

文章编号: 1006-4710(2013)02-0211-05

金属材料弹塑性加、卸载时弹性变形大小与分布

汤安民, 王忠民, 李智慧

(西安理工大学 土木建筑工程学院, 陕西 西安 710048)

摘要: 弹性变形与塑性变形是两种不同性质的物理现象。弹、塑性变形过程中, 两者性质互不影响, 其中弹性变形能大小遵守热力学第一定律, 变形能分布形式遵守热力学第二定律。现有塑性力学求解时, 仅使用了平衡条件、屈服条件与本构关系, 求出的应力解仅符合热力学第一定律, 但应力解对应的变形能不是最小值, 变形场处在不稳定的平衡状态, 这样应力解不符合热力学第二定律, 不符合实际情况。用现有弹塑性理论作指导, 不能正确解答金属结构弹塑性加、卸载试验现象。

关键词: 弹塑性变形; 热力学第二定律; 变形能; 稳定平衡条件

中图分类号: O346.1

文献标志码: A

The Magnitude and Distribution of Elastic Deformation of the Metal Materials in the Conditions of Elastoplastic Loading and Unloading

TANG Anmin, WANG Zhongmin, LI Zhihui

(Faculty of Civil Engineering and Architecture, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

Abstract: Elastic deformation and plastic deformation are two physical phenomena with different properties. In the process of elastic-plastic deformation, the properties of elastic and plastic deformation can not affect each other. Of which the magnitude of deformation energy of the elastic deformation will follow the first law of thermodynamics, and the distribution of deformation should follow the second law of thermodynamics. In the current plastic mechanics, only the equilibrium conditions, the yield criterions and the constitutive relations are used to solve the questions, and the solutions obtained are consistent with the first law of thermodynamics. However, the deformation energies corresponding to these solutions are not the minimum and the deformation fields are in the unstable equilibrium state. Therefore, the solutions obtained in this way don't conform to the second law of thermodynamics and they are impossible to appear in reality. Using the current elastic-plastic theory, it is unlikely to explain the experimental phenomena of metal structures in the conditions of elastoplastic loading and unloading exactly.

Key words: elastic-plastic deformation; the second law of thermodynamics; deformation energy; stable equilibrium conditions

目前, 塑性力学主要用于分析材料发生塑性变形后结构内应力场的分布状况。由于塑性变形的复杂性, 对后续塑性变形性质认识尚不完善, 使得许多工程结构的弹塑性力学问题都难以解决^[1-3]。

金属材料在外力作用下, 金属原子位置发生相对改变, 产生材料的弹性变形, 弹性变形大小与分布可用弹性应变场、应力场和变形能场描述。

弹性变形的主要特性是, 外力增大其增大, 外力

卸载其恢复。金属晶体内位错在剪应力作用下滑移, 产生材料的塑性变形, 塑性变形中不包含变形能, 也不承担应力^[4], 外力卸载塑性变形不能恢复。

因此, 金属材料中的弹性变形与塑性变形两者微观机制与宏观表现均不同, 是性质不同的两种物理现象^[5]。

现有的弹塑性教材中常把二者混在一起分析对应的应力场^[6], 使问题求解困难化。若将弹性变

收稿日期: 2012-12-01

基金项目: 陕西省教育厅自然科学专项基金资助项目(2010JK745)。

作者简介: 汤安民, 男, 正高级工程师, 研究方向为实验力学和断裂力学。E-mail: tangmin@xaut.edu.cn。

形、塑性变形与应力场的关系加以区分,会使应力场分析简单化。

构件中应力场的大小、分布仅与变形能场大小、分布相对应,变形能场仅与弹性变形相对应。塑性变形的出现并不影响变形能场性质的改变,材料弹性变形性质也不改变。

这样通过分析结构加卸载试验过程中变形能场大小、分布规则,可了解弹性变形大小与分布规则,在考虑了塑性变形后的结构几何形状上,仅考虑弹性变形计算应力场大小与分布。

1 金属结构加、卸载过程与试验结果的讨论

常见金属结构的加、卸载试验曲线如图1所示,加载初期OA弹性段,构件以弹性变形为主。过A点后,材料出现大量塑性变形,构件进入弹塑性变形阶段,此阶段随载荷的增加,产生的弹性变形相同于弹性段,其大小远小于产生的塑性变形,在弹塑性阶段任意处进行卸载,卸载过程为纯弹性变形过程,曲线见图1中BD或CE。

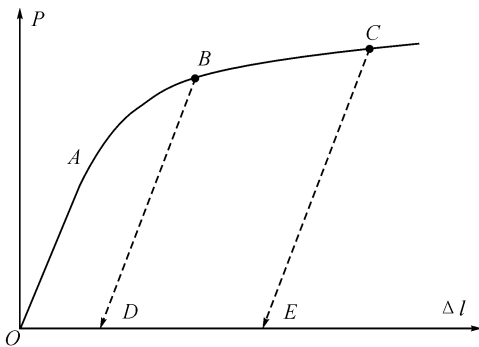


图1 单向拉伸加、卸载曲线

Fig.1 Loading and unloading curves in tension

目前弹塑性理论认为,加载在弹性阶段,金属结构中有弹性应力场,在弹塑性阶段,即是小变形在不考虑结构尺寸变化的情况下,塑性变形会使结构中应力分布规律发生变化,如纯弯曲梁弹性段正应力分布如图2(a)所示,弹塑性段正应力分布如图2(b)所示。

大量实验表明,卸载是一弹性过程,能卸掉载荷 P_B 对应的纯弹性变形场中的弹性应变、应力和相应变形能。

现有教材中,将卸载过程解释成一个反向加载的弹性过程,没有解释卸载试验过程中卸掉的弹性变形与理论计算结构中给出的弹性变形不相符的事实。现有理论认为卸载后,对应载荷 P_B 计算出的弹塑性应力场与 P_B 卸载纯弹性应力场之差,成为结构中的残余应力。

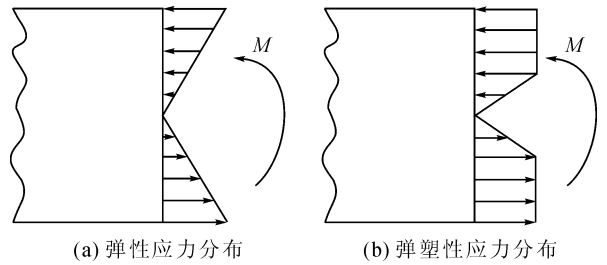


图2 纯弯梁的应力分布

Fig.2 Elastic stress distribution and Elastic-plastic stress distribution

材料的弹性变形、塑性变形在细观上是不同机制的两个物理现象。构件弹、塑性变形加、卸载试验表明,塑性变形的产生与大小并不影响材料弹性性质。

对金属材料构件弹塑性加、卸载段,材料弹性应变与应力之间仍服从虎克定律,试验中弹性变形与载荷有着——对应的线性关系。则外力在弹性变形上做功为 $P_B\Delta^e/2$,储存在构件中的变形能也等于 $P_B\Delta^e/2$ 。试验中卸载过程是载荷逐渐减小过程,并不是反向加载,卸载时构件中弹性变形逐渐恢复,卸载过程释放出的变形能值是 $P_B\Delta^e/2$,正是结构中全部变形能。

试验中,金属构件加载至弹塑性段任意处卸载,卸载曲线为与弹性段斜率相同的线弹性曲线,正说明在弹塑性段各处弹性变形性质是相同的,不因塑性变形影响而有所改变,图2b给出的应力场分布,则对应着塑性变形改变了材料弹性变形分布,实质是改变了力与弹性变形的原有物理关系,这与弹性性质不变的试验现象并不相符,在不考虑几何非线性情况的小变形范围内,理论上解释不通。因此对纯弯曲梁弹塑性变形后,图2给出的弹塑性应力场分布并不实际存在,完全卸载后,梁中应无残余应力存在。

以上两种不同认识的区别还在于,前者认为,弹塑性变形过程中,弹性变形与塑性变形配合起来使变形协调,而弹性变形、塑性变形各自单独部分不能变形协调。后者认为,弹性变形大小不影响材料的塑性性质,塑性变形也不影响材料的弹性性质,二者能量场在本质层次上不同,弹性变形对应的弹性势能与塑性变形耗散能互不影响,有着各自独立的分布规律,作为表象变形也有各自独立的分布规律。卸载过程卸掉了弹性变形,改变了几何形状的构件上只有塑性变形,说明塑性变形自身协调。

对变形后结构作分析,金属结构从A状态经过弹塑性变形到B状态(见图3)。研究虚线B状态,

塑性变形的作用细观上使材料硬化、不易再塑性变形,宏观上永久改变物体形状,这两点均不影响材料弹性性质。

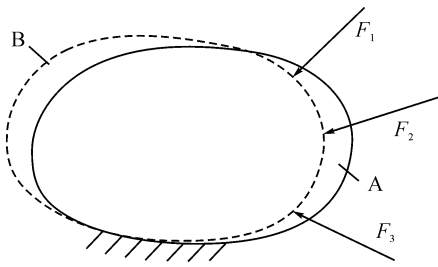


图3 大塑性变形结构

Fig.3 Large plastic deformation member

在考虑了塑性变形后的几何尺寸 B 结构,仍是力作用下对应的弹性变形场。在 B 上,外力、应力、弹性变形、弹性应变等满足平衡方程、几何方程和线弹性应力应变关系。因此, B 形状下的弹性变形和对应的应力分布规律,对应着弹性力学解。塑性变形改变结构应力分布,只能通过改变结构的几何形状,使应力分布发生变化,在小变形前提下,求解过程如不考虑结构几何尺寸发生的变化,则塑性变形不会使结构应力分布形式发生变化。

2 弹塑性变形过程中弹性变形大小与分布

金属结构受静载作用发生变形,变形过程是一热力学过程^[7]。

由热力学第一定律,结构单位体积中变形能增加 δU 等于外界给定的热能 δQ 与外力对它所做功 δA 之和,即:

$$\delta U = \delta Q + \delta A \quad (1)$$

对常温静载弹塑性变形过程,不考虑热能对变形能的影响。外力在塑性变形上做功,在材料内主要通过位错滑移而转化成热量耗散掉,并不储存为变形能。外力在弹性变形上做的功转换成结构中的变形能,变形能只储存在弹性变形中。因此弹塑性变形下,功能原理依然成立,即结构中的变形能等于外力在弹性变形上做的功,考虑金属弹性变形为线性,即:

$$\int_v \frac{1}{2} f_i u_i dv + \int_s \frac{1}{2} p_i u_i ds = \int_v \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv \quad (2)$$

式(2)中,外力、应力、位移、应变均为加载至某点时各量的值。

将式(2)功能原理推广为虚位移原理、虚应力原理,即:

$$\int_v f_i \delta u_i dv + \int_s p_i \delta u_i ds = \int_v \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv \quad (3)$$

$$\int_v u_i \delta f_i dv + \int_s u_i \delta p_i ds = \int_v \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dv \quad (4)$$

式(3)为虚位移原理,由其可推导出平衡方程。

式(4)为虚应力原理,由其可推导出几何方程。

式(2)、(3)、(4)以及由其推导的平衡方程与几何方程,均为弹性变形过程热力学第一定律具体应用。即用变形能场叙述构件弹性变形时,变形能大小应满足功能原理;用应力场叙述弹性变形时,应力大小应满足平衡方程;用应变场叙述弹性变形时,应变大小应满足几何方程。

当结构变形从一个平衡状态经缓慢加载到达一个新的平衡状态时,由热力学第二定律可知加载过程应满足 Clausius 不等式:

$$\delta U - \theta \delta S - \delta A \geq 0 \quad (5)$$

把变形能看作应变 ε_{ij} 和熵的函数,将 δU 按 Talor 级数展开,式(5)可写为:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S} - \theta \right) \delta S + \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \delta \varepsilon_{ij} + \delta^2 U + \dots \geq 0 \quad (6)$$

王敏中对式(5)、(6)进行推导分析^[8],得出变形能在稳定平衡状态取极小值。文献[9]也做了相关分析认为,满足热力学第一定律的弹性变形分布中,变形能取最小值的分布满足热力学第二定律,这是弹性变形分布规律的重要性质。

对于某热力学过程,热力学第一定律是其过程要满足的必要条件,热力学第二定律是其过程要满足的充分条件^[7]。

金属材料常温、静载弹塑性变形过程也是一热力学过程,由热力学第一定律给出的弹性变形的功能原理、平衡方程、几何方程等,用于叙述构件中弹性变形内部量与外部作用量大小的关系,可统称平衡条件,是弹性变形的必要条件。由热力学第二定律给出弹性变形遵守的变形能取最小值,它叙述构件中弹性变形的分布规律,可称稳定条件,是弹性变形的充分条件。

3 加载过程结构弹性变形及应力场分布

让热能从低温物体自动流向高温物体,并不违反热力学第一定律,但违反热力学第二定律,所以该现象在实际中并不会存在。

对于受力结构,满足平衡条件的弹性变形分布形式有许多种,但只有满足稳定条件的分布形式才在实际中真实存在。

例如拉伸杆弹性变形稳定分布形式:对同一单向拉伸杆若给出图4(a)、(b)、(c)所示三种应力分

布,其中 $\sigma = P/S$ 。

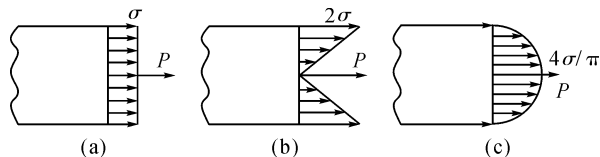


图4 单向拉伸三种应力分布图

Fig. 4 Three kinds of stress distribution in tension

假定杆的端部边界上受力形式为图4(a)、(b)、(c)三种,将应力解带入平衡方程和相应的边界条件,三种弹性变形分布形式平衡条件均得到满足。分析哪种变形满足稳定条件,并计算其变形能值,可得:

$$\begin{cases} U_a = \frac{\sigma^2 S}{2E} \\ U_b = \frac{2\sigma^2 S}{3E} \\ U_c = \frac{22\sigma^2 S}{3\pi^2 E} = 0.74 \frac{\sigma^2 S}{E} \end{cases} \quad (7)$$

图4(a)弹性变形的变形能为最小值,它也是被试验证实的单拉杆应力场实际分布形式。除此外任何其它的应力分布形式其变形能都大于 U_a ^[11],变形将处在不稳定平衡状态,实际中不会存在。

弹塑性加载下结构中弹性变形大小与分布,在考虑了塑性变形的结构几何形状上,其中弹性变形与对应的变形能,遵守热力学第一、第二定律。变形能大小等于外力在弹性变形上做功,从而满足平衡条件;变形能分布为可能分布中的极小值,从而满足稳定条件。

现有的弹塑性理论在求解时,使用平衡条件与屈服条件算出塑性区弹性变形大小与分布,这种理论解,其变形能大小上满足热力学第一定律,分布上不满足热力学第二定律,变形能场处在非稳定平衡状态,实际中也不会存在。

举例:三杆面积、材料均相同的结构如图5所示,加载到弹塑性变形阶段后进行卸载。

塑性力学计算中使用屈服条件给出杆2应力值,计算出应力场分布,使得卸载后三杆中存在残余弹性变形与残余应力,分别为:

$$(\sigma_1)_c = (\sigma_3)_c = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sigma_s \quad (8)$$

$$(\sigma_2)_c = (1 - \sqrt{2})\sigma_s \quad (9)$$

即卸载后杆2受压,杆1与杆3受拉。设想给结构一扰动,让杆2发生微弯。三杆就会处在杆2不受压、杆1与杆3也不受拉的状态。扰动解除后,结构不会回到以前的受拉、受压状态。理论计算的

结果是结构处在不稳定平衡状态,在实际中并不存在。

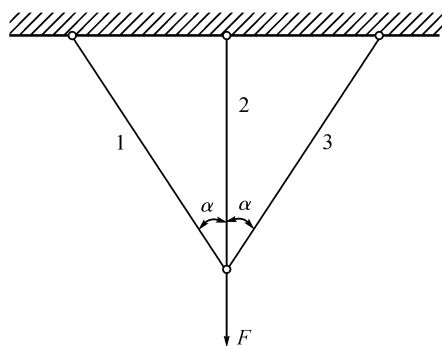


图5 三杆铰接超静定桁架

Fig. 5 The indeterminate truss of three hinge bars

大量试验现象表明,结构加载过程中发生塑性变形的区域,卸载后常常发生翘曲现象,现有理论并不能合理解释,说明非稳定平衡在实际中不会存在。

4 讨论

1) 由熵增原理,金属材料加载时的变形过程,是满足平衡条件的弹性变形均匀化过程,熵极大时,变形处于稳定平衡状态,变形能取最小值。卸载过程,材料变形向自身平衡与原子间距均匀发展,载荷卸掉后,熵极大时,材料中原子势能最小,变形能为零,材料处于稳定平衡状态。

2) 叙述构件的弹性变形,常用变形能场、应力场、应变场等物理量。对应这些物理场,由热力学第一定律会推导出功能原理、平衡方程、几何方程。由热力学第二定律也可能会推导出变形能场有极小值原理和内力协调方程、变形协调方程。两类条件合理地使用,即可确定弹性变形场的大小与分布。

3) 对金属材料剪应力达一定值时,使晶粒内位错滑移产生塑性变形,同时使材料硬化。剪应力继续增大,才能引起后续位错滑移与新塑性变形。对某金属晶粒,并不存在剪应力达 τ_s 后不增大而内部位错不断滑移的现象。在细观塑性力学研究中,考虑到位错滑移使材料硬化,晶胞畸变使强度增加,有了位错应力场、晶格内应力的说法,其本质反映的是晶胞面上、粒子间结合力的改变。而弹性应力场是外力作用下,在材料内引起的附加内力。使用热处理方法,可以较大地改变晶胞、粒子间的结合力,改变材料韧性。但金属材料应力场大小与分布只由外力与构件几何形状决定,不受材料韧性不同的影响。因此塑性变形只能通过改变构件几何形状而间接影响应力场分布形式的改变,这在构件发生几何大变形时与塑性变形区域较大时应该考虑。

5 结 论

加载过程,金属材料弹、塑性变形中的弹性变形,其大小遵循热力学第一定律,分布规律遵循热力学第二定律,前者为构件稳定平衡的平衡条件,后者为其稳定条件。

卸载过程,在弹塑性阶段卸掉的弹性变形就是构件中实际存在的弹性变形,卸载时的载荷-变形曲线,反映了构件中弹性变形与载荷间的对应关系。

卸载后,当构件处于不受力的稳定平衡状态时,材料中没有弹性变形能存在,也没有残余应力。

参考文献:

- [1] Jerzy Ploch, Tomasz Wierzbicki. Bounds for large plastic deformations of dynamically loaded continua and structures [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1981, 17(2): 183-195.
- [2] Tomasz Wierzbicki, Shankar Bhat. On the bifurcation and global energy approach in propagating plasticity [J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2004, 30(9): 901-922.
- [3] Yuanli Bai, Tomasz Wierzbicki. Forming severity concept

for predicting sheet necking under complex loading histories [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2008, 50(6), 1012-1022.

- [4] 汤安民,许明达,赵蕾. 自由变形结构弹塑性分析的新方法[J]. *广西大学学报*, 2009, 34(1): 36-39.
Tang Anmin, Xu Mingda, Zhaolei. New method for elastoplastic analysis of free-form deformation structure [J]. *Journal of Guangxi University*, 2009, 34(1): 36-39.
- [5] 陈建桥. 材料强度学[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2008.
- [6] 王仁,熊祝华,黄文彬. 塑性力学基础[M]. 北京: 科学出版社, 1986.
- [7] 范宏昌. 热学[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [8] 王敏中,王炜,武际可. 弹性力学教程[M]. 北京: 北京大学出版社, 2002.
- [9] 汤安民,李智慧. 对弹性力学势能原理等价性提法的商榷[J]. *西安理工大学学报*, 2012, 28(3): 326-329.
Tang Anmin, Li Zhihui. Discussions on the equivalence of potential energy principle in elastic mechanics [J]. *Journal of Xi'an University of Technology*, 2012, 28(3): 326-329.
- [10] 何蕴增,杨丽红. 基础材料力学 [M]. 北京: 科学出版社, 2006.

(责任编辑 王卫勋)