

文章编号: 1006-4710(2013)02-0233-05

# 有界噪声作用下 Duffing 系统脉冲控制

吴宏镔, 王国欣, 牛玉俊

(南阳理工学院 数理学院, 河南 南阳 473004)

**摘要:** 考察了用周期脉冲信号实现有界噪声作用下 Duffing 系统混沌控制的可行性。通过随机 Melnikov 方法, 得到周期脉冲信号和有界噪声作用下受迫 Duffing 系统出现混沌的解析条件, 从而得到均方意义下实现混沌控制的参数阈值。数值模拟结果验证了理论结果的正确性。

**关键词:** 周期脉冲; 有界噪声; 混沌控制; 随机 Melnikov 方法

**中图分类号:** O175.13, O324      **文献标志码:** A

## Chaos Control of Duffing System with Bounded Noise Excitation with Periodic Impulsive Signals

WU Honge, WANG Guoxin, NIU Yujun

(School of Math and Science, Nanyang Institute of Technology, Nanyang 473004, China)

**Abstract:** In this paper, the feasibility of Duffing system chaos control under the action of bounded noise achieved with the periodic impulsive signals is investigated. Stochastic Melnikov method is used to obtain the periodic impulsive signals and the chaos analytical conditions of Duffing system under the action of bounded noise, whereby obtaining the parameter threshold to realize chaos control in the sense of mean square. The results from numerical simulation verify the correctness of theoretical results.

**Key words:** periodic impulsive; bounded noise; chaos control; stochastic Melnikov method

脉冲是现实生产生活及科学研究中的常见现象, 经常被用作控制的手段<sup>[1-4]</sup>。脉冲控制是指在系统的运动过程中, 在某些时间点给予系统以外部信号, 使系统的运动状态发生突然改变, 以期达到理想的运动状态。脉冲控制特别适用于经不起长期控制信号作用, 或者控制信号昂贵的控制问题。脉冲控制以其实现控制目的的速度快、经济实惠以及较好的鲁棒性, 受到了广大控制学者的青睐<sup>[5]</sup>。其中, 文献[2]研究了不同类型脉冲信号对确定性混沌系统的控制与同步, 而对于噪声作用下脉冲系统的研究相对较少。文献[6]~[12]研究了白噪声作用下脉冲系统的各种稳定性, 建立了随机脉冲系统稳定性判定定理, 并在一些典型随机混沌系统的脉冲控制与脉冲同步中加以应用。

非线性研究的一个重要方面是系统的动力学行为研究, 如分岔、混沌等。对于脉冲系统来说, 外部的脉冲信号作用, 导致系统的运动状态发生突变, 导

致已有的连续系统的研究方法对脉冲系统不再适用, 致使研究工具缺乏, 使得这方面的研究成果非常少见。在研究混沌的解析方法中, 非光滑系统的 Melnikov 方法和最大 Lyapunov 指数的研究更是脉冲系统研究的拦路虎。其中, 基于 Melnikov 方法对有界噪声和白噪声作用下 Duffing 系统族的脉冲控制方法的研究, 目前还是空白, 是值得进一步研究的问题。

本文尝试采用 Fourier 级数来逼近脉冲所导致的光滑项, 从而用一个连续性的光滑系统来逼近脉冲系统, 进而用光滑系统的随机 Melnikov 方法来研究有界噪声作用下 Duffing 系统的脉冲控制问题。

### 1 用周期脉冲信号实现有界噪声作用下的 Duffing 系统的混沌控制

有界噪声与周期脉冲信号作用下的 Duffing 系统可表示为:

收稿日期: 2012-10-26

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(10902085); 河南省科技厅科技攻关项目(122102210060)。

**作者简介:** 吴宏镔, 女, 副教授, 主要研究方向为应用概率统计与随机动力系统。E-mail: wuhong666 @ 126. com。

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = bx - cx^3 + \varepsilon[d\cos(\omega_1 t) + e\xi(t) - ay] \end{cases} \quad (1)$$

其中  $a, b, c, d, e, \omega_1$  都是非负参数,  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,  $\xi(t)$  为有界噪声, 即:

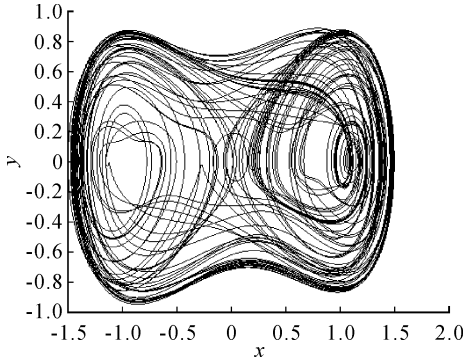
$$\begin{aligned} \xi(t) &= \cos(\omega_2 t + \varphi) \\ \varphi &= \sigma B(t) + \Gamma \end{aligned}$$

式中,  $\omega_2$  为中心频率,  $B(t)$  为标准 Wiener 过程,  $\Gamma$  为  $[0, 2\pi]$  上服从均匀分布的随机变量。有界噪声均值为 0, 协方差函数为:

$$c(\tau) = \frac{e^2}{2} \exp\left(-\frac{\sigma^2 \tau}{2}\right) \cos(\omega_2 \tau)$$

方差为:

$$c(0) = \frac{e^2}{2}$$



双边谱密度函数为:

$$S_\xi(\omega) = \frac{e^2}{2\pi} \left[ \frac{\sigma^2}{4(\omega - \omega_2)^2 + \sigma^4} + \frac{\sigma^2}{4(\omega + \omega_2)^2 + \sigma^4} \right] \quad (2)$$

有界噪声是广义平稳随机过程, 对  $\omega_2$  和  $\sigma$  适当取值,  $\xi(t)$  可以具有大气湍流的 Dryden 谱和 Van Karmon 谱, 能够用来模拟风中的湍流和地震的地面运动。并且噪声的带宽主要由  $\sigma$  决定, 当  $\sigma \rightarrow 0$  时, 它是个窄带过程; 而当  $\sigma \rightarrow \infty$  时,  $\xi(t)$  趋于白噪声, 有界噪声是一个理想的随机激励模型。在  $a = 2.5$ ,  $b = c = 1.0, d = 3.5, e = 0.01, \omega_1 = 1.0, \varepsilon = 0.1, \sigma = 0.8$  时, 系统(1)为混沌状态, 此时的相图和 Poincaré 截面图如图 1 所示。

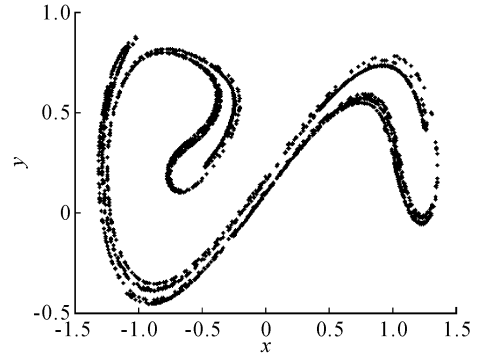


图 1 系统(1)在混沌状态下的相图和 Poincaré 截面图

Fig. 1 The phase diagram and Poincaré section of system (1) under chaos state

为了控制系统(1)的混沌状态, 笔者尝试用如下的周期脉冲信号来控制:

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h(t - nT) \quad (3)$$

$$h(t) = \begin{cases} k & -\Delta + \frac{\pi}{2} \leq t < \Delta + \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (4)$$

式中  $0 < \Delta \ll 1$ 。

$F(t)$  的 Fourier 级数为:

$$F(t) \approx \frac{k\Delta}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k}{n\pi} \sin(n\Delta) \cos\left[n\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right] \quad (5)$$

施加上述脉冲信号(3)后, 有界噪声作用下 Duffing 系统可表示为:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = bx - cx^3 + \varepsilon\left[\left(d + F(t)\right)\cos(\omega_1 t) + e\xi(t) - ay\right] \end{cases} \quad (6)$$

在系统(6)中, 当  $\varepsilon = 0$  时, 可得其三个不动点:

中心  $\left(\sqrt{\frac{b}{c}}, 0\right)$  和  $\left(-\sqrt{\frac{b}{c}}, 0\right)$  及鞍点  $(0, 0)$ , 经过鞍点的同宿轨道为:

$$\begin{aligned} (x^0(t), y^0(t)) &= \left( \pm \sqrt{\frac{2b}{c}} \operatorname{sech}(\sqrt{b}t), \right. \\ &\quad \left. \mp b \sqrt{\frac{2}{c}} \operatorname{sech}(\sqrt{b}t) \tanh(\sqrt{b}t) \right) \quad (7) \end{aligned}$$

## 2 混沌控制解析结果

**定理** 对于脉冲信号(3)作用下的系统(6), 当  $k > k^*$  时, 会出现混沌, 而在  $k < k^*$  时, 不会出现混沌, 从而能在均方意义下用周期脉冲信号(3)实现系统(6)的混沌控制。其中:

$$k^* = \frac{3c\sigma_z^2 - 4ab\sqrt{b}}{3\left(d + \frac{\Delta}{\pi}\right)\pi\omega_1 \sqrt{2c} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega_1}{2\sqrt{b}}\right) + 3\sqrt{2c}\Psi}$$

**证明** 由文献[13]、[14]知系统(6)的 Melnik-

ov 函数为:

$$M(t_1, t_2) = -\frac{2ab^2}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\sqrt{b}t) \tanh^2(\sqrt{b}t) dt - b \sqrt{\frac{2}{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}(\sqrt{b}t) \tanh(\sqrt{b}t) (d + F_N(t_1 - t)) \cos(\omega_1(t_1 - t)) dt - b \sqrt{\frac{2}{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}(\sqrt{b}t) \tanh(\sqrt{b}t) \zeta_{t_2-t} dt = P_1 + P_2 + Z_{t_2}$$

式中的  $P_1, P_2, Z_{t_2}$  详述如下。

$$P_1 = -\frac{4ab\sqrt{b}}{3c}$$

$$P_2 = -\left(d + \frac{k\Delta}{\pi}\right) b \cos(\omega_1 t_1) \sqrt{\frac{2}{c}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}(\sqrt{b}t) \tanh(\sqrt{b}t) \cos(\omega_1 t) dt - \left(d + \frac{k\Delta}{\pi}\right) b \sin(\omega_1 t_1) \times \sqrt{\frac{2}{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}(\sqrt{b}t) \tanh(\sqrt{b}t) \sin(\omega_1 t) dt - b \sqrt{\frac{2}{c}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k}{n\pi} \sin(n\Delta) \cos\left(nt_1 - \frac{n\pi}{2}\right) \cos(\omega_1 t_1) \times \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}(\sqrt{b}t) \tanh(\sqrt{b}t) \cos(nt) \cos(\omega_1 t) dt - b \sqrt{\frac{2}{c}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k}{n\pi} \sin(n\Delta) \cos\left(nt_1 - \frac{n\pi}{2}\right) \sin(\omega_1 t_1) \times \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}(\sqrt{b}t) \tanh(\sqrt{b}t) \cos(nt) \sin(\omega_1 t) dt - b \sqrt{\frac{2}{c}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k}{n\pi} \sin(n\Delta) \sin\left(nt_1 - \frac{n\pi}{2}\right) \sin(\omega_1 t_1) \times \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}(\sqrt{b}t) \tanh(\sqrt{b}t) \sin(nt) \sin(\omega_1 t) dt - b \sqrt{\frac{2}{c}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k}{n\pi} \sin(n\Delta) \sin\left(nt_1 - \frac{n\pi}{2}\right) \cos(\omega_1 t_1) \times \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}(\sqrt{b}t) \tanh(\sqrt{b}t) \sin(nt) \cos(\omega_1 t) dt = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 \quad (8)$$

其中的  $B_1, B_3, B_5$  被积函数均是奇函数,积分区间均关于原点对称,积分值为0。 $B_2, B_4, B_6$  的积分可以用留数方法算出如下结果。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}(\sqrt{b}t) \tanh(\sqrt{b}t) \sin(\omega_1 t) dt = \frac{\pi\omega_1}{b} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega_1}{2\sqrt{b}}\right) \quad (9)$$

故:

$$P_2 = -\left(d + \frac{k\Delta}{\pi}\right) \sin(\omega_1 t_1) \pi\omega_1 \sqrt{\frac{2}{c}} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega_1}{2\sqrt{b}}\right) -$$

$$\frac{1}{\sqrt{2c}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k}{n} \sin(n\Delta) \sin\left(nt_1 - \frac{n\pi}{2} + \omega_1 t_1\right) (n + \omega_1) \times \operatorname{sech}\left(\frac{\pi(n + \omega_1)}{2\sqrt{b}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2c}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k}{n} \sin(n\Delta) \times \sin\left(nt_1 - \frac{n\pi}{2} - \omega_1 t_1\right) (n - \omega_1) \operatorname{sech}\left(\frac{\pi(n - \omega_1)}{2\sqrt{b}}\right)$$

对于  $Z_{t_2}$ , 利用传递函数可得:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-eb \sqrt{\frac{2}{c}}\right) \operatorname{sech}(\sqrt{b}t) \tanh(\sqrt{b}t) \times \exp\{-i\omega t\} dt = -eb \sqrt{\frac{2}{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}(\sqrt{b}t) \tanh(\sqrt{b}t) \cos(\omega t) dt + ieb \sqrt{\frac{2}{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}(\sqrt{b}t) \tanh(\sqrt{b}t) \sin(\omega t) dt$$

该积分的第一项被积函数为奇函数,积分区间关于原点对称,积分值为0。第二项可以用留数方法算出,故:

$$H(\omega) = i\pi e\omega \sqrt{\frac{2}{c}} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2\sqrt{b}}\right)$$

$Z_{t_2}$  为一个广义平稳随机过程,均值为0,方差为:

$$\sigma_Z^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 S_\zeta(\omega) d\omega = \frac{\pi^2 e^2 \sigma^2}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi\omega}{2\sqrt{b}}\right) \left[\frac{1}{4(\omega - \omega_2)^2 + \sigma^4} + \frac{1}{4(\omega + \omega_2)^2 + \sigma^4}\right] d\omega \quad (10)$$

式中的积分可由数值方法得到任意精度的积分值。故在均方意义下系统出现混沌的解析条件为:

$$\langle P_1 \rangle^2 + \langle P_2 \rangle^2 = \sigma_Z^2 \quad (11)$$

即:

$$\frac{4ab\sqrt{b}}{3c} + \left(d + \frac{k\Delta}{\pi}\right) \sin(\omega_1 t_1) \pi\omega_1 \sqrt{\frac{2}{c}} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega_1}{2\sqrt{b}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2c}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k}{n} \sin(n\Delta) \sin\left(nt_1 - \frac{n\pi}{2} + \omega_1 t_1\right) \times (n + \omega_1) \operatorname{sech}\left(\frac{\pi(n + \omega_1)}{2\sqrt{b}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2c}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k}{n} \sin(n\Delta) \times \sin\left(nt_1 - \frac{n\pi}{2} - \omega_1 t_1\right) (n - \omega_1) \operatorname{sech}\left(\frac{\pi(n - \omega_1)}{2\sqrt{b}}\right) = \frac{\pi^2 e^2 \sigma^2}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi\omega}{2\sqrt{b}}\right) \left[\frac{1}{4(\omega - \omega_2)^2 + \sigma^4} + \frac{1}{4(\omega + \omega_2)^2 + \sigma^4}\right] d\omega \quad (12)$$

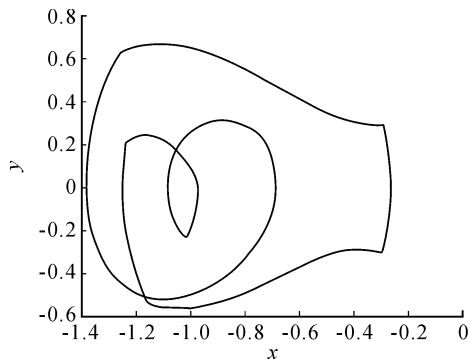
记:

$$k^* = \frac{3c\sigma_z^2 - 4ab\sqrt{b}}{3\left(d + \frac{\Delta}{\pi}\right)\pi\omega_1\sqrt{2c}\operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega_1}{2\sqrt{b}}\right) + 3\sqrt{2c}\Psi} \quad (13)$$

式中:

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ (n + \omega_1)\operatorname{sech}\left(\frac{\pi(n + \omega_1)}{2\sqrt{b}}\right) + (n - \omega_1)\operatorname{sech}\left(\frac{\pi(n - \omega_1)}{2\sqrt{b}}\right) \right] \quad (14)$$

其中,可根据精度要求,在(14)中选取有限项的和。由 Smale-Birkhoff 定理知,当  $k > k^*$  时, Melnikov 函数  $M(t_1, t_2)$  会出现简单零点,对于充分小的  $\varepsilon$ , 系统的稳定流行与不稳定流行横截相交,系统可能会出现 Smale 马蹄意义下的混沌。适当选取控制强度  $k$ ,使得  $k < k^*$ ,  $M(t_1, t_2)$  不会出现零点,有界噪声



作用下的 Duffing 系统不会出现稳定流行与不稳定流行横截相交的情况,不会出现混沌,从而能用周期脉冲信号实现有界噪声作用下 Duffing 系统的混沌控制。

### 3 数值模拟

为验证上述解析结果的正确性,选取如下的参数:  $a = 2.5$ ,  $b = c = 1.0$ ,  $d = 3.5$ ,  $e = 0.01$ ,  $\omega_1 = 1.0$ ,  $\omega_2 = 2.0$ ,  $\omega_3 = 2.5$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\sigma = 0.8$ ,  $\Delta = 0.425$ , 对于式(14),取前 10 项的和,代入式(13),可得  $k^* = -0.498$ ,由前面分析可知,当  $k < k^*$  时,系统不会出现混沌,从而可用周期脉冲信号(3)实现对系统(1)的混沌控制。取  $k = -1.55 < k^*$ ,画出在此条件下系统(6)的相图和 Poincaré 截面图,如图 2 所示,此时系统由混沌运动状态控制为周期运动。

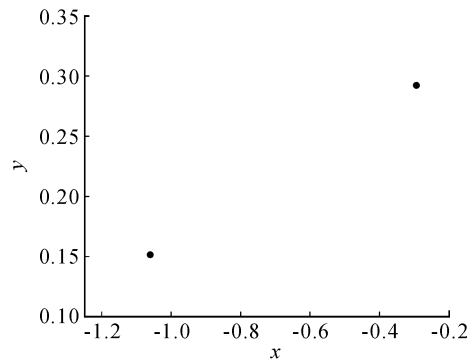


图 2  $k = -1.55$  时系统(6)的相图和 Poincaré 截面图

Fig. 2 The phase diagram and Poincaré section of system (6) when  $k = -1.55$

### 4 结 语

本文尝试了用周期脉冲信号实现有界噪声作用下 Duffing 系统的混沌控制。对于周期脉冲信号,采用 Fourier 级数逼近周期脉冲信号,并通过随机 Melnikov 方法得到能够实现混沌控制的参数阈值,最后用数值模拟方法验证了理论结果。

本文考虑的是周期脉冲信号控制有界噪声作用下 Duffing 系统的混沌,同样的,可以考虑白噪声作用下的情况。

### 参考文献:

- [1] Lakshmikantham V, Bainov D D, Simeonov P S. Theory of Impulsive Differential Equations [M]. Singapore: World Scientific, 1989.
- [2] Yang T. Impulsive Control Theory [M]. Berlin: Springer, 2001.

- [3] Soliman A A. On stability of perturbed impulsive differential systems [J]. Applied Mathematics and Computation, 2002, 133: 105-117.
- [4] Yang T, Chua L O. Impulsive stability for control and synchronization of chaotic system; theory and application to secure communication [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 1997, 44:44-50.
- [5] Mohamad S, Gopalsamy K. Exponent stability preservation in semi-discretions of BAM networks with nonlinear impulse [J]. Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009, 14: 27-50.
- [6] Wu S J, Han D, Meng X Z. p-moment stability of stochastic differential equations with jump [J]. Applied mathematics and computation, 2004, 152: 505-519.
- [7] Yang Z G, Xu D Y, Li X. Exponential p-stability of impulsive stochastic differential equations with delays [J]. Physics Letters A, 2006, 359: 129-137.

- [8] Yang J, Zhong S M, Luo W P. Mean square stability analysis of impulsive stochastic differential equations with delays[J]. Journal of computational and applied mathematics, 2008, 216: 474-483.
- [9] Li C G, Chen L N, Aihara K. Impulsive control of stochastic systems with applications in chaos control, chaos synchronization, and neural networks [J]. Chaos, 2008, 18:023132.
- [10] 牛玉俊,徐伟,戎海武,等. 随机脉冲微分方程的  $P$  阶矩稳定性及其在混沌同步中的应用[J]. 物理学报, 2009, 58(5):2983-2988.  
Niu Yujun, Xu Wei, Rong Haiwu, et al.  $P$ -Moment stability of stochastic impulsive differential equations and impulsive synchronization of Lorenz system excited by parameter white-noise[J]. Acta Physica Sicina, 2009, 58(5): 2983-2988.
- [11] Niu Y J, Xu W, Lu Z Y. Asymptotical p-moment stability of stochastic impulsive differential system and its application to chaos synchronization [J]. Chinese Physics B, 2010, 19: 030512.
- [12] Niu Y J, Liao D, Wang P. Stochastic asymptotical stability for stochastic impulsive differential equations and its application to chaos synchronization [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012, 17:505-512.
- [13] Simiu E. Chaotic transitions in deterministic and stochastic dynamical system[M]. Princeton: Princeton University Press, 2001.
- [14] 刘增荣. 混沌研究中的解析方法[M]. 上海: 上海大学出版社, 2000.

(责任编辑 王卫勋)

(上接第 227 页)

- [11] Deng Z H, Choi K S, Chung F L, et al. Enhanced soft subspace clustering integrating within-cluster and between-cluster information [J]. Pattern Recognition, 2010, 43 (3):767-781.
- [12] Zhi Xiaobin, Fan Jiulun, Zhao Feng. Robust local feature weighting hard C-means clustering algorithm [C]// Proceedings of the Second Sino-foreign-interchange conference on Intelligent Science and Intelligent Data Engineering, Xi'an 2011:591-598.
- [13] Krishnapuram R, Keller J. A possibilistic approach to clustering [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1993, 1: 98-110.
- [14] Krishnapuram R, Keller J. The possibilistic c-means algorithm: Insights and Recommendations [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1996, 4: 385-393.
- [15] Leski J. Towards a robust fuzzy clustering [J]. Fuzzy Sets & Systems, 2003, 137: 215-233.
- [16] Wu K L, Yang M S. Alternative c-means clustering algorithms [J]. Pattern Recognition, 2002, 35 (10): 2267-2278.
- [17] Huber P J. Robust Statistics [M]. New York: Wiley, 1981.
- [18] Blake C L, Merz C J. UCI repository of machine learning databases [DB/OL]. <http://archive.ics.uci.edu/ml/>, 2012-06-18.

(责任编辑 王卫勋)