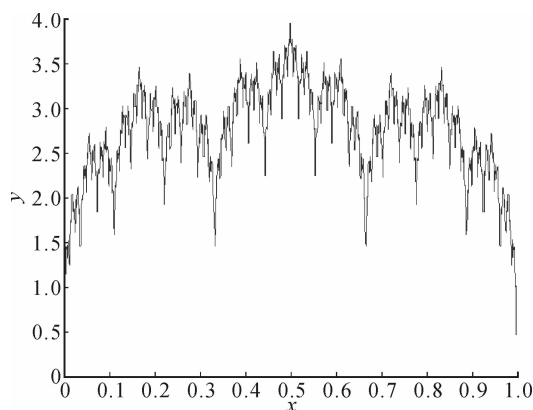


图2  $\sigma_2 = \bar{2}$  时的分形插值函数  $g_{\sigma_2}$

Fig.2 FIF  $g_{\sigma_2}$  for  $\sigma_2 = \bar{2}$

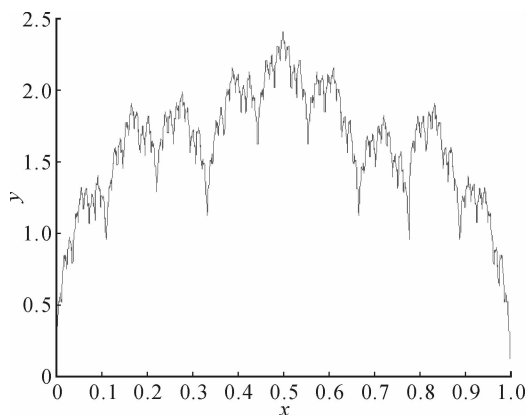


图3  $\sigma = \bar{12}$  时的基于循环迭代的分形插值函数  $g_\sigma$

Fig. 3 Fractal Interpolation Function Based on the Cyclical Iterance  $g_\sigma$  for  $\sigma = \bar{12}$

事实上,在定理2中,我们得到了基于循环迭代的分形插值函数盒维数  $s$  的计算公式为:

$$\sum_{n_1, n_2, \dots, n_M=1, 2, \dots, N} |\gamma_{n_1,1} \gamma_{n_2,2} \cdots \gamma_{n_M,M}| (a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_M})^{s-1} = 1 \quad (8)$$

换一种形式可写为:

$$\left( \sum_{n_1=1}^N |\gamma_{n_1,1}| \cdot a_{n_1}^{s-1} \right) \left( \sum_{n_2=1}^N |\gamma_{n_2,2}| \cdot a_{n_2}^{s-1} \right) \cdots \left( \sum_{n_M=1}^N |\gamma_{n_M,M}| \cdot a_{n_M}^{s-1} \right) = 1 \quad (9)$$

式(9)中,并不要求等式左边的这  $M$  项都为1,只要求它们的乘积为1即可,因此可能会出现其中一项的值大于1而另一项的值小于1的情况,因此其维数  $s$  就会在不同的  $k$  值下取不同的值 ( $k = 1, 2, \dots, M$ ), 所以,当在上例中取  $\sigma_1 = \bar{1}$  和  $\sigma_2 = \bar{2}$  时便会有不同的维数值,而当取  $\sigma = \bar{12}$  时,运用公式(4)可计算得到维数  $s$  恰好大约在  $s_1$  和  $s_2$  中间。

### 3 总结

浮云的边界、山峰的轮廓、海岸线以及许多其他的自然界中的物体,用分形数学来描述它们的形状要比用经典几何中的直线和光滑曲线来描述要好得多,因此分形几何已渐渐成为非线性科学中一个十

分重要的领域。本文以分形插值函数为基础,构造了一类基于循环迭代的分形插值函数,它相较于普通分形插值函数可以更加精确地模拟自然界中的实际存在,并讨论了其迭代函数系以及它的计盒维数。

### 参考文献:

- [1] Barnsley M F. Fractals Everywhere[M]. Orlando, Florida: Academic Press, 1988.
- [2] 沙震,阮火军. 分形与拟合[M]. 杭州:浙江大学出版社, 2005.
- [3] 张济忠. 分形[M]. 第二版. 北京:清华大学出版社, 2011.
- [4] 文志英,井竹君. 分形几何和分维数简介[J]. 数学的实践与认识, 1995, (4): 20-34.  
Wen Zhiying, Jing Zhujun. Introduction of the Fractal Geometry and Fractal Dimensions[J]. Mathematics in Practice and Theory, 1995, (4): 20-34.
- [5] 李水根,吴纪桃. 分形与小波[M]. 北京:科学出版社, 2002.
- [6] 冯志刚,周宏伟. 图像的分形维数计算方法及其应用[J]. 江苏理工大学学报:自然科学版, 2001, 22(6): 92-95.  
Feng Zhigang, Zhou Hongwei. Computing method of fractal dimension of image and its application[J]. Journal of Jiangsu University of Science and Technology (Natural Science), 2001, 22(6): 92-95.
- [7] 冯志刚,黄艳丽. 基于分形插值函数的分形插值曲面的变差与计盒维数[J]. 工程数学学报, 2012, 29(3): 393-399.  
Feng Zhigang, Huang Yanli. Variation and box-counting dimension of fractal interpolation surface based on the fractal interpolation function[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2012, 29(3): 393-399.
- [8] Barnsley M F. Super Fractals[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
- [9] (英)肯尼思·法尔科内,著. 分形几何:数学基础及其应用[M]. 曾文曲,等,译. 沈阳:东北大学出版社, 2001.

(责任编辑 王卫勋)