文章编号: 1006-4710(2013)04-0475-06

一维非定常对流扩散方程非均匀网格上的高阶紧致差分格式

赵飞, 陈建华, 葛永斌
(宁夏大学 数学计算机学院,宁夏 银川 750021)

摘要: 针对一维非定常对流扩散方程,在非均匀网格上提出了一种两层高精度紧致差分格式,其时间具有2阶精度,空间具有3~4阶精度;然后采用Fourier分析方法给出格式的稳定性条件。最后通过数值算例验证了本文格式对于求解一维含边界层非定常对流扩散问题具有明显的优势。

关键词: 非定常对流扩散方程; 非均匀网格; 高精度紧致差分格式; 边界层

中图分类号: O241.82 **文献标志码:** A

A High Order Compact Difference Scheme on Non-Uniform Grids for the 1D Unsteady Convection Diffusion Equation

ZHAO Fei, CHEN Jianhua, GE Yongbin
(School of Mathematics and Computer Science, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

Abstract: A two-level high order compact difference scheme on non-uniform grids is proposed for solving the 1D unsteady convection diffusion equation. The scheme is the second order accuracy for time and the third to the fourth order accurate for space. Then, Fourier analysis method is employed to get the stability condition of the scheme. Finally, numerical experiments are conducted to demonstrate that the present method has obvious advantages for solving the 1D unsteady convection diffusion problems with boundary layers.

Key words: unsteady convection diffusion equations; non-uniform grid; high order compact difference scheme; boundary layer

有限差分法是求解非定常对流扩散方程最常用的数值计算方法之一。例如古典显格式、古典隐格式、Crank-Nicolson (C-N)格式、Saul'ev 格式、Peaceman-Rachaford 格式、Douglas 格式等。由于这些格式普遍精度较低,因此又有不少学者提出了高精度的差分格式。如:文献[1]构造出了一种求解一维非定常对流扩散方程的指数型高阶紧致差分格式,在时间上与空间上都达到了四阶精度;文献[2]给出了一种求解一维含源项非定常对流扩散方程的高精度紧致隐格式,其时间具有二阶精度,空间具有四阶精度;文献[3]建立了一种求解第二类边界条件对流扩散问题的高阶紧致边界值方法,其时间与空间均具有四阶精度;文献[4]提出了一种求解一维非定常变系数对流扩散方程的时间二阶空间四阶的差分格式;文献[5]提出了一种求解一维变系数对流扩散方程的交替分段 Crank-Nicolson 方法。这些格式大多都是基于均匀网格构造的。文献[6-8]针对定常对流扩散方程,采用坐标变换方法建立了非均匀网格上的高精度紧致差分格式;文献[9-11]不采用坐标变换,而是直接在物理区域上建立了非均匀网格的紧致差分格式。这些差分格式对于求解边界层问题、大梯度问题和局部奇性问题具有明显的优势。但是已有的非均匀网格上的高精度紧致差分格式大多是针对定常问题的,对非定常问题求解的

收稿日期: 2013-06-20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11061025, 11361045);霍英东教育基金会高等院校青年教师基金项目(121105);宁夏自然科学基金项目(NZ12123);宁夏大学自然科学基金项目(ZR1120)。
作者简介: 赵飞,男,硕士生,研究方向为偏微分方程数值解法。E-mail:zhaof_nxdx@126.com。
葛永斌,男,博导,研究方向为偏微分方程数值解法及科学计算可视化。E-mail:gyb@nxu.edu.cn。

非均匀网格方法的研究报道还非常少见。

本文针对一维非定常对流扩散方程,考虑方程在 $n+\frac{1}{2}$ 时刻的值,时间上利用中心差分,空间上采用截断误差余项修正的方法及加权平均的思想,最终推导出求解该问题在非均匀网格上的一种两层高精度全隐式紧致差分格式;然后采用 Fourier 分析法给出格式的稳定性条件;最后通过数值实验对本文方法的精确性和可靠性进行了验证。

1 高阶紧致差分格式的建立

一维变系数非定常对流扩散方程的基本形式为:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+p(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,t)$$
$$a_1\leqslant x\leqslant a_2,\ t>0 \tag{1}$$

式中,a 为扩散项系数,$p(x,t)$ 为对流项系数,$f(x,t)$ 为源项。采用均匀网格剖分,步长用 τ 表示,对空间求解区域 $[a_1,a_2]$ 进行非均匀网格剖分为 N 个子区间:$a_1=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_N=a_2$,并且定义空间步长 $x_b=x_i-x_{i-1}$,$x_f=x_{i+1}-x_i$,$1\leqslant i\leqslant N-1$。

为了方便数值格式的建立,将式(1)变形为:

$$-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+p(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,t)-\frac{\partial u}{\partial t}$$
$$a_1\leqslant x\leqslant a_2,\ t>0 \tag{2}$$

将点 u_{i+1} 和 u_{i-1} 在点 x_i 处作泰勒展开,可得:

$$u_{i+1}=u_i+x_f\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i+\frac{x_f^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i+\frac{x_f^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i+\frac{x_f^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i+\frac{x_f^5}{5!}\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right)_i+O(x_f^6) \tag{3}$$

$$u_{i-1}=u_i-x_b\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i+\frac{x_b^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i-\frac{x_b^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i+\frac{x_b^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i-\frac{x_b^5}{5!}\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right)_i+O(x_b^6) \tag{4}$$

式(3)与式(4)相减得:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i=\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{x_b+x_f}-\frac{1}{2}(x_f-x_b)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i-\frac{1}{6}(x_f^2+x_b^2-x_fx_b)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i-\frac{1}{24}(x_f-x_b)(x_f^2+x_b^2)\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i+O\left(\frac{x_f^5+x_b^5}{x_b+x_f}\right) \tag{5}$$

由式(3)乘 x_b 加式(4)乘 x_f 得:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i=\frac{2}{x_b+x_f}\left[\frac{u_{i+1}}{x_f}+\frac{u_{i-1}}{x_b}-\left(\frac{1}{x_f}+\frac{1}{x_b}\right)u_i\right]-\frac{1}{3}(x_f-x_b)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i-\frac{1}{12}(x_f^2+x_b^2-x_fx_b)\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i-\frac{1}{60}(x_f-x_b)(x_f^2+x_b^2)\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right)_i+O\left(\frac{x_f^5+x_b^5}{x_b+x_f}\right) \tag{6}$$

定义空间非均匀网格上的一阶和二阶中心差分算子:

$$\delta_x u_i=\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{x_b+x_f} \tag{7}$$

$$\delta_x^2 u_i=\frac{2}{x_b+x_f}\left[\frac{u_{i+1}}{x_f}+\frac{u_{i-1}}{x_b}-\left(\frac{1}{x_f}+\frac{1}{x_b}\right)u_i\right] \tag{8}$$

则式(5)与式(6)可改写为:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i=\delta_x u_i+\frac{1}{2}(x_f-x_b)\delta_x^2 u_i-\frac{1}{6}x_fx_b\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i-\frac{1}{24}x_fx_b(x_f-x_b)\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i+\frac{1}{120}(x_f-x_b)^2(x_f+x_b)^2\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right)_i+O\left(\frac{x_f^5+x_b^5}{x_b+x_f}\right) \tag{9}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i=\delta_x^2 u_i-\frac{1}{3}(x_f-x_b)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i-\frac{1}{12}(x_f^2+x_b^2-x_fx_b)\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i-\frac{1}{60}(x_f-x_b)(x_f^2+x_b^2)\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right)_i+O\left(\frac{x_f^5+x_b^5}{x_b+x_f}\right) \tag{10}$$

为了得到高精度的数值格式,将式(9)和式(10)中三阶和四阶导数项进行处理,为此对原方程式(1)关于 x 求导,整理可得:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=\frac{1}{a}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{p}{a}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x}\left[f(x,t)-\frac{\partial u}{\partial t}\right] \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}&=\frac{1}{a}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2}{a}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{p}{a}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[f(x,t)-\frac{\partial u}{\partial t}\right]=\frac{1}{a}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\\&\quad\frac{2}{a}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{p}{a^2}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{p^2}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{p}{a^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[f(x,t)-\frac{\partial u}{\partial t}\right]-\frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[f(x,t)-\frac{\partial u}{\partial t}\right]\end{aligned} \tag{12}$$

将式(11)和式(12)分别代入式(9)和式(10),并利用式(7)和式(8)对其中的一阶和二阶导数进行离散,然后将其代入式(2),即可得如下形式的离散格式:

$$(-A_i\delta_x^2+B_i\delta_x)u_i+\tau_i=F_i \tag{13}$$

式中:

$$F_i=(1+K_1\delta_x+K_2\delta_x^2)\left[f(x,t)-\frac{\partial u}{\partial t}\right]_i$$

$$A_i = a - \left(-\frac{x_f - x_b}{2} + K_1 + 2K_2\delta_x\right)p_i$$

$$B_i = (1 + K_1\delta_x + K_2\delta_x^2)p_i$$

$$\tau_i = H_3\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right)_i + O\left(\frac{x_f^5 + x_b^5}{x_b + x_f}\right)$$

$$K_1 = \frac{H_1}{a} + \frac{H_2}{a^2}p_i$$

$$K_2 = \frac{H_2}{a}$$

$$H_1 = \frac{a}{3}(x_f - x_b) - \frac{p_i}{6}x_f x_b$$

$$H_2 = \frac{a}{12}(x_f^2 + x_b^2 - x_f x_b) - \frac{p_i}{24}x_f x_b(x_f - x_b)$$

$$H_3 = \frac{a}{60}(x_f - x_b)(x_f^2 + x_b^2)\left[\frac{p_i}{2}(x_f - x_b) + a\right]$$

考虑方程式(13)在 $n + \frac{1}{2}$ 时刻的值,并对时间导数项用 $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + O(\tau^2)$ 进行离散,$u_i^{n+\frac{1}{2}}$ 用 u_i^n 和 u_i^{n+1} 做算术加权平均,$p_i^{n+\frac{1}{2}}$ 用 p_i^n 和 p_i^{n+1} 做算术加权平均,$f_i^{n+\frac{1}{2}}$ 用 f_i^n 和 f_i^{n+1} 做算术加权平均,略去高阶项,化简整理可得式(1)在非均匀网格上的高阶紧致差分格式:

$$q_i u_i^{n+1} + q_{i-1}u_{i-1}^{n+1} + q_{i+1}u_{i+1}^{n+1} = r_i u_i^n + r_{i-1}u_{i-1}^n + r_{i+1}u_{i+1}^n + d_i(f_i^{n+1} + f_i^n) + d_{i-1}(f_{i-1}^{n+1} + f_{i-1}^n) + d_{i+1}(f_{i+1}^{n+1} + f_{i+1}^n) \tag{14}$$

式中:

$$q_i = \frac{2}{\tau} + \frac{2\bar{A}_i}{x_f + x_b}\left(\frac{1}{x_f} + \frac{1}{x_b}\right)$$

$$q_{i-1} = -\frac{2\bar{A}_i}{x_b(x_f + x_b)} - \frac{\bar{B}_i}{x_f + x_b}$$

$$q_{i+1} = -\frac{2\bar{A}_i}{x_f(x_f + x_b)} + \frac{\bar{B}_i}{x_f + x_b}$$

$$r_i = \frac{2}{\tau} - \frac{2\bar{\bar{A}}_i}{x_f + x_b}\left(\frac{1}{x_f} + \frac{1}{x_b}\right)$$

$$r_{i-1} = \frac{2\bar{\bar{A}}_i}{x_b(x_f + x_b)} + \frac{\bar{\bar{B}}_i}{x_f + x_b}$$

$$r_{i+1} = \frac{2\bar{\bar{A}}_i}{x_f(x_f + x_b)} - \frac{\bar{\bar{B}}_i}{x_f + x_b}$$

$$d_i = 1 - \frac{2K_2}{x_f + x_b}\left(\frac{1}{x_f} + \frac{1}{x_b}\right)$$

$$d_{i-1} = -\frac{K_1}{x_f + x_b} + \frac{2K_2}{x_b(x_f + x_b)}$$

$$d_{i+1} = \frac{K_1}{x_f + x_b} + \frac{2K_2}{x_f(x_f + x_b)}$$

$$\bar{A}_i = a - \left(-\frac{x_f - x_b}{2} + K_1 + 2K_2\delta_x\right)\frac{p_i^n + p_i^{n+1}}{2} - \frac{2K_2}{\tau}$$

$$\bar{B}_i = (1 + K_1\delta_x + K_2\delta_x^2)\frac{p_i^n + p_i^{n+1}}{2} + \frac{2K_1}{\tau}$$

$$\bar{\bar{A}}_i = a - \left(-\frac{x_f - x_b}{2} + K_1 + 2K_2\delta_x\right)\frac{p_i^n + p_i^{n+1}}{2} + \frac{2K_2}{\tau}$$

$$\bar{\bar{B}}_i = (1 + K_1\delta_x + K_2\delta_x^2)\frac{p_i^n + p_i^{n+1}}{2} - \frac{2K_1}{\tau}$$

从推导过程可知,此格式的截断误差为:

$$O\left(\tau^2 + (x_f - x_b)(x_f^2 + x_b^2) + \frac{x_f^5 + x_b^5}{x_b + x_f}\right)$$

即当 $x_f = x_b$ 时,本文格式可以达到四阶精度;当 $x_f \neq x_b$ 时,本文格式可以达到三阶精度。

2 稳定性分析

采用 Fourier 方法分析上述格式的稳定性。假设右端 f_i^n 无误差存在。

用 e_i^n 表示计算 u_i^n 所产生的误差,令 $e_i^n = v^n e^{i\sigma x_j}$,则 $e_{i-1}^n = v^n e^{i\sigma(x_j - x_b)}$,$e_{i+1}^n = v^n e^{i\sigma(x_j + x_f)}$。其中,$i = \sqrt{-1}$ 为虚数单位,σ 为波数。将 e_i^n、e_{i-1}^n 和 e_{i+1}^n 代入式(2)化简可得格式误差的增长因子为:

$$G(\tau,k) = \frac{v^{n+1}}{v^n} = \frac{r_i + r_{i-1}e^{-i\sigma x_b} + r_{i+1}e^{i\sigma x_f}}{q_i + q_{i-1}e^{-i\sigma x_b} + q_{i+1}e^{i\sigma x_f}} = \frac{r_i + r_{i-1}\cos(\sigma x_b) + r_{i+1}\cos(\sigma x_f) + i[-r_{i-1}\sin(\sigma x_b) + r_{i+1}\sin(\sigma x_f)]}{q_i + q_{i-1}\cos(\sigma x_b) + q_{i+1}\cos(\sigma x_f) + i[-q_{i-1}\sin(\sigma x_b) + q_{i+1}\sin(\sigma x_f)]}$$

所以:

$$|G(\tau,k)|^2 - 1 = \frac{[r_i + r_{i-1}\cos(\sigma x_b) + r_{i+1}\cos(\sigma x_f)]^2 + [-r_{i-1}\sin(\sigma x_b) + r_{i+1}\sin(\sigma x_f)]^2}{[q_i + q_{i-1}\cos(\sigma x_b) + q_{i+1}\cos(\sigma x_f)]^2 + [-q_{i-1}\sin(\sigma x_b) + q_{i+1}\sin(\sigma x_f)]^2} - 1 =$$

$$\frac{(r_{i-1} + r_i + r_{i+1})^2 - 4r_i r_{i-1}\sin^2\left(\frac{\sigma x_b}{2}\right) - 4r_i r_{i+1}\sin^2\left(\frac{\sigma x_f}{2}\right) - 4r_{i-1}r_{i+1}\sin^2\left(\frac{\sigma x_b + \sigma x_f}{2}\right)}{(q_{i-1} + q_i + q_{i+1})^2 - 4q_i q_{i-1}\sin^2\left(\frac{\sigma x_b}{2}\right) - 4q_i q_{i+1}\sin^2\left(\frac{\sigma x_f}{2}\right) - 4q_{i-1}q_{i+1}\sin^2\left(\frac{\sigma x_b + \sigma x_f}{2}\right)} - 1 =$$

$$\frac{4(q_i q_{i-1} - r_i r_{i-1})\sin^2\left(\frac{\sigma x_b}{2}\right) + 4(q_i q_{i+1} - r_i r_{i+1})\sin^2\left(\frac{\sigma x_f}{2}\right) + 4(q_{i-1}q_{i+1} - r_{i-1}r_{i+1})\sin^2\left(\frac{\sigma x_b + \sigma x_f}{2}\right)}{[q_i + q_{i-1}\cos(\sigma x_b) + q_{i+1}\cos(\sigma x_f)]^2 + [-q_{i-1}\sin(\sigma x_b) + q_{i+1}\sin(\sigma x_f)]^2} \tag{15}$$

式中，$(r_{i-1}+r_i+r_{i+1})^2=(q_{i-1}+q_i+q_{i+1})^2=\frac{4}{\tau^2}$。

当 $x_f=x_b=h$ 时，由于：

$$\sin^2\left(\frac{\sigma x_b+\sigma x_f}{2}\right)=\sin^2(\sigma h)=\left(2\sin(\frac{\sigma h}{2})\cos(\frac{\sigma h}{2})\right)^2=4\sin^2(\frac{\sigma h}{2})\left(1-\sin^2(\frac{\sigma h}{2})\right)$$

因此：

$$|G(\tau,k)|^2-1=$$

$$\frac{4(q_iq_{i-1}-r_ir_{i-1})\sin^2(\frac{\sigma h}{2})+4(q_iq_{i+1}-r_ir_{i+1})\sin^2(\frac{\sigma h}{2})+16(q_{i-1}q_{i+1}-r_{i-1}r_{i+1})\sin^2(\frac{\sigma h}{2})\left(1-\sin^2(\frac{\sigma h}{2})\right)}{[q_i+q_{i-1}\cos(\sigma x_b)+q_{i+1}\cos(\sigma x_f)]^2+[-q_{i-1}\sin(\sigma x_b)+q_{i+1}\sin(\sigma x_f)]^2}=$$

$$\frac{\left[4(q_iq_{i-1}-r_ir_{i-1})+4(q_iq_{i+1}-r_ir_{i+1})+16(q_{i-1}q_{i+1}-r_{i-1}r_{i+1})\left(1-\sin^2(\frac{\sigma h}{2})\right)\right]\sin^2(\frac{\sigma h}{2})}{[q_i+q_{i-1}\cos(\sigma x_b)+q_{i+1}\cos(\sigma x_f)]^2+[-q_{i-1}\sin(\sigma x_b)+q_{i+1}\sin(\sigma x_f)]^2}=$$

$$\frac{\frac{16}{9}\sin^2(\frac{\sigma h}{2})\left[-18a^2+6a^2\sin^2(\frac{\sigma h}{2})-9p^2h^2\sin^2(\frac{\sigma h}{2})\right]}{[q_i+q_{i-1}\cos(\sigma x_b)+q_{i+1}\cos(\sigma x_f)]^2+[-q_{i-1}\sin(\sigma x_b)+q_{i+1}\sin(\sigma x_f)]^2}\leqslant 0$$

即式(14)在均匀网格上是无条件稳定的。

当 $x_f\neq x_b$，且 $p(x,t)=0$ 时，式(14)是条件稳定的。具体证明步骤如下。

令 $x_f=mx_b$，且 $m>0$。

1）要使格式稳定，需满足条件：

$$|G(\tau,k)|^2-1\leqslant 0$$

2）要使 $|G(\tau,k)|^2-1\leqslant 0$，由式(15)知需满足条件：

$$4(q_iq_{i-1}-r_ir_{i-1})\sin^2(\frac{\sigma x_b}{2})+$$
$$4(q_iq_{i+1}-r_ir_{i+1})\sin^2(\frac{\sigma x_f}{2})+$$
$$4(q_{i-1}q_{i+1}-r_{i-1}r_{i+1})\sin^2(\frac{\sigma x_b+\sigma x_f}{2})\leqslant 0 \quad (16)$$

3）当满足以下条件时，式(16)成立。

$$\begin{cases}q_iq_{i-1}-r_ir_{i-1}\leqslant 0\\ q_iq_{i+1}-r_ir_{i+1}\leqslant 0\\ q_{i-1}q_{i+1}-r_{i-1}r_{i+1}\leqslant 0\end{cases}$$

即：
$$\begin{cases}r_ir_{i-1}-q_iq_{i-1}\geqslant 0\\ r_ir_{i+1}-q_iq_{i+1}\geqslant 0\\ r_{i-1}r_{i+1}-q_{i-1}q_{i+1}\geqslant 0\end{cases}$$

解得 $\frac{5-\sqrt{17}}{4}\leqslant m\leqslant\frac{5+\sqrt{17}}{4}$，即式(14)在非均匀网格上取 $p(x,t)=0$ 是条件稳定的。

3 数值算例

为了验证本文数值格式的效果，考察如下两个有精确解的算例，在非均匀网格上本文选取计算效果最好的 λ。

算例1
$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<1,\ t>0\\ u(x,0)=0,\ u(0,t)=0,\ u(1,t)=1\end{cases}$$

其精确解为：

$$u(x,t)=\frac{e^{Rex}-1}{e^{Re}-1}+$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m m\pi}{(m\pi)^2+\frac{Re^2}{4}}e^{\frac{Re(x-1)}{2}}\sin(m\pi x)e^{-[\frac{(m\pi)^2}{Re}+\frac{Re}{4}]t}$$

算例2
$$\frac{\partial u}{\partial t}+x\frac{\partial u}{\partial x}-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)$$
$$-1\leqslant x\leqslant 1,\ t>0$$

其精确解为：$u(x,t)=\tanh[xe^{-t}/(4\sqrt{a})]$。其中右端项 $f(x,t)$ 及初边值条件均由精确解给定。

对于算例1，在 $x=1$ 处有跳跃边界，为此对其空间区域[0,1]采用以下网格分布函数生成非均匀网格。

$x_i=\frac{i}{N}+\frac{\lambda}{\pi}\sin(\frac{\pi i}{N})$，其中 N 是对求解区域剖分后的子区间的个数，λ 为网格伸缩参数，用来调节网格点在某一区域的密集程度，且 $-1\leqslant\lambda\leqslant 1$。当 $0<\lambda\leqslant 1$ 时，网格点在右边界附近分布密集；当 $-1\leqslant\lambda<0$ 时，网格点在左边界附近分布密集；当 $\lambda=0$ 时，网格剖分为均匀网格。

对于算例2，在 $x=0$ 处有跳跃边界，为此对其空间区域[-1,1]采用以下网格分布函数生成非均匀网格：$x_i=\frac{i}{N}+\frac{\lambda}{2\pi}\sin(\frac{2\pi i}{N})$，当 $0<\lambda\leqslant 1$ 时，网

格点在 $x=0$ 附近加密,并且 λ 越大,加密程度越明显;当 $\lambda=0$ 时,网格剖分为均匀网格。

定义 最大绝对误差:

$$Error = \max\left| u_{i精确} - u_{i计算} \right|$$

$$收敛阶:Rate = \frac{\log[Error(N_1)/Error(N_2)]}{\log[(N_2)/(N_1)]}$$

其中 $Error(N_1)$ 和 $Error(N_2)$ 分别为网格数为 N_1 和 N_2 时对应的最大绝对误差。

表 1 和表 2 分别给出了算例 1 在 $T=1.0$、$\tau=\left(\frac{1}{N}\right)^2$、雷诺数分别取 100 和 1 000 时,在不同网格点数下 C-N 格式、本文格式的最大绝对误差和收敛阶。可以看出,本文格式在均匀网格上,当 $Re=100$ 时,计算精度达到四阶,当 $Re=1\ 000$ 时,计算精度达到二阶,而在非均匀网格上的计算误差要比均匀网格上的计算误差小很多,并且可以达到四阶精度。

表 1 算例 1 当 $Re=100$ 时最大绝对误差及收敛阶

Tab. 1 The maximum absolute error and convergence rate at $Re=100$ for Example 1

网格数	C-N 格式		本文格式均匀网格		本文格式非均匀网格($\lambda=0.60$)	
	Error	*Rate*	*Error*	*Rate*	*Error*	*Rate*
10	6.686×10^{-1}	–	3.023×10^{-1}	–	2.531×10^{-2}	–
20	4.353×10^{-1}	0.62	9.774×10^{-2}	1.63	3.506×10^{-3}	2.85
40	1.938×10^{-1}	1.17	1.566×10^{-2}	2.64	3.623×10^{-4}	3.27
80	5.574×10^{-2}	1.80	1.329×10^{-3}	3.56	2.246×10^{-5}	4.01

表 2 算例 1 当 $Re=1\ 000$ 时最大绝对误差及收敛阶

Tab. 2 The maximum absolute error and convergence rate at $Re=1\ 000$ for Example 1

网格数	C-N 格式		本文格式均匀网格		本文格式非均匀网格($\lambda=0.67$)	
	Error	*Rate*	*Error*	*Rate*	*Error*	*Rate*
40	8.518×10^{-1}	–	6.188×10^{-1}	–	2.168×10^{-1}	–
80	7.241×10^{-1}	0.23	3.833×10^{-1}	0.69	6.187×10^{-2}	1.81
160	5.171×10^{-1}	0.49	1.512×10^{-1}	1.34	8.277×10^{-3}	2.90
320	2.634×10^{-1}	0.97	3.049×10^{-2}	2.31	5.533×10^{-4}	3.90

从表 1 和表 2 可以明显看出,本文格式在非均匀网格上的误差很小,而均匀网格上在边界层附近有较大的误差,C-N 格式则表现出了很大的误差。这充分表明了对于含有边界层的问题,本文格式在非均匀网格上的优越性。

对于算例 2,表 3 和表 4 分别给出了 $T=1.0$、$\tau=\left(\frac{1}{N}\right)^2$,$a$ 分别取 10^{-4} 和 10^{-5} 两种情况下均匀网格和非均匀网格的最大绝对误差,其中非均匀网格分布均选取结果最好时对应的伸缩参数 λ 。

表 3 算例 2 当 $a=10^{-4}$时最大绝对误差

Tab. 3 The maximum absolute error at $a=10^{-4}$ for Example 2

网格数	本文格式均匀网格	本文格式非均匀网格($\lambda=0.80$)
16	4.132×10^{-1}	8.074×10^{-2}
32	1.763×10^{-1}	4.982×10^{-2}
64	6.127×10^{-2}	3.950×10^{-2}
128	4.140×10^{-2}	3.946×10^{-2}

表 4 算例 2 当 $a=10^{-5}$时最大绝对误差

Tab. 4 The maximum absolute error at $a=10^{-5}$ for Example 2

网格数	本文格式均匀网格	本文格式非均匀网格($\lambda=0.92$)
64	3.517×10^{-1}	4.305×10^{-2}
128	1.256×10^{-1}	3.940×10^{-2}
256	4.943×10^{-2}	3.947×10^{-2}
512	4.011×10^{-2}	3.950×10^{-2}

以 $N=64$ 为例,从表 3 和表 4 可以看出,在相同网格数下,非均匀网格上的计算误差明显小于均匀网格。这充分表明了对于含有边界层的问题,采用非均匀网格计算的必要性和重要性。

4 结 论

本文建立了一种在非均匀网格上求解一维非定常对流扩散方程的高阶紧致差分格式,其时间具有 2 阶精度,空间具有 3 ~4 阶精度,并且采用 Fourier 分析方法给出格式的稳定性条件。

当网格参数 $\lambda = 0$ 时,格式退化为均匀网格上的高阶紧致差分格式。

含有边界层对流扩散问题的数值实验结果表明,在相同网格数下,非均匀网格上的计算效果明显优于均匀网格。

此外,本文方法可以推广到求解二维和三维非定常对流扩散问题中去。

参考文献:

[1] Tian Z F, Yu P X. A high-order exponential scheme for solving 1D unsteady convection-diffusion equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2011, 235,(8): 2477-2491.

[2] 葛永斌,田振夫,吴文权. 含源项非定常对流扩散方程的高精度紧致隐式差分方法[J]. 水动力学研究与进展(A辑),2006, 21(5): 619-625.
Ge Yongbin, Tian Zhenfu, Wu Wenquan. A high-order compact implicit difference method for the unsteady convection-diffusion equation with source term[J]. Journal of Hydrodynamics (A), 2006, 21(5): 619-625.

[3] Mehdi D, Akbar M. High-order compact boundary value method for the solution of unsteady convection-diffusion problems[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2008, 79: 683-699.

[4] Spotz W F, Carey G F. Extension of high-order compact schemes to time-dependent problems [J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2001, 17: 657-672.

[5] 王文洽. 变系数对流扩散方程的交替分段 Crank-Nicolson 方法[J]. 应用数学和力学,2004, 24 (1): 29-36.
Wang Wenqia. The alternating segment Crank-Nicolson method for solving convection-diffusion equation with variable coeffient[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2004, 24 (1): 29-36.

[6] Cho J Y, Schultz D H. A High-order difference method for steady state Navier-Stokes equations[J]. Computers and Mathematics with Applications, 1994, 27(11): 105-119.

[7] Zhang J, Ge L X, Gupta M M. Fourth order compact difference schemes for 3D convection diffusion equation with boundary layers on non-uniform grid[J]. Neural, Parallel & Scientific Computations, 2000, 8: 373-392.

[8] Spotz W F, Carey G F. Formulation and experiments with high-order compact schemes for non-uniform grids[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1998, 8 (3): 288-303.

[9] Kalita Jiten C, Dass Anoop K, Dalal D C. A transformational-free HOC scheme for steady convection-diffusi-on on non-uniform grids[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2004, 44: 33-53.

[10] 曹广满,王彩华,齐海涛. 对流扩散方程的非一致网格有限差分方法[J]. 天津师范大学学报, 2010,30(1): 7-10.
Cao Guangman, Wang Caihua, Qi Haitao. Non-uniform finite difference method for convection-diffusions equations [J]. Journal of Tianjin Normal University, 2010, 30 (1): 7-10.

[11] 田芳,田振夫. 非均匀网格上求解对流扩散问题的高阶紧致差分方法[J]. 宁夏大学学报, 2009,30(3): 209-212.
Tian Fang, Tian Zhenfu. A high-order compact finite difference method for convection-diffusion problems on non-uniform grids[J]. Journal of Ningxia University, 2009, 30(3): 209-212.

(责任编辑 王卫勋)