文章编号: 1006-4710(2013)02-0188-04

具有拟稳定秩的环

孙晓青, 田径, 李江华
(西安理工大学 理学院, 陕西 西安 710054)

摘要: 为了将拟可逆元引入到稳定秩条件中,提出了具有拟稳定秩的环。利用具有拟稳定秩的环的特殊性质,证明了环 $\boldsymbol{R}$ 是具有拟稳定秩的环的充分必要条件是对任意满足条 $ax+b=1$ 件的 a, $b\in\boldsymbol{R}$,存在 $w\in\boldsymbol{R}_q^{-1}$ 使得 $a+bw\in\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R})$,以及其他等价条件,体现了具有拟稳定秩的环良好的结构特点。

关键词: 可逆元;拟可逆元;具有稳定秩条件的环
中图分类号: O153.3　　**文献标志码:** A

Rings with Quasi-Stable Range Conditions

SUN Xiaoqing, TIAN Jing, LI Jianghua
(Faculty of Science, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China)

Abstract: To purpose is to conceptually weave quasi-invertibility into the stable range condition, this paper proposed the concept of the ring with quasi-stable range condition. The special properties of the ring with quasi-stable range condition are used to prove that $\boldsymbol{R}$ is the ring with quasi-stable range condition if and only if for any $a,b\in\boldsymbol{R}$ satisfying $ax+b=1$, there exists $w\in\boldsymbol{R}_q^{-1}$ such that $a+bw\in\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R})$, and other conditions of equivalence. The study reflected that the ring with quasi-stable range condition have well structures.

Key words: invertibility; quasi-invertibility; rings with stable range condition.

1964 年 Bass 在文献[1]中给出了具有稳定秩 1 的环的定义,若对任意满足条件 $a\boldsymbol{R}+b\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}$ 的 $a,b\in\boldsymbol{R}$,存在 $y\in\boldsymbol{R}$ 使得 $a+by$ 是可逆元,则称环 R 具有稳定秩 1。这类环对研究代数 K-理论有重要意义,许多学者从不同角度研究了这类环[2-6]。Ara 在文献[7]中提出了一类具有稳定秩条件的无限环,即 QB-环,引入了拟可逆的概念,即:设 $\boldsymbol{R}$ 是环,元素 $x,y\in\boldsymbol{R}$,称 x,y 是中心正交的,如果它们满足 $x\boldsymbol{R}y=y\boldsymbol{R}x=0$,记作 $x\perp y$。称环 $\boldsymbol{R}$ 的元素 u 是拟可逆的,如果存在元素 $a,b\in\boldsymbol{R}$ 使得 $(1-ua)\perp(1-bu)$,记:

$$\boldsymbol{R}_q^{-1}=\left\{u\in\boldsymbol{R}\;\middle|\;\exists\, a,b\in\boldsymbol{R}\ s.t.\ (1-ua)\perp(1-bu)\right\}$$

Goodeal 在文献[2]中定义了具有单位稳定秩 1 的环,即若对任意满足条件 $a\boldsymbol{R}+b\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}$ 的 $a,b\in\boldsymbol{R}$,存在 $u\in\boldsymbol{R}$ 使得 $a+by$ 是可逆元,则称环 $\boldsymbol{R}$ 具有单位稳定秩 1。本研究将拟可逆替换单位稳定秩 1 中的可逆后,得到了一类新的环,笔者称之为具有拟稳定秩的环,并详细讨论了这类环的性质,得到了许多好的结论。

文中环是含单位元的结合环,理想是双边理想,模是指右模。令 $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R})$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的可逆元的集合,$\boldsymbol{U}'(\boldsymbol{R})$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的单边可逆元的集合,$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{R})$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的 Jacobson 根。记 $\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{R})$ 为 $\boldsymbol{R}$ 上的 $n\times n$ 阶矩阵的集合,它的单位元为 $\boldsymbol{I}_n$,且记 $\boldsymbol{GL}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$ 为 $\{\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{GL}_2(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})\mid\boldsymbol{A}\equiv\boldsymbol{I}_n(\mathrm{mod}\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{I}))\}$,其中 $\boldsymbol{GL}_n(\boldsymbol{R})$ 为 $\boldsymbol{R}$ 的 n-维一般线性群。设 $\boldsymbol{B}_{ij}=\boldsymbol{I}_2+x\boldsymbol{e}_{ij}$, $(i\neq j, 1\leq i,j\leq 2)$, $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{e}_{11}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{e}_{22}$,其中,$\boldsymbol{e}_{11},\boldsymbol{e}_{22},\boldsymbol{e}_{ij}(i\neq j,1\leq i,j\leq 2)$ 是第 i 行,第 j 列位置是 1,其余元素都是 0 的矩阵。

引理 1　对于任意环 $\boldsymbol{R}$,如果 $w\in\boldsymbol{R}_q^{-1}$,那么对任意的 $u\in\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R})$, $uw,wu\in\boldsymbol{R}_q^{-1}$。

收稿日期: 2012-11-10
基金项目: 陕西省自然科学基金资助项目(2012K06-43);陕西省教育厅专项计划基金资助项目(12JK0874);西安理工大学博士启动基金(108-211105)。
作者简介: 孙晓青,女,讲师,研究方向为环与代数。E-mail:sunxq@xaut.edu.cn。

证明:设 $w \in \boldsymbol{R}_q^{-1}$, $u \in \boldsymbol{U}(\boldsymbol{R})$,则存在 $a,b \in \boldsymbol{R}$ 使得:$(1-wa) \perp (1-bw)$ 即:$(1-wa)\boldsymbol{R}(1-bw)=(1-bw)\boldsymbol{R}(1-wa)=0$ 因为:$(1-uwau^{-1})R(1-bu^{-1}uw)=u(1-wa)u^{-1}\boldsymbol{R}(1-bw) \subseteq u(1-wa)\boldsymbol{R}(1-bw)=0$ 同理可得:$(1-bu^{-1}uw)\boldsymbol{R}(1-uwau^{-1})=0$,所以 $uw \in \boldsymbol{R}_q^{-1}$,类似的可得 $wu \in \boldsymbol{R}_q^{-1}$。

定理 1 对于任意环 $\boldsymbol{R}$,下列结论等价:

1)对任意满足条件 $a\boldsymbol{R}+b\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}$ 的 $a,b \in \boldsymbol{R}$,存在 $y \in \boldsymbol{R}_q^{-1}$ 使得 $a+by$ 是可逆元;

2)对任意满足条件 $a\boldsymbol{R}+b\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}$ 的 $a,b \in \boldsymbol{R}$,存在 $y \in \boldsymbol{R}_q^{-1}$ 使得 $a+by$ 是左可逆元;

3)对任意满足条件 $a\boldsymbol{R}+b\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}$ 的 $a,b \in \boldsymbol{R}$,存在 $y \in \boldsymbol{R}_q^{-1}$ 使得 $a+by$ 是右可逆元。

证明:

① 1)⇒2),1)⇒3)显然成立。

② 3)⇒1),即:

若 $a\boldsymbol{R}+b\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}$,由假设存在 $w \in \boldsymbol{R}_q^{-1}$ 使得 $a+bw=u$,u 是右可逆的。因此,存在 $v \in \boldsymbol{R}$,使得 $uv=1$。

由于 $v\boldsymbol{R}+(1-vu)\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}$,故存在 $w_1 \in \boldsymbol{R}_q^{-1}$ 使得 $v+(1-vu)w_1=u_1$ 是右可逆元,且 $uu_1=u(v+(1-vu)w_1)=uv+u(1-vu)w_1=1$,这表明 u_1 是 $\boldsymbol{R}$ 中的可逆元,逆元为 u,因此,$u=a+bw$ 是可逆的。

③ 2)⇒1),即:

假设 $a\boldsymbol{R}+b\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}$,根据假设,存在 $w \in \boldsymbol{R}_q^{-1}$ 使得 $a+bw=u$,u 是左可逆的。因此,存在 $v \in \boldsymbol{R}$,使得 $vu=1$。

由于 $v\boldsymbol{R}+0\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}$,故存在 $w_1 \in \boldsymbol{R}_q^{-1}$ 使得 $v+0w_1=v$ 是左可逆元,因此,$u=a+bw$ 是可逆的。

定义 1 如果 $\boldsymbol{R}$ 满足以上定理 1 中等价条件中的任何一条,那么称 $\boldsymbol{R}$ 是具有拟稳定秩的环。

具有拟稳定秩的环和具有稳定秩的环一样存在下面的等价定义。

命题 1 设 $\boldsymbol{R}$ 是一个环,则下列结论等价:

1)$\boldsymbol{R}$ 是具有拟稳定秩的环;

2)对任意满足条件 $ax+b=1$ 的 $a,b \in \boldsymbol{R}$,存在 $w \in \boldsymbol{R}_q^{-1}$ 使得 $a+bw \in \boldsymbol{U}(\boldsymbol{R})$;

3)对任意满足条件 $ax+b=1$ 的 $a,b \in \boldsymbol{R}$,存在 $y \in \boldsymbol{R}$ 使得 $a+by \in \boldsymbol{U}(\boldsymbol{R})$ 且 $1-xy \in \boldsymbol{R}_q^{-1}$。

证明:

① 1)⇒2)显然成立;

② 2)⇒3),即:

由于 $xa+(1-xa)=1$,根据假设存在 $w \in \boldsymbol{R}_q^{-1}$,使得:$x+(1-xa)w=u \in \boldsymbol{U}(\boldsymbol{R})$

又因为:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ 1 & x \end{pmatrix} \boldsymbol{B}_{21}(w) = \begin{pmatrix} x & 1-xa \\ -1 & a \end{pmatrix} \boldsymbol{B}_{21}(w) = \begin{pmatrix} u & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

所以存在 $v \in \boldsymbol{U}(\boldsymbol{R})$,使得:

$$\begin{pmatrix} u & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{B}_{21}(*) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v^{-1} \end{pmatrix} \boldsymbol{B}_{12}(*)$$

故:

$$\begin{pmatrix} u & * \\ * & * \end{pmatrix}^{-1} = \boldsymbol{B}_{12}(*) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \boldsymbol{B}_{21}(*) \begin{pmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

表明:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -w & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & v \end{pmatrix} \in \boldsymbol{GL}_2(\boldsymbol{R})$$

所以存在 $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{U}(\boldsymbol{R})$,$\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}$ 使得:

$$\begin{pmatrix} * & * \\ * & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & * \\ 0 & v \end{pmatrix} \boldsymbol{B}_{21}(y)$$

因此:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ 1 & x \end{pmatrix} \boldsymbol{B}_{21}(-y) = \boldsymbol{B}_{21}(w) \begin{pmatrix} s & * \\ 0 & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & * \\ ws & * \end{pmatrix}$$

由此可得 $a+by=s \in \boldsymbol{U}(\boldsymbol{R})$,且根据引理 1 知 $1-xy=ws \in \boldsymbol{R}_q^{-1}$。

③ 3)⇒2),即:

设 $ax+b=1$,由于 $xa+(1-xa)=1$,根据假设,存在 $y \in \boldsymbol{R}$ 使得 $x+(1-xa)\boldsymbol{y}=u \in \boldsymbol{U}(\boldsymbol{R})$ 且 $1-ay=w \in \boldsymbol{R}_q^{-1}$。

从而有:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ 1 & x \end{pmatrix} \boldsymbol{B}_{21}(-y) = \begin{pmatrix} x & xa-1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \boldsymbol{B}_{21}(-y) = \begin{pmatrix} u & * \\ w & * \end{pmatrix}$$

故存在 $v \in \boldsymbol{U}(\boldsymbol{R})$,使得:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ 1 & x \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{B}_{21}(w) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \boldsymbol{B}_{12}(*) \boldsymbol{B}_{21}(y)$$

因此有:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ 1 & x \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}_{21}(-y) \boldsymbol{B}_{12}(*) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v^{-1} \end{pmatrix} \boldsymbol{B}_{21}(-w) \begin{pmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

从而:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ 1 & x \end{pmatrix} \boldsymbol{B}_{21}(wu^{-1}) = \begin{pmatrix} u^{-1} & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

由此可得 $a+bwu^{-1}=u^{-1}\in\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R})$，且由引理1知 $wu^{-1}\in\boldsymbol{R}_q^{-1}$。

④ 2)⇒1)，即：

若 $a\boldsymbol{R}+b\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}$，则存在 $x,y\in\boldsymbol{R}$，使得 $ax+by=1$，根据2)存在 $w_1\in\boldsymbol{R}_q^{-1}$ 使得 $b+axw_1=u\in\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R})$，因此 $axw_1u^{-1}+bu^{-1}=1$。

因为 $axw_1u^{-1}+bu^{-1}=1$，又根据2)存在 $w_2\in\boldsymbol{R}_q^{-1}$，使得 $a+bu^{-1}w_2\in\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R})$，且由引理1知 $u^{-1}w_2\in\boldsymbol{R}_q^{-1}$。

命题2 设 $\boldsymbol{R}$ 是任意环，则下列说法等价：

1) 对任意满足条件 $ax+b=1$ 的 $x,a,b\in\boldsymbol{R}$，存在 $w\in\boldsymbol{R}_q^{-1}$ 使得 $a+bw\in\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R})$；

2) 对任意满足条件 $ax+b=1$ 的 $x,a,b\in\boldsymbol{R}$，存在 $w\in\boldsymbol{R}_q^{-1}$ 使得 $x+wb\in\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R})$。

证明：

① 1)⇒2)，即：

设 $ax+b=1$，由命题1，存在 $y\in\boldsymbol{R}$ 使得 $a+by\in\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R})$ 且 $1-xy\in\boldsymbol{R}_q^{-1}$。令：

$$u=a+by\in\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R}),w=(1-xy)u^{-1},$$
$$v=x+(1-xy)u^{-1}b,z=a+y(1-xa)$$

下面证明：$vz=zv=1$。

$$va=xa+(1-xy)^{-1}ba \tag{1}$$
$$vy=xy+(1-xy)u^{-1}by=1-(1-xy)u^{-1}a \tag{2}$$
$$\begin{aligned}vy(1-xa)&=1-xa-(1-xy)u^{-1}a(1-xa)=\\1-xa-&(1-xy)u^{-1}(1-ax)a=\\1-xa-&(1-xy)u^{-1}ba\end{aligned} \tag{3}$$

由(1)式和(3)式得 $vz=1$。

$$zx=ax+y(1-xa)x=ax+yxb \tag{4}$$
$$\begin{aligned}z(1-xy)&=a-axy+y(1-xa)-y(1-xa)xy=\\a-axy&+y(1-xa)-yxby=\\a+(1-&ax)y-yx(a+by)=\\a+by&-yxu=(1-yx)u\end{aligned} \tag{5}$$
$$z(1-xy)u^{-1}b=(1-yx)b \tag{6}$$

由(4)式和(6)式得 $zv=ax+b=1$。由于 $1-xy\in\boldsymbol{R}_q^{-1}$，根据引理1得 $w=(1-xy)u^{-1}\in\boldsymbol{R}_q^{-1}$。

② 2)⇒1)，即：

由于 $xa+(1-xa)=1$，故存在 $w\in\boldsymbol{R}_q^{-1}$，使得：$a+w(1-xa)=u\in\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R})$。

由于：

$$\boldsymbol{B}_{12}(w)\begin{pmatrix}x&1\\-b&a\end{pmatrix}^{-1}=\boldsymbol{B}_{12}(w)\begin{pmatrix}a&-1\\1-xa&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u&*\\ *&*\end{pmatrix}$$

存在 $v\in\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R})$，使得：

$$\begin{pmatrix}u&*\\ *&*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u&0\\0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{B}_{21}(*)\begin{pmatrix}1&0\\0&v^{-1}\end{pmatrix}\boldsymbol{B}_{12}(*)$$

则有：

$$\begin{pmatrix}u&*\\ *&*\end{pmatrix}^{-1}=\boldsymbol{B}_{12}(*)\begin{pmatrix}1&0\\0&v\end{pmatrix}\boldsymbol{B}_{21}(*)\begin{pmatrix}u^{-1}&0\\0&1\end{pmatrix}$$

表明：

$$\begin{pmatrix}x&1\\-b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-w\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*&*\\ *&v\end{pmatrix}\in\boldsymbol{GL}_2(\boldsymbol{R})$$

所以存在 $s\in\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R}),y\in\boldsymbol{R}$，使得：

$$\begin{pmatrix}*&*\\ *&a\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_{12}(y)\begin{pmatrix}s&0\\ *&v\end{pmatrix}$$

因此：

$$\boldsymbol{B}_{21}(-y)\begin{pmatrix}a&-b\\1&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s&0\\ *&v\end{pmatrix}\boldsymbol{B}_{12}(w)=\begin{pmatrix}s&sw\\ *&*\end{pmatrix}$$

由此可得，存在 $y\in\boldsymbol{R}$ 使得 $x+yb=s\in\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R})$，且 $1-ya=sw\in\boldsymbol{R}_q^{-1}$。对称的可以证明1)成立。

由命题2可知，$\boldsymbol{R}$ 是具有拟稳定秩的环的充分必要条件是 $\boldsymbol{R}$ 的反环 $\boldsymbol{R}^{op}$ 是具有拟稳定秩的环。

命题3 设 $\boldsymbol{R}$ 是任意环，则下列说法等价：

1) $\boldsymbol{R}$ 是具有拟稳定秩的环；

2) 对任意满足条件 $a\boldsymbol{R}+b\boldsymbol{R}=d\boldsymbol{R}$ 的 $a,b,d\in\boldsymbol{R}$，存在 $u\in\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R}),w\in\boldsymbol{R}_q^{-1}$ 使得 $au+bw=d$；

3) 对任意的 $m\geq2,a_1,\cdots,a_m,d\in\boldsymbol{R}$，若满足条件 $a_1\boldsymbol{R}+\cdots+a_m\boldsymbol{R}=d\boldsymbol{R}$，则存在 $u_1\in\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R}),w_2,\cdots,w_m\in\boldsymbol{R}_q^{-1}$ 使得 $a_1u_1+a_2w_2+\cdots+a_mw_m=d$。

证明：

① 2)⇒1)和3)⇒2)显然成立；

② 1)⇒2)，即：

由于 $\boldsymbol{R}$ 是具有拟稳定秩的环，根据定义1，$\boldsymbol{R}$ 具有稳定秩1。假设 $a,b,d\in\boldsymbol{R}$ 满足 $a\boldsymbol{R}+b\boldsymbol{R}=d\boldsymbol{R}$，则集合$\{a,b\}$和集合$\{d,0\}$生成相同的 $\boldsymbol{R}^2$ 的 $\boldsymbol{R}$－子模。根据文献[8]的引理2.1，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{U}=(u_{ij})\in\boldsymbol{GL}_2(\boldsymbol{R})$，使得$(a,b)=(d,0)\boldsymbol{U}$。显然 $u_{11}\boldsymbol{R}+u_{12}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}$，故存在 $w\in\boldsymbol{R}_q^{-1}$ 使得 $u_{11}+u_{12}w=v\in\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R})$。表明 $a+bw=dv$，因此 $av^{-1}+bwv^{-1}=d$，其中 $v^{-1}\in\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R})$ 且根据引理1，$wv^{-1}\in\boldsymbol{R}_q^{-1}$。

③ 2)⇒3)，即：

假设 $a_1\boldsymbol{R}+\cdots+a_m\boldsymbol{R}=d\boldsymbol{R}$，其中 $m\geq2,a_1,\cdots,a_m,d\in\boldsymbol{R}$。如果 $m=2$，根据2)，结论成立。

假设结论对 $m\leq k(k\geq2)$ 成立。

令：$m=k+1$，存在 $x_1,\cdots,x_{k+1}\in\boldsymbol{R}$，使得：

$$a_1x_1+\cdots+a_{k+1}x_{k+1}=d$$

表明:

$$a_1\boldsymbol{R}+\cdots+a_{k-1}\boldsymbol{R}+(a_kx_k+a_{k+1}x_{k+1})\boldsymbol{R}=d\boldsymbol{R}$$

假设:

$$a_1u_1+a_2w_2+\cdots+a_{k-1}w_{k-1}+(a_kx_k+a_{k+1}x_{k+1})w_k=d \tag{7}$$

其中,$u_1\in\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R}),w_2,\cdots,w_m\in\boldsymbol{R}_q^{-1}$。

由(7)式知:

$(a_1u_1+a_2w_2)\boldsymbol{R}+\cdots+a_k\boldsymbol{R}+a_{k+1}\boldsymbol{R}=d\boldsymbol{R}$。

再由归纳假设得:

$$(a_1u_1+a_2w_2)v_1+\cdots+a_kv_{k-1}+a_{k+1}v_k=d$$

其中,$v_1\in\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R}),v_2,\cdots,v_k\in\boldsymbol{R}_q^{-1}$。

根据引理 1 知 $u_1v_1\in\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R}),w_2v_1\in\boldsymbol{R}_q^{-1},v_2,\cdots,v_k\in\boldsymbol{R}_q^{-1}$,故 3)成立。

由于 $\boldsymbol{R}$ 是具有拟稳定秩的环,$\boldsymbol{R}$ 的反环 $\boldsymbol{R}^{op}$ 是具有拟稳定秩的环,因此根据命题 3 得到推论 1。

推论 1 设 $\boldsymbol{R}$ 是任意环,则下列说法等价:

1)$\boldsymbol{R}$ 是具有拟稳定秩的环;

2)对任意满足条件 $\boldsymbol{R}a+\boldsymbol{R}b=\boldsymbol{R}d$ 的 $a,b,d\in\boldsymbol{R}$,存在 $u\in\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R}),w\in\boldsymbol{R}_q^{-1}$ 使得 $ua+wb=d$;

3)对任意的 $m\geq 2,a_1,\cdots,a_m,d\in\boldsymbol{R}$,若满足条件 $\boldsymbol{R}a_1+\cdots+\boldsymbol{R}a_m=\boldsymbol{R}d$,则存在 $u_1\in\boldsymbol{U}(\boldsymbol{R}),w_2,\cdots,w_m\in\boldsymbol{R}_q^{-1}$ 使得 $u_1a_1+w_2a_2+\cdots+w_ma_m=d$。

参考文献:

[1] Vaserstein L N. Stable rank of rings and dimensionality of topological spaces[J]. Functional Analysis and its Applications, 1971, 5(2):102-110.

[2] Goodeal K R. Stable range one for rings with many units [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 1988,54(2):261-287.

[3] 秦新强,王凯,胡钢. CE-Bézier 可展曲面的设计与形状调整[J]. 西安理工大学学报,2010,44(3):47-51.
Qin Xinqiang, Wang Kai, Hu Gang. Geometric design and adjustment of shape for developable CE-Bézier surfaces [J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2010, 44 (3):47-51.

[4] 李江华,王睿莉,曲桢,等. 形如 $a\cdots a_0\cdots 0$ 的完全方幂[J]. 西安理工大学学报,2012,28(3):308-311.
Li Jianghua, Wang Ruili, Qu Zhen, et al. Perfect powers of the form of$a\cdots a_0\cdots a$[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2012, 28(3):308-311.

[5] Chen H, Li F. Rings with many unit-regular elements[J]. Chinese Journal of Contemporary Mathematics, 2000, 21 (2):33-38.

[6] Chen H. Rings with many idempotents[J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Science, 1999, 22 (3):547-558.

[7] Ara P, Pedersen G K, Pereva F. An infinite analogue of rings with stable range one[J]. Journal of Algebra, 2000, 230(2):608-655.

[8] Chen H. Rings with stable range conditions[J]. Communications in Algebra, 1998,26(11):3653-3668.

(责任编辑 李虹燕)