

文章编号: 1006-4710(2013)03-0325-05

# 矩形明渠自由水跃区紊流边界层的发展

张志昌, 李若冰, 赵莹, 傅铭焕

(西安理工大学 水利水电学院, 陕西 西安 710048)

**摘要:** 通过分析前人对溢流面边界层和矩形明渠自由水跃区流速分布的研究成果, 提出水跃区紊流边界层发展的计算方法。根据 Rajaratnam 对附壁射流、水跃区最大流速分布和壁面切应力公式的试验成果, 采用紊流边界层的动量积分方程, 根据流速分布的对数律, 研究了水跃区紊流边界层的发展。得出了水跃区紊流边界层发展的计算公式, 通过与 Rajaratnam 的实测结果对比, 验证了公式的正确性。首次提出了自由水跃区紊流边界层发展的理论计算方法, 用该方法可以计算水跃区的壁面切应力和沿程阻力系数。

**关键词:** 自由水跃; 紊流边界层; 动量积分方程; 对数律

**中图分类号:** TV131.2+1 **文献标志码:** A

## Development of Turbulent Boundary Layer in Free Hydraulic Jump Area of Rectangular Open Channel

ZHANG Zhichang, LI Ruobing, ZHAO Ying, FU Minghuan

(Faculty of Water Resources and Hydro-Electric Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

**Abstract:** Through the analysis of research results of predecessors about boundary layer in spillway surface and velocity distribution in free hydraulic jump area of rectangular open channel, the calculation method of turbulent boundary layer development in hydraulic jump area is presented. According to Rajaratnam's test results of adhesive wall jet flow, the maximum velocity distribution of hydraulic jump area and the formula of wall shear stress, adopting the momentum integral equation of turbulent boundary layer, the development of turbulent boundary layer in hydraulic jump area is researched based on the logarithm law of velocity distribution. The calculation formula of turbulent boundary layer development in hydraulic jump area is obtained while the validity of equation is verified through comparing Rajaratnam's test results. The theoretical calculation method of turbulent boundary layer development in free hydraulic jump area that can calculate wall shear stress and Resistance coefficient is put forwarded for the first time.

**Key words:** free hydraulic jump; turbulent boundary layer; momentum integral equation; logarithm law

### 1 问题的提出

1904年普朗特创立了边界层理论, 该理论把流体的流动分为两个区域, 一个是远离壁面的势流区, 另一个是壁面附近的边界层区域。自从边界层理论创立以来, 流体力学的研究进入了一个新的阶段。

在二十世纪初到90年代, 国内外对明渠水流边界层进行了大量的研究。1954年 Bauer<sup>[1]</sup>通过试验

研究了陡坡上紊流边界层的发展, 1962年和1965年, 陈椿庭<sup>[2]</sup>和林秉南<sup>[3]</sup>分别用动量积分方程和原型与模型试验资料提出了溢流坝面边界层厚度的计算公式。二十世纪80年代, 我国对明渠紊流边界层进行了大量的研究, 1982年刘宣烈研究了溢流面边界层及其应用<sup>[4]</sup>, 1983年, 董曾南研究了光滑平板边界层特性<sup>[5]</sup>, 1981年, 陈树林对泄水建筑物溢流反弧段的紊流边界层进行了试验研究<sup>[6]</sup>, 1984年, 陶晓峰对光滑溢流坝面水流边界层特性进行了试验

收稿日期: 2012-04-25

作者简介: 张志昌, 男, 教授级高级工程师, 研究方向为水工水力学。E-mail: zhangzhichang1954@163.com。

研究<sup>[7]</sup>,同年,翁情达给出了溢流坝面紊流边界层发展的计算公式<sup>[8]</sup>,1985年李建中发表了泄水建筑物紊流边界层的探讨<sup>[9]</sup>,1988年郑克强、吴持恭提出了陡槽紊流边界层的计算方法<sup>[10]</sup>,1991年,笔者提出了陡坡边界层的分析与计算方法<sup>[11]</sup>,1991年牛争明、李建中发表了溢流坝反弧段动量积分方程的数值解及有关水力特性的试验研究<sup>[12]</sup>。以上研究主要是针对平板、陡坡和带有曲率半径的溢流面,而未涉及到水跃区的边界层问题。

水跃区边界层研究的目的主要是确定水跃区的壁面阻力,为消力池的长度,深度或坎高的计算提供依据。但由于水跃区水流紊动的复杂性,一百多年来对其水力特性的研究主要是从宏观方面进行的,即通过动量方程求水跃的共轭水深,通过模型试验研究水跃长度。近年来张志昌等对消力池深度、坎高<sup>[13-14]</sup>的计算方法进行了简化,其研究成果仍局限于宏观方面。从紊流边界层出发进行的水跃研究国外有少量成果,国内尚未看到这方面的报道。

Rajaratnam 1967年对水跃区的流速分布和切应力分布进行了试验研究。Rajaratnam<sup>[15-16]</sup>认为水跃是一种附壁射流,并认为提出这样一个新概念对于水跃的研究具有极其重要的意义。所谓附壁射流是指一侧贴附于固体边壁之上,而另一侧在无限流体空间中自由扩散的射流。

当平面附壁射流沿光滑边界进入半无限相同的静止流体内时,附壁射流的流速分布如图1所示。图1中, $U_m$ 是边界层厚度为 $\delta$ 处的最大流速,最大流速之半 $U_m/2$ 距边界的距离为 $h'$ ,距边界 $h''$ 处的流速为零,该处即为附壁射流与周围流体混合的上边界。Rajaratnam通过试验得出了以下无量纲关系,为:

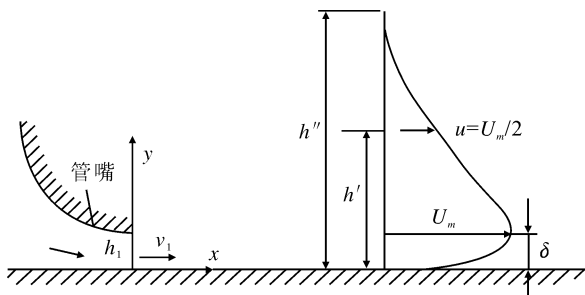


图1 附壁射流流速分布

Fig. 1 Velocity distribution of adhesive wall jet flow

$$\delta = 0.16h' = 0.16(0.5 + 0.065x/h_1)h_1 \quad (1)$$

$$h''/h_1 = 2.25(0.5 + 0.065x/h_1) \quad (2)$$

$$U_m/v_1 = 3.45(x/h_1)^{-0.5} \quad (3)$$

式中, $x$ 为从射流出口算起的下游距离; $v_1$ 为射流出

口平均流速; $h_1$ 为射流出口的水深;边界层厚度近似为 $\delta \approx 0.16h'$ 。

Glauert M B认为在水跃区的流速分布中对于紊流贴壁射流可分内外两层计算。在壁面附近,即内层,流动与平板边界层相仿,流速分布可以用指数律来表示。文献<sup>[17]</sup>分析了Rajaratnam的实验资料后认为,水跃区的流速分布在近壁区具有边界层的特性,而在远离壁面的外部区域流速分布具有射流的特征,在边界层内流速分布符合对数律或壁面律。

1958年,Sigalla A通过试验得到了水跃区的壁面切应力,文献<sup>[18]</sup>引用该成果为:

$$\tau_0/\rho = 0.02825(U_m\delta/\nu)^{-1/4}U_m^2 \quad (4)$$

$$\text{或: } \tau_0/\rho = c_f v_1^2/2 \quad (5)$$

公式(4)适用的范围为弗劳德数 $Fr_1 = 3.9 - 9.78$ 。式中, $c_f$ 为阻力系数,据Rajaratnam的研究 $c_f$ 在跃首为0.0037,至跃尾减至0.0001。

Rajaratnam和Sigalla A对水跃区流速分布和切应力的研究成果,对水跃区紊流边界层的研究具有重要意义。根据该研究在水跃区水流可以分为内区和外区两种状态。在内区水流流动依然符合紊流边界层理论;在外区,水流流动符合附壁射流理论。现根据边界层理论研究平底自由水跃区紊流边界层的发展。

## 2 平底自由水跃区紊流边界层的发展

紊流边界层的动量积分方程为<sup>[19]</sup>:

$$\frac{d\delta_2}{dx} + (2+H)\frac{\delta_2}{U_m}\frac{dU_m}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho U_m^2} \quad (6)$$

式中, $H$ 为形状系数, $H = \delta_1/\delta_2$ ; $\delta_1$ 为边界层的位移厚度; $\delta_2$ 为边界层的动量损失厚度; $U_m$ 为边界层的外部最大流速; $\tau_0$ 为壁面切应力; $\rho$ 为水流的密度; $x$ 为沿水流方向的距离。

根据Schlichting H的研究<sup>[19]</sup>,平板上的阻力公式为:

$$\frac{\tau_0}{\rho U_m^2} = \xi \left(\frac{U_m \delta_2}{\nu}\right)^{-1/4} \quad (7)$$

式中, $\xi$ 为常数; $\nu$ 为粘滞系数。

将式(7)代入式(6)可化为:

$$\frac{d\delta_2}{dx} + (2+H)\frac{\delta_2}{U_m}\frac{dU_m}{dx} = \xi \left(\frac{U_m \delta_2}{\nu}\right)^{-1/4} \quad (8)$$

式中,形状系数 $H$ 的变化很小,一般在1.2~1.3范围内,可以假定为一常数<sup>[20]</sup>。对(8)式变形为:

$$\delta_2^{1/4} \frac{d\delta_2}{dx} + (2+H)\frac{\delta_2^{5/4}}{U_m} \frac{dU_m}{dx} = \xi \left(\frac{U_m}{\nu}\right)^{-1/4} \quad (9)$$

对于无限平板绕流, $U_m$ 为一常数, $dU_m/dx = 0$ 。

但对于水跃区,  $U_m$  不为常数,而是随着距离跃首位置的增加而减小。令式(9)的等式右边为零,求解得:

$$\delta_2 = CU_m^{-(2+H)} \quad (10)$$

将式(10)对  $x$  求导,得:

$$d\delta_2/dx = U_m^{-(2+H)} dC/dx - C \cdot (2+H)U_m^{-(3+H)} dU_m/dx \quad (11)$$

将式(11)代入式(9)化简得:

$$C^{1/4}U_m^{-(9+5H)/4} dC/dx = \xi\nu^{1/4} \quad (12)$$

为了对上式进行积分,采用文献[16]的试验成果,将式(3)代入式(12)积分得:

$$C = \left\{ \frac{5}{4} [8\xi\nu^{1/4} (3.45v_1 \sqrt{h_1})^{(9+5H)/4} \frac{x^{(-1-5H)/8}}{-1-5H}]^{4/5} \right\} \quad (13)$$

将式(3)、(13)代入式(10)化简,得动量损失厚度的计算公式为:

$$\delta_2 = \left( \frac{10\xi\nu^{1/4}}{-1-5H} \right)^{4/5} \cdot \frac{x^{0.9}}{(3.45v_1 \sqrt{h_1})^{0.2}} \quad (14)$$

壁面切应力可以表示为式(7),令式(7)和式(4)相等,得:

$$\xi = 0.02825 (\delta_2/\delta)^{1/4} \quad (15)$$

式中,  $\delta$  为边界层厚度。

根据文献[17]的研究,在紊流边界层中,流速分布符合对数律,即:

$$u/v_* = 2.5 \ln(v_* y/\nu) + 5.56 = 2.5 \ln(Bv_* y/\nu) \quad (16)$$

当  $u = U_m$  时,  $y = \delta$  代入上式得:

$$U_m/v_* = 2.5 \ln(Bv_* \delta/\nu) \quad (17)$$

式中,  $B = 8.926$ 。由文献[20]可知,用流速分布的对数律,边界层位移厚度  $\delta_1$  和动量损失厚度  $\delta_2$  与边界层厚度  $\delta$  之间的关系为:

$$\delta_1 = \delta/\ln(Bv_* \delta/\nu) \quad (18)$$

$$\delta_2 = \frac{\delta}{[\ln(Bv_* \delta/\nu)]^2} (\ln(Bv_* \delta/\nu) - 2) \quad (19)$$

$$H = \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\ln(Bv_* \delta/\nu)}{(\ln(Bv_* \delta/\nu) - 2)} \quad (20)$$

将以上公式(18)、(19)、(20)代入式(14)得:

$$\delta = \left\{ \left[ \frac{0.2825\nu^{1/4} [\ln(Bv_* \delta/\nu)]^2}{-2[3\ln(Bv_* \delta/\nu) - 1]} \right]^4 \right\}^{1/5} \frac{x^{0.9}}{(3.45v_1 \sqrt{h_1})^{0.2}} = \left\{ \left[ \frac{0.14125\nu^{1/4} [\ln(Bv_* \delta/\nu)]^2}{[3\ln(Bv_* \delta/\nu) - 1]} \right]^{4/5} \frac{x^{0.9}}{(3.45v_1 \sqrt{h_1})^{0.2}} \right\} \quad (21)$$

式中,  $v_*$  为摩阻流速,可以计算为:

$$v_*^2 = \xi U_m^2 (U_m \delta_2/\nu)^{-1/4} = 0.02825 (\delta_2/\delta)^{1/4} U_m^2 (U_m \delta_2/\nu)^{-1/4} =$$

$$0.02825 U_m^2 (U_m \delta/\nu)^{-1/4} \quad (22)$$

将式(22)代入式(21)得:

$$\delta = \left\{ \frac{0.14125\nu^{1/4} \{ \ln[0.1681B (U_m \delta/\nu)^{7/8}] \}^2}{3\ln[0.1681B (U_m \delta/\nu)^{7/8}] - 1} \right\}^{4/5} \frac{x^{0.9}}{(3.45v_1 \sqrt{h_1})^{0.2}} \quad (23)$$

公式(23)即为水跃区紊流边界层发展的计算公式。

将  $B = 8.926$ 、 $\nu = 1.14 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  (常温为  $15^\circ$ ) 代入上式,简化得:

$$\delta = \left\{ \frac{0.004615 \times \{ \ln[237921.04 (U_m \delta)^{7/8}] \}^2}{3\ln[237921.04 (U_m \delta)^{7/8}] - 1} \right\}^{4/5} \frac{x^{0.9}}{(3.45v_1 \sqrt{h_1})^{0.2}} \quad (24)$$

因为  $v_1 = \sqrt{gh_1} Fr_1$ ,公式(24)中的  $v_1 \sqrt{h_1}$  可以写成  $\sqrt{gh_1} Fr_1$ ,  $Fr_1$  为跃前断面的弗劳德数。公式(24)即为平底矩形断面自由水跃区紊流边界层厚度的计算公式。将公式(24)和公式(3)代入公式(4)和公式(5),即可得到水跃区的壁面切应力和壁面阻力系数。但由于公式(4)的适用范围为  $Fr_1 = 3.9 - 9.78$ ,所以公式(24)的弗劳德数范围限于  $3.9 - 9.78$  之间。

### 3 算例

某溢流坝如图2所示,已知坝高  $P = 50 \text{ m}$ ,坝上水头  $H = 3.2 \text{ m}$ ,坝宽  $b = 10 \text{ m}$ ,溢流坝通过的流量  $Q = 500 \text{ m}^3/\text{s}$ ,护坦始端的急流水深为:

$$h_1 = q/\sqrt{2g(P+H)(1+c_0P/H)}$$

式中,  $q$  为单宽流量;  $c_0$  为溢流面的粗糙系数的函数,  $c_0 = 0.02$ 。试求由护坦的始端发生水跃所必需的下游缓流水深,并计算水跃长度。

解:

单宽流量为:

$$q = Q/b = 500/10 = 50 \text{ m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$$

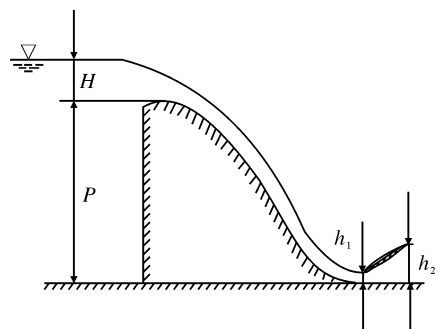


图2 溢流坝剖面图  
Fig. 2 Spillway dam section

跃前水深为:

$$h_1 = \frac{q}{\sqrt{2g(P+H)(1+c_0P/H)}} = \frac{50}{\sqrt{2 \times 9.8(50+3.2)(1+0.02 \times 50/3.2)}} = 1.352 \text{ m}$$

$$Fr_1 = q/\sqrt{gh_1^3} = 50/\sqrt{9.8 \times 1.352^3} = 10.162$$

跃后水深为:

$$h_2 = h_1(\sqrt{1+8Fr_1^2}-1)/2 = 1.352 \times (\sqrt{1+8 \times 10.162^2}-1)/2 = 18.771 \text{ m}$$

$$v_1 = q/h_1 = 50/1.352 = 36.982 \text{ m/s}$$

水跃区的紊流边界层厚度用公式(24)计算,摩擦流速和阻力系数由公式(4)、(5)计算,计算结果如表1所示。可以看出,阻力系数  $c_f$  的计算值在跃

首附近约为 0.004,至跃尾处约为 0.0001,与文献[14]的跃首处约为 0.0037,跃尾处约为 0.0001 基本一致;用公式(24)计算的边界层厚度与文献[14]的公式(1)计算值比较,在跃首附近,边界层厚度差别较大,分析原因,文献[16]主要是根据孔流和闸下出流的试验得到的,与本研究的边界条件不同,其最大流速分布的经验公式存在一定的局限性,例如在  $x=5 \text{ m}$  时,最大流速为 66.346 m/s,比平均流速大 1.8 倍显然是不合理的。在距离跃首  $x/h_1 \geq 15$  以后,理论计算值与文献[14]的计算一致,而文献[21]的研究发现,当  $x/h_1 \geq 15$  以后附壁射流已完全发展,在其后的流动过程中,各个断面的流速分布是完全相似的,试验结果验证了理论计算的准确性。

表1 边界层位移厚度  $\delta$  计算过程

Tab.1 The calculation process of boundary layer thickness  $\delta$

$x/\text{m}$	$v_1/(\text{m/s})$	$h_1/\text{m}$	$U_m/(\text{m/s})$	$\delta/\text{m}$	$\frac{\tau_0}{\rho}/(\text{m/s})$	$c_f$	用文献[16]公式计算的 $\delta/\text{m}$
5	36.982	1.352	66.34571	0.07321	2.736998	0.004002	0.16016
10	36.982	1.352	46.9135	0.138374	1.272778	0.001861	0.21216
20	36.982	1.352	33.17285	0.261872	0.591687	0.000865	0.31616
30	36.982	1.352	27.08552	0.380274	0.378016	0.000553	0.42016
40	36.982	1.352	23.45675	0.495466	0.275081	0.000402	0.52416
50	36.982	1.352	20.98036	0.608336	0.214972	0.000314	0.62816
60	36.982	1.352	19.15236	0.719382	0.175749	0.000257	0.73216
70	36.982	1.352	17.73164	0.828928	0.148227	0.000217	0.83616
80	36.982	1.352	16.58643	0.937211	0.127895	0.000187	0.94016
90	36.982	1.352	15.63783	1.044398	0.112289	0.000164	1.04416
100	36.982	1.352	14.83535	1.150618	0.09995	0.000146	1.14816
110	36.982	1.352	14.14495	1.255981	0.08996	0.000132	1.25216
120	36.982	1.352	13.54276	1.360568	0.081715	0.000119	1.35616
130	36.982	1.352	13.01146	1.464439	0.074799	0.000109	1.46016
140	36.982	1.352	12.53816	1.567671	0.068919	0.000101	1.56416
150	36.982	1.352	12.11301	1.670299	0.063861	9.34E-05	1.66816

### 3 结论

1)在分析溢流面紊流边界层发展和明渠自由水跃区流速分布的基础上,采用流速分布的对数律和边界层的动量积分方程,首次提出了明渠自由水跃区紊流边界层发展的理论计算公式;

2)通过算例验证了公式的正确性,本研究提出的自由水跃区紊流边界层发展的计算方法对水跃区壁面切应力和沿程阻力系数的研究有重要意义。

### 参考文献:

[1] Bauer W J. Turbulent boundary layer on steep slopes[J].

Transacation ASCE, 1954,119:1212-1242.

[2] 陈椿庭.关于溢流高坝的空穴数和不平整度控制[J].水利学报,1962,(4):22-34.

Chen Chunting. About the cavity number and roughness control of spillway high dam[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1962, (4): 22-34.

[3] 林秉南.坝面高速水流掺气发生点的计算[J].水利学报,1965,(5):10-23.

Lin Bingnan. Calculation of aerated point with high speed flow in dam surface[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1965, (5): 10-23.

[4] 刘宣烈,郑国华.溢流面紊流边界层及其应用[J].水力发电,1982,(2):37-48.

- Liu Xuanlie, Zheng Guohua. Application of turbulent boundary layer in spillway surface[J]. Water Power, 1982, (2):37-48.
- [5] 董曾南,丁元. 光滑壁面明渠均匀紊流水力特性[J]. 中国科学, 1989, (11):1206-1218.  
Dong Zengnan, Ding Yuan. Hydraulic characteristics of uniform turbulent flow in smooth spillway surface[J]. China Science, 1989, (11):1206-1218.
- [6] 陈树林. 泄水建筑物反弧紊流边界层发展的探讨[D]. 西安:西安理工大学, 1981. 11.  
Chen Shulin. Discussion on turbulence boundary layer development of reverse curves in outlet structure[D]. Xi'an: Xi'an University of Technology, 1981. 11.
- [7] 陶晓峰,董曾南. 光滑溢流坝面水流边界层特性试验研究[J]. 水利学报, 1984, (6):1-9.  
Tao Xiaofeng, Dong Zengnan. Experimental investigation about boundary layer flow on the smooth surface of an overflow dam [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1984, (6):1-9.
- [8] 翁情达,占秋霞,林祯祺,等. 溢流坝面紊流边界层的发展及其应用[J]. 水利学报, 1984, (6):10-18.  
Weng Qingda, Zhan Qiuxia, Lin Zhenqi, et al. Development of turbulent boundary layer on spillway[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1984, (6):10-18.
- [9] 李建中,赵修荣. 泄水建筑物紊流边界层探讨[J]. 水利学报, 1985, (8):19-25.  
Li Jianzhong, Zhao Xiurong. Discussion on turbulence boundary layer development of outlet structure[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1985, (8):19-25.
- [10] 郑克强,吴持恭. 陡槽紊流边界层的计算[J]. 水利学报, 1988, (8):36-40.  
Zheng Keqiang, Wu Chigong. Calculation of turbulence boundary layer in chute[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1988, (8):36-40.
- [11] 张志昌,李建中,牛争鸣. 陡坡紊流边界层的分析与计算[J]. 陕西机械学院学报, 1991, 7(1):53-59.  
Zhang Zhichang, Li Jianzhong, Niu Zhengming. Calculation and analysis of turbulence boundary layer in chute [J]. Journal of Shaanxi Institute of Mechanical Engineering, 1991, 7(1):53-59.
- [12] 牛争鸣,李建中. 溢流坝反弧动量积分方程的数值解及有关水力特性的的试验研究[J]. 水力发电学报, 1991, (2):63-67.  
Niu Zhengming, Li Jianzhong. Experimental research on numerical solution of momentum integral equations in reverse curve on spillway and its hydraulic characteristics [J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 1991, (2):63-67.
- [13] 张志昌,李若冰,赵莹,等. 综合式消力池深度和坎高的计算. [J]. 西安理工大学学报, 2013, 29(1):81-85.  
Zhang Zhichang, Li Ruobing, Zhao Ying, et al. Calculation of the depth of comprehensive stilling basin and the height of ridge[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2013, 29(1):81-85.
- [14] 张志昌,李若冰. 基于动量方程的挖深式消力池深度的计算[J]. 西北农林科技大学学报, 2012, 40(12):214-218.  
Zhang Zhichang, Li Ruobing. Calculation on the depth of deepened-stilling basin based on momentum equation[J]. Journal of Northwest A&F University, 2012, 40(12):214-218.
- [15] Rajaratnam N. Hydraulic jump[J]. Advances in Hydroscience, 1967, (4):197-280.
- [16] Rajaratnam N. The hydraulic jump as a wall jet[J]. Journal of the Hydraulic Division, 1965, 91(5):107-132.
- [17] 刘沛清. 矩形明渠水跃段速度分布的理论分析[J]. 水利学报, 1993, (9):48-54.  
Liu Peiqing. Theoretical analysis of velocity distribution of hydraulic jump in rectangular open channels [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1993, (9):48-54.
- [18] 张长高. 水动力学[M]. 北京:高等教育出版社, 1993:856-868.
- [19] Shlichting T. Boundary layer theory [M]. New Yqrk: McGraw-HILL, 1979:716-787.
- [20] 李建中,宁利中. 高速水力学[M]. 西安:西北工业大学出版社, 1994:6-28.
- [21] Glauert M R. The wall jet[J]. Fluid Mech, 1956, (1):625-643.

(责任编辑 李虹燕)