文章编号：1006-4710(2013)03-0334-04

基于重心插值的二维抛物型方程的局部 DQ 法

路小平，赵凤群，蒋卓韵

（西安理工大学 理学院，陕西 西安 710054）

摘要：针对传统微分求积法的局限性，提出一种基于重心插值的局部微分求积法，并应用于二维微分方程的求解。在该方法中选择重心插值函数作为基函数以保证方法具有很好的数值稳定性。此外，局部微分求积法能够克服微分求积法中节点过多出现的弊病。因而，本研究方法除了具有传统微分求积法计算量少、精度高等优点外，还具有数值稳定性好、节点可以取到很多的优点。以二维 Burgers 方程组为例，数值结果表明了该算法的有效性。

关键词：重心插值；局部微分求积法；Burgers 方程组

中图分类号：O241　　**文献标志码**：A

A Local Differential Quadrature Method Based on Gravity Interpolation for Solving Two-Dimensional Parabolic Differential Equations

LU Xiaoping, ZHAO Fengqun, JIANG Zhuoyun

(Faculty of Science, Xi' an University of Technology, Xi' an 710054)

Abstract: Aiming at the disadvantages of traditional differential quadrature method, a local differential quadrature method based on gravity interpolation is proposed in this paper, and the two-dimensional parabolic equations are solved by the new method. In this approach, the gravity interpolation function is chosen as the basis function, which guarantees that the method has a very good numerical stability. In addition, the local differential quadrature method can overcome the drawback of differential quadrature method when it has too many nodes. Accordingly, the proposed method not only inherits the advantages of the traditional differential quadrature method such as less calculation and high precision, but also owns the merits such as good numerical stability and node-selected flexibility. Two-dimensional Burgers equations are taken as example to explain the application of the method, and the numerical results indicate the effectiveness of this method.

Key words: gravity interpolation; local differential quadrature method; Burgers equations

微分求积法（ Differential Quadrature Method，简称 DQ 法）是 1971 年 Bellman 和 Casti[1] 提出的一种用于求解微分方程的数值方法。1987 年 Bert[2] 等人首次将 DQ 法用于结构力学分析，发现 DQ 法与传统的数值方法相比具有公式简单、使用方便、计算量少、精度高等优点，目前 DQ 法已被成功地用来求解流体力学、热传导、石油和化学工程中的一些问题[3]。尽管 DQ 法成功地解决了很多问题，但它仍然有局限性，即：①由于函数的近似只能沿着直线进行，因而 DQ 法只适用于规则区域，对于不规则区域无法直接应用；②采用均匀节点分布时节点过多会造成方程病态及结果的不稳定性；③由于微分求积法需要网格线上全部信息，形成的系数矩阵为满阵，不利于问题的求解。因此，如何保留 DQ 法的优点，克服 DQ 法的缺陷，如何对传统的 DQ 法进行改进引起了很多学者的研究兴趣。如 Chen[4] 在其论文中引入微分求积单元法的概念，算法的主要思想是将求解区域划分为若干个规则子域来处理。此后，

收稿日期：2013-06-20

基金项目：陕西省教育厅科学研究计划基金资助项目(11JK0524)。

作者简介：路小平，女，硕士生，研究方向为微分方程数值解。E-mail：71062022@qq.com。
赵凤群，女，教授，研究方向为微分方程数值解及应用研究。E-mail：zhaofq@xaut.edu.cn。

Chen[5]等人把 DQ 法和有限单元法结合起来,形成了求积单元法(QEM),此方法处理高阶导数问题更有效。Shu[6]提出了用径向基函数作为试函数的 DQ 法,但由于计算精度不高往往需要更多的离散节点,影响了计算效率。杜慧静[7]等人提出了基于径向基函数的微分求积区域分裂法,克服了 DQ 法的缺陷,但其改进的过程较复杂。王光法[8]提出了基于重心插值的微分求积法,提高了数值的稳定性。魏学润[9]提出了局部微分求积法(LDQ 法),克服了 DQ 法中节点过多的缺陷。

本研究在传统 DQ 法的基础上,提出以重心插值函数为基函数的局部微分求积法,它不仅保留了传统微分求积法的优点,如公式简单、易于操作、计算效率高等,同时还继承了重心插值公式具有的良好数值稳定性以及 LDQ 法中节点可多选的优点。计算过程中,采用的是低次多项式的移动插值,因而可以得到稀疏的带状系数矩阵,不仅提高了计算效率还可为解决大型工程问题提供可靠的数值方法。

1 基于重心插值的局部微分求积法构造

传统微分求积法的显式表达方式是基于 Lagrange 插值函数的,但这种方法的局限性是离散点不能取得太多,否则 Lagrange 多项式随多项式次数的升高出现 Runge 现象,产生计算的不稳定性,而重心插值具有很好的数值稳定性,所以在本研究中取插值基函数为重心插值基函数,即:

$$p_j(x) = \frac{w_j}{x-x_j} \Big/ \sum_{k=1}^{N} \frac{w_k}{x-x_k} (j = 1,2,\cdots,N) \tag{1}$$

其中,w_j 为权重,计算格式为 $w_j = 1/\prod_{k\neq j}(x_j - x_k)$,即 w_j 只依赖于节点。

局部微分求积法克服了微分求积法中节点过多出现的弊病,因此,笔者采用局部微分求积法,则函数 $f(x)$ 在节点 x_j 处的 r 阶导数可表示为:

$$f^{(r)}(x_j) = \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r} f(x)\Big|_{x=x_j} \approx \sum_{k=j_1}^{jl} A_{jk}^{(r)} f(x_k), \quad (j = 1,2,\cdots,N) \tag{2}$$

其中,$x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{jl}$ 是 x_j 附近的 l 个节点(包括 x_j),l 为局部节点个数,$A_{jk}^{(r)}$ 为点 x_j 处 r 阶导数相应的加权系数,$A_{jk}^{(r)}$ 可由坐标 $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{jl}$ 来决定。下面来推导重心插值的权系数 $A_{jk}^{(r)}$,在(1)式两端同时乘以 $x - x_i (j \neq i)$ 可得:

$$p_j(x)(x - x_i) = \frac{w_j(x-x_i)}{x-x_j} \Big/ \sum_{k=1}^{N} \frac{w_k}{x-x_k} \tag{3}$$

即:

$$p_j(x) \sum_{k=1}^{N} \frac{w_k(x-x_i)}{x-x_k} = \frac{w_j(x-x_i)}{x-x_j} \tag{4}$$

记:$g(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{w_k(x-x_i)}{x-x_k}$

对(4)式两端同时求导得:

$$p'_j(x) g(x) + p_j(x) g'(x) = w_j \left(\frac{x-x_i}{x-x_j}\right)' \tag{5}$$

对 $g(x)$ 求导,并将 $x = x_i$ 代入得:

$$g(x_i) = w_i, g'(x) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{N} \frac{w_k}{x_i - x_k} \tag{6}$$

将(6)式代入(5)式可得:

$$A_{ij}^{(1)} = p'_j(x_i) = \begin{cases} \dfrac{w_j/w_i}{x_i - x_j} & j \neq i \\ -\displaystyle\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{N} \dfrac{w_k/w_i}{x_i - x_k} & j = i \end{cases} \tag{7}$$

根据微分求积法权系数计算公式可求得任意阶权系数 $A_{ij}^{(r)}$ 为:

$$A_{ij}^{(k)} = \sum_{k=1}^{N} A_{ik}^{(1)} A_{kj}^{(k-1)} = \sum_{k=1}^{N} A_{ik}^{(2)} A_{kj}^{(k-2)} = \cdots = \sum_{k=1}^{N} A_{ik}^{(k-1)} A_{kj}^{(1)} \quad (i,j = 1,2,\cdots,N) \tag{8}$$

对于二维函数 $f(x,y)$,取重心插值基函数为:

$$p_j(x) = \frac{w_j}{x-x_j} \Big/ \sum_{k=1}^{N} \frac{w_k}{x-x_k} (j = 1,2,\cdots,N) \tag{9}$$

$$q_j(y) = \frac{m_j}{y-y_j} \Big/ \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k}{y-y_k} (j = 1,2,\cdots,N) \tag{10}$$

则函数 $f(x,y)$ 在节点 (x_i, y_j) 处关于 x 的 h 阶偏导数和关于 y 的 s 阶偏导数分别可表示为:

$$\frac{\partial^h f(x,y)}{\partial x^h}\Big|_{ij} = \sum_{k=k_1}^{kl} A_{ik}^{(h)} f(x_k, y_j) \tag{11}$$

$$\frac{\partial^s f(x,y)}{\partial y^s}\Big|_{ij} = \sum_{k=k_1}^{kr} B_{jk}^{(s)} f(x_i, y_k) \tag{12}$$

其中,$(x_{i_1}, y_{j1}), (x_{i_2}, y_{j2}), \cdots, (x_{i_l}, y_{jr})$ 是节点 (x_i, y_j) 附近的节点(包括 (x_i, y_j)),l 为 x 方向的局部节点个数,r 为 y 方向的局部节点个数。通常为了计算方便取 $l = r$。一阶权系数 $A_{ij}^{(1)}, B_{ij}^{(1)}$ 的表达形式为:

$$A_{ij}^{(1)} = p'_j(x_i) = \begin{cases} \dfrac{w_j/w_i}{x_i - x_j} & j \neq i \\ -\displaystyle\sum_{\substack{k\neq i\\ i=1}}^{N} \dfrac{w_k/w_i}{x_i - x_k} & j = i \end{cases} \tag{13}$$

$$B_{ij}^{(1)} = q'_j(y_i) = \begin{cases} \dfrac{m_j/m_i}{y_i - y_j} & j \neq i \\ -\sum\limits_{k \neq i}^{N} \dfrac{m_k/m_i}{y_i - y_k} & j = i \end{cases} \quad (14)$$

从而根据(8)式可求得任意阶权系数 $A_{ik}^{(h)}$，$B_{ik}^{(s)}$。

2 二维抛物型方程的离散

下面给出二维抛物型偏微分方程初边值问题的基于重心插值的局部微分求积法离散。对下列方程初边值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = F(x,y,u,\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},\cdots,\dfrac{\partial^{h+s} u}{\partial x^h \partial y^s}) \\ (x,y) \in (0,1) \times (0,1), t \in (0,T) \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y), (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ u(0,y,t) = \varphi_1(y,t), u(1,y,t) = \varphi_2(y,t) \\ y \in [0,1], t \in [0,T] \\ u(x,0,t) = \varphi_3(x,t), u(x,1,t) = \varphi_4(x,t) \\ x \in [0,1], t \in [0,T] \end{cases} \quad (15)$$

首先对空间域进行离散，将二维区域$[0,1] \times [0,1]$进行网格剖分，对节点从左至右，从下至上依次编号，如图1所示。

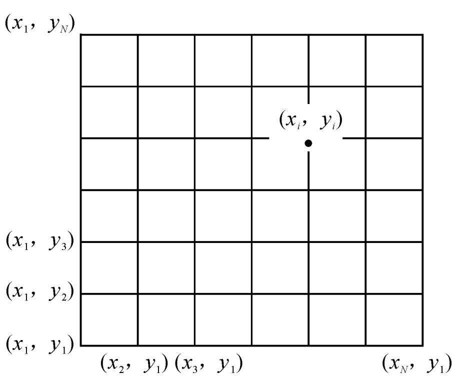

图1 二维区域各节点划分

Fig. 1 The repartition of two dimensional area

将节点(x_i,y_j)附近的节点重新编号为$(x_{i_1},y_{j_1}),(x_{i_2},y_{j_2}),\cdots,(x_{il},y_{jr})$并进行局部插值，根据(11)和(12)式，得到函数$u(x,y,t)$在节点(x_i,y_j,t_n)处的各阶偏导数的表达式为：

$$(\frac{\partial^h u}{\partial x^h})_{ij}^n = \sum_{k=i_1}^{i_l} A_{ik}^{(h)} u_{kj}^n \quad (16)$$

$$(\frac{\partial^s u}{\partial y^s})_{ij}^n = \sum_{m=j_1}^{j_r} B_{im}^{(s)} u_{im}^n \quad (17)$$

$$(\frac{\partial^{s+h} u}{\partial y^s \partial x^h})_{ij}^n = \sum_{m=j_1}^{j_r} \sum_{k=i_1}^{i_l} B_{jm}^{(s)} A_{ik}^{(h)} u_{km}^n \quad (18)$$

这样，可以对方程的右边应用(16)-(18)式进行离散，对方程左边的导数应用向前差分法离散，由此可得微分方程的离散形式为：

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n}{\Delta t} = F(x_i,y_j,u_{ij}^n,\sum_{k=i_1}^{i_l} A_{ik}^{(1)} u_{kj}^n,\sum_{m=j_1}^{j_r} B_{jm}^{(1)} u_{im}^n, \sum_{m=j_1}^{j_r}\sum_{k=i_1}^{i_l} B_{jm}^{(1)} A_{ik}^{(1)} u_{km}^n,\cdots,\sum_{m=j_1}^{j_r}\sum_{k=i_1}^{i_l} B_{jm}^{(s)} A_{ik}^{(h)} u_{km}^n) \quad (19)$$

而(15)式中初边值条件处理为：

$$\begin{cases} u(x_i,y_j,t_1) = \varphi(x_i,y_j) \quad i,j = 1,2,\cdots,N \\ u(x_1,y_j,t_n) = \varphi_1(y_j,t_n), u(x_I,y_j,t_n) = \varphi_2(y_j,t_n) \\ j = 1,2,\cdots,N; n = 1,2,\cdots \\ u(x_i,y_1,t_n) = \varphi_3(x_i,t_n), u(x_i,y_J,t_n) = \varphi_4(x_i,t_n) \\ j = 1,2,\cdots,N; n = 1,2,\cdots \end{cases} \quad (20)$$

由(19)和(20)两式联立即可求得微分方程的数值解。

3 数值算例及分析

考虑非线性二维 Burgers 方程组，即：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = \alpha(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = \alpha(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}) \end{cases} \quad (21)$$

方程的求解域为：$D = [0,1] \times [0,1], t \in [0,T]$。

初值条件为：

$$\begin{cases} u(x,y,0) = \dfrac{-4\alpha\pi\cos(2\pi x)\sin(\pi y)}{2 + \sin(2\pi x)\sin(\pi y)}, \\ v(x,y,0) = \dfrac{-2\alpha\pi\sin(2\pi x)\cos(\pi y)}{2 + \sin(2\pi x)\sin(\pi y)}, \end{cases}$$

$(x,y) \in D$

边界条件为：

$$\begin{cases} u(0,y,t) = -2\alpha\pi e^{-5\pi^2\alpha t}\sin(\pi y), u(1,y,t) = -2\alpha\pi e^{-5\pi^2\alpha t}\sin(\pi y), \\ u(x,0,t) = 0,\ u(x,1,t) = 0,\ v(0,y,t) = 0,\ v(1,y,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ v(x,0,t) = -\alpha\pi e^{-5\pi^2\alpha t}\sin(2\pi x),\ v(x,1,t) = \alpha\pi e^{-5\pi^2\alpha t}\sin(2\pi x), t \geq 0 \end{cases}$$

方程组的精确解为：

$$\begin{cases} u(x,y,t) = -2\alpha\dfrac{2\pi e^{-5\pi^2\alpha t}\cos(2\pi x)\sin(\pi y)}{2 + e^{-5\pi^2\alpha t}\sin(2\pi x)\sin(\pi y)} \\ v(x,y,t) = -2\alpha\dfrac{\pi e^{-5\pi^2\alpha t}\sin(2\pi x)\cos(\pi y)}{2 + e^{-5\pi^2\alpha t}\sin(2\pi x)\sin(\pi y)} \end{cases}$$

计算中取 $N=41$，$l=9$，$\Delta t=0.001$。为了与文献[10]结果相比较，先取 $\alpha=0.1$，计算结果的均方根误差如表 1 所示，可以看到，本研究方法比文献[10]的方法以及传统 DQ 法（取 $N=11$）的计算精度都要高，但相比文献[10]算法，本研究的算法结构简单，容易操作，节点分布采用了最简单的均匀节点分布方式。此外，本研究算法在处理方程的非线性项时也比较容易。表 2 给出了当 $\alpha=0.01$ 和 $\alpha=0.001$时，本研究算法与传统 DQ 法的误差比较，可见本研究算法确实具有优越性。值得注意的是传统 DQ 法节点个数不宜太多，否则会出现数值不稳定的现象。如本算例中 N 取到 11 时效果最好，当 N 继续增大时，算法会失效，而本研究算法在节点个数的选取方面得到了改进，如本例中 N 可以取到 100，甚至更多而基本不影响数值解稳定性，这也正是本研究算法优于传统 DQ 法的所在。

表 1　当 $T=1$，$\alpha=0.1$ 时本研究解与其它算法解的误差比较

Tab. 1　Comparing error of the solution of our method with other method when $T=1$ and $\alpha=0.1$

项目	DQ 法	文献[10]法	本研究算法
u_{error}	4.1421e－002	1.5335e－003	6.3843e－004
v_{error}	1.6583e－002	1.3815e－003	3.6849e－004

表 2　当 $T=1$，$\alpha=0.01$ 和 $\alpha=0.001$ 时本研究解与 DQ 法解的误差比较

Tab. 2　Error comparison between our method and DQ method under $\alpha=0.01$ and $\alpha=0.001$ with $T=1$

项目	$\alpha=0.01$		$\alpha=0.001$	
	DQ 法	本研究算法	DQ 法	本研究算法
u_{error}	2.2128e－004	1.3243e－006	2.2869e－005	2.2261e－009
v_{error}	5.8281e－005	6.6363e－007	1.4476e－006	7.2836e－0010

本研究提出了基于重心插值的局部微分求积法，求解了二维 Burgers 方程组问题。该方法理论可靠，算法简单，易于操作，而且计算精度很高。本方法可以推广用来解决工程技术中的相关问题。

参考文献：

[1] Bellman R E, Casti J. Differential quadrature and long term integration[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1971, 4(34):235-238.

[2] Bert C W, Jang S K, Striz A G. Two new approximate methods for analyzing free vibration of structural components[J]. American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 1988, 26(5):612-618.

[3] 阮苗，王忠民，王砚. FGM 斜板的振动特性分析[J]. 西安理工大学学报，2010，26(1):55-60.
Ruan Miao, Wang Zhongmin, Wang Yan. An analysis of vibration characteristics of FGM skew plates[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2010, 26(1):55-60.

[4] Chen C N. The development of irregular elements for differential quadrature element method steady-state heat conduction analysis[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1999, 170(1):1-14.

[5] Chen W L, Alfred G. High-accuracy plane stress and plate elements in the quadrature element method[J]. International Journal of Solids and Structures, 2000, 37(4):627-647.

[6] Shu C. Solution of partial differential equations by a global radial basis function-based differential quadrature method [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2004, 28(10):1217-1226.

[7] 杜慧静，吴雄华. 基于径向基函数的微分求积区域分裂法及其应用[J]. 高等学校计算数学学报，2005，27(1):165-169.
Du Huijing, Wu Xionghua. Radial basis functions based differential quadrature domain decomposiyion method on irregular domains[J]. Numerical Mathematics Journal of Chinese Universities, 2005, 27(1):165-169.

[8] 王光法，鹿晓阳. 重心插值及其在求解高阶微分方程中的应用[J]. 山东建筑大学学报，2008，23(6):521-525.
Wang Guangfa, Lu Xiaoyang. The barycentric interpolation method and its application in solving initial boundary value problems of high order differential equation[J]. Journal of Shandong Jianzhu University, 2008, 23(6):521-525.

[9] 魏学润. 弹塑性扭转问题的局部微分求积法[D]. 苏州：苏州大学，2010.
Wei Xuerun. Local differential quadrature method for the elastic-plastic torsion problems[D]. Suzhou: Suzhou University, 2010.

[10] Zhao Guozhong, Yu Xijun, Zhang Rongpei. The new numerical method for solving the system of two-dimensional Burgers' equations[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2011, 62(8):3279-3291.

（责任编辑　李虹燕）