文章编号：1006-4710(2014)01-0067-06

梯形断面明渠水跃共轭水深新的迭代方法

张志昌，赵莹
(西安理工大学 水利水电学院，陕西 西安 710048)

摘要：根据梯形断面明渠水跃共轭水深的三种计算公式，选取的公式(7)为研究对象，利用迭代法重新分析梯形断面明渠水跃共轭水深的计算方法。提出了梯形断面明渠水跃共轭水深的简单迭代公式和初值的简单确定方法。本研究提出的迭代公式形式简单，初值选取方便，计算精度较其他迭代方法更高。

关键词：梯形断面；明渠；水跃共轭水深；迭代法
中图分类号：TV153.3　　　**文献标志码：**A

A new iterative method for calculating conjugate depth of hydraulic jump in trapezoid open channel

ZHANG Zhichang, ZHAO Ying
(Faculty of Water Resources and Hydroelectric Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

Abstract: Based on three formulas of calculating conjugate depth of hydraulic jump in trapezoid open channel, this paper analyzes the previous research status and problems of its solution, selects simple formula (7) as the study object, and uses the iterative method to re-analyze the calculating method for the conjugate depth of hydraulic jump in trapezoid open channel. A simple iterative formula for calculating hydraulic jump conjugate depth in trapezoid open channel and a simple method for determining its initial value are suggested. The new iterative formula suggested in this paper is simple, and easy to select initial value with higher calculation accuracy than that by other method.

Key words: trapezoid section; open channel; conjugate depth; iterative method

1　梯形断面明渠的水跃共轭水深方程

水跃是水流从急流过渡到缓流时水面突然跃起的一种水面衔接形式，通过写跃前和跃后断面的动量方程，可以得到水跃共轭水深的一般计算公式为[1]：

$$Q^2/gA_1 + A_1h_{c1} = Q^2/gA_2 + A_2h_{c2} \tag{1}$$

式中，Q为流量、g为重力加速度，A_1、A_2分别表示水跃前和后断面的面积，h_{c1}、h_{c2}分别表示水跃前和后断面形心距水面的距离。

对于梯形断面有：

$$A = (b_0 + mh)h \tag{2}$$

$$h_{ci} = \frac{h}{6}\,\frac{3b_0 + 2mh}{b_0 + mh} \tag{3}$$

式中，m为梯形断面的边坡系数，h为梯形断面的水深，b_0为梯形断面的底宽。

将公式(2)和公式(3)代入公式(1)得：

$$\frac{Q^2}{gh_1(b_0 + mh_1)} + \frac{h_1^2}{6}(3b_0 + 2mh_1) = \frac{Q^2}{gh_2(b_0 + mh_2)} + \frac{h_2^2}{6}(3b_0 + 2mh_2) = J(h) \tag{4}$$

式(4)为梯形断面水跃共轭水深计算的一般公式。

令，$N = mq^{2/3}/b_0$，$q = Q/b_0$，代入公式(4)得梯形断面的又一水跃方程为[2]：

$$\frac{6}{g(h_1/q^{2/3})(1 + Nh_1/q^{2/3})} + \left(\frac{h_1}{q^{2/3}}\right)^2 \times \left(3 + 2N\frac{h_1}{q^{2/3}}\right) = \frac{6}{g(h_2/q^{2/3})(1 + Nh_2/q^{2/3})} +$$

收稿日期：2013-05-23
作者简介：张志昌，男，教授级高级工程师，研究方向为水工水力学。E-mail：zhangzhichang1954@163.com。

$$\left(\frac{h_2}{q^{2/3}}\right)^2\left(3+2N\frac{h_2}{q^{2/3}}\right)=J(h) \tag{5}$$

将公式(2) 和公式(3) 代入公式(1)，并令 $\beta=b_0/(mh_1)$、$\eta=h_2/h_1$，则有：

$$\sigma^2=Q^2/(gm^2/h_1^5)$$

从而得梯形断面的另一水跃方程为[3]：

$$\eta^4+(2.5\beta+1)\eta^3+(1.5\beta+1)(\beta+1)\eta^2+[(1.5\beta+1)\beta-3\sigma^2/(1+\beta)]\eta-3\sigma^2=0 \tag{6}$$

因为：

$$\sigma^2=\frac{Q^2}{gm^2h_1^5}=\frac{v_1^2(b_0+mh_1)^2h_1^2}{gm^2h_1^5}=\frac{v_1^2}{gh_1}\left(\frac{b_0}{mh_1}+1\right)^2=Fr_1^2(\beta+1)^2$$

代入公式(6) 得：

$$\eta^4+(2.5\beta+1)\eta^3+(1.5\beta+1)(\beta+1)\eta^2+[(1.5\beta+1)\beta-3Fr_1^2(\beta+1)]\eta-3Fr_1^2(\beta+1)^2=0 \tag{7}$$

式(7) 中，Fr_1 为跃前断面的弗劳德数，v_1 为跃前断面的流速，h_1 为跃前断面的水深，h_2 为跃后断面的水深。

2 梯形断面明渠水跃共轭水深方程解的现状

由以上梯形断面明渠水跃共轭水深的公式可以看出，公式(4) 和(5) 复杂，不易求得解析解，其求解方法主要有试算法，图解法、近似计算法、迭代法和遗传算法。对于公式(6) 和(7)，虽然可以求得解析解，但计算过程仍然复杂。

试算法是最早应用的方法，该方法的特点是根据已知梯形断面的有关参数和跃前断面或跃后断面的水深，通过试算求解另一断面的水深，试算法计算工作量大[2]。

前苏联的拉赫曼诺夫教授给出了计算梯形断面水跃共轭水深的图解法[4]，在对数坐标内给出了函数 mh_k/b_0 曲线。在这些曲线上，位于同一条垂直直线上的每一对点都相当于一对共轭水深，只要知道了梯形断面的底宽 b_0、边坡系数 m、临界水深 h_k 和共轭水深之一，就可以从该曲线上查出另一共轭水深。文献[5] 根据 $\eta=f(\sigma,\beta)$ 的函数关系，以 σ 为横坐标，以 η 为纵坐标，以 β 为参数绘制成一组曲线簇，以供计算时查用，但是图解法计算精度较低。

迭代法近年来应用较多。1998 年，冯家涛[6] 根据水跃方程公式(5) 提出了计算跃前和跃后断面水深的迭代公式，其中跃前断面水深的迭代公式为：

$$x=\{-1+\sqrt{1-24/[J(h)-gx^2(3+2Nx)]}\}/2N \tag{8}$$

跃后断面水深的迭代公式为：

$$y=\sqrt{\frac{J(h)-6/[gy(1+Ny)]}{3+2Ny}} \tag{9}$$

式中，$x=h_1/q^{2/3}$，$N=mq^{2/3}/b_0$，$y=h_2/q^{2/3}$。

在初值的选取中，冯家涛利用矩形断面共轭水深可以直接求解的特点，将梯形断面共轭水深的求解近似用矩形断面的公式表达，为了保证一定的精度，引入断面特征修正参数 β_1 得：

$$x_0=\frac{y}{2}\left(\sqrt{1+\frac{8}{g(\beta_1y)^3}}-1\right) \tag{10}$$

$$y_0=\frac{y}{2}\left(\sqrt{1+\frac{8}{g(\beta_1x)^3}}-1\right) \tag{11}$$

其中：

$$\beta_1=1+b_0N^{0.9}/6 \tag{12}$$

1999 年刘玲[7] 采用与冯家涛完全相同的迭代方法，其不同点在于 β_1 的计算为：

$$\beta_1=1+[N^4J(h)]^{0.196}/7 \tag{13}$$

2003 年张小林[8] 利用公式(5) 计算梯形断面水跃的共轭水深，计算时采用牛顿迭代法，得出梯形断面水跃的跃前和跃后断面水深的迭代公式为：

$$x=x-\frac{x^5+5x^4/(2N)+3x^3/(2N^2)-kx^2/(2N)-kx/(2N^2)+3/(gN^2)}{5x^4+10x^3/N+9x^2/(2N^2)-kx/N-k/(2N^2)} \tag{14}$$

$$y=y-\frac{x^5+5y^4/(2N)+3y^3/(2N^2)-ky^2/(2N)-ky/(2N^2)+3/(gN^2)}{5y^4+10y^3/N+9y^2/(2N^2)-ky/N-k/(2N^2)} \tag{15}$$

初值的选取仍用公式(10) 和(11)，式中 β_1 用公式(12) 计算。

2003 年孙道宗[9] 直接利用公式(4) 计算梯形断面的水跃共轭水深，在计算时如果已知跃前水深 h_1，计算出 $J(h_1)$，则跃后水深的迭代式为：

$$h_2=\sqrt{\frac{J(h_1)-Q^2/(gA_2)}{b_0/2+mh_2/3}} \tag{16}$$

如果知道跃后水深 h_2，计算出 $J(h_2)$，则跃前断面水深的迭代公式为：

$$h_1=\sqrt{\frac{Q^2}{mg[J(h_1)-h_1^2(b_0/2+mh_2/3)]}+\left(\frac{b_0}{2m}\right)^2}-\frac{b_0}{2m} \tag{17}$$

初值的选取公式为：

$$h_{10}=h_k+(h_k-h_2)(h_k/h_2)^{1/1.5} \tag{18}$$

$$h_{20}=h_k+(h_k-h_1)(h_k/h_2)^{1/2} \tag{19}$$

式中，h_k 为梯形断面的临界水深。

孙道宗还通过三个算例总结出梯形断面明渠水跃的跃前和跃后断面的水深简单计算公式为：

已知跃前水深 h_1，求跃后水深 h_2 为：

$$h_2 = h_k + (h_k - h_1)(h_k/h_1)^{1/2} \tag{20}$$

$$z = 2 - 0.065(2.5 - \sqrt{h_k/h_1})^2 \tag{21}$$

已知跃后水深 h_2，求跃前水深 h_1 为：

$$h_1 = h_k + (h_k - h_2)(h_k/h_2)^{1/\varepsilon} \tag{22}$$

$$\varepsilon = 1.60 - (1 - h_k/h_2)^{2.57} \tag{23}$$

公式(20)和(21)看似简单，实际上梯形断面的临界水深 h_k 也需要通过试算或迭代计算。

2009年赵延风[10]对梯形断面的水跃方程进行了变换，令：

$$\lambda = B/b_0 = (b_0 + 2mh)/b_0 = 1 + 2mh/b_0$$

由此得：

$$h = b_0(\lambda - 1)/(2m)$$

将其代入水跃方程公式(4)得：

$$\frac{4mq^2}{g(\lambda_1^2 - 1)} + \frac{b_0^3}{24m^2}(\lambda_1 - 1)^2(\lambda_1 + 2) = \frac{4mq^2}{g(\lambda_2^2 - 1)} + \frac{b_0^3}{24m^2}(\lambda_2 - 1)^2(\lambda_2 + 2) \tag{24}$$

即：

$$J(h) = \frac{4mq^2}{g(\lambda + 1)(\lambda - 1)} + \frac{b_0^3}{24m^2}(\lambda - 1)^2(\lambda + 2) \tag{25}$$

由公式(25)得出跃前断面水深的迭代公式为：

$$\lambda = \sqrt{\frac{4mq^2}{g[J(h) - b_0^3(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)/(24m^2)]} + 1} \tag{26}$$

跃后断面水深的迭代公式为：

$$\lambda = \sqrt[3]{\frac{J(h) - 4mq^2/[g(\lambda^2 - 1)]}{b_0^3(\lambda + 2)/(24m^2)}} + 1 \tag{27}$$

初值的计算公式为：

$$\lambda_0 = 2\zeta mh/b_0 + 1 \tag{28}$$

式中，h 为矩形渠道水跃的共轭水深。ζ 用经验公式计算。

跃前水深为：

$$\zeta = 1/(1 + 0.75mh_2/b_0) \tag{29}$$

跃后水深为：

$$\zeta = 1/[1 + 0.35mq^{2/3}/b_0 - 0.025(mq^{2/3}/b_0)^2] \tag{30}$$

公式(29)和公式(30)的应用范围为：

$$h_1/q^{2/3} = 0 \sim 0.45$$

$$h_2/q^{2/3} = 0.4 \sim 1.5$$

$$mq^{2/3}/b_0 = 0.1 \sim 4.0$$

2010年刘计良[11]令：$N = mq^{2/3}/b_0$，$x = h_1/h_k$，$y = h_2/h_k$，$z = mh_k/b_0$，将其代入梯形断面的水跃方程公式(4)，得到水跃方程的另一表达式为：

$$\frac{6N}{gzx(1 + zx)} + \frac{z^2x^2(3 + 2zx)}{N^2} = \frac{6N}{gzy(1 + zy)} + \frac{z^2y^2(3 + 2zy)}{N^2} = y \tag{31}$$

刘计良认为 x 和 y 存在函数关系，即：

$$y = (1 - \alpha x)/[(1 - \alpha)x] \tag{32}$$

式中：

$$\alpha = 0.08N - 0.3k \tag{33}$$

$$k = \gamma/\gamma_{\min} \tag{34}$$

式中，$\gamma_{\min}$ 是当 $x = y = 1$ 时由公式(31)计算的最小 γ 值。

2012年李蕊[12]在研究梯形渠道的水跃共轭水深时采用公式(5)，得到的迭代公式与冯家涛的相同，不同之处是在选取初值时，跃前水深的初值要解一元二次方程，跃后水深的初值要解一元三次方程。

2002年金菊良[13]把求解梯形明渠水跃共轭水深的问题等价于两个非线性优化问题。统一用模拟生物进行过程中优胜劣汰规则与群体内部染色体信息交换机制通用的优化方法是加速遗传算法计算梯形断面的水跃，误差约为4%。

倪汉根[14]通过对梯形断面的水跃方程公式(6)解一元四次方程，得到了梯形断面的水跃共轭水深比的显式解。在计算时先计算有关参数，即：

$$p = -(1.5\beta^2 + 2.5\beta + 1)$$

$$q = (2.5\beta + 1)[1.5\beta^2 + \beta - 3\sigma^2)/(1 + \beta)] + 12\sigma^2$$

$$r = 3(2.5\beta + 1)^2\sigma^2 - 12(1.5\beta^2 + 2.5\beta + 1)\sigma^2 - [1.5\beta^2 + \beta - 3\sigma^2/(1 + \beta)]^2$$

设：

$$\alpha_j = -p^2/3 + q$$

$$\beta_j = 2p^3/27 - pq/3 + r$$

当：$\beta_j^2/4 + \alpha_j^3/27 \geqslant 0$

$$S = \left[-\frac{\beta_j}{2} + \left(\frac{\beta_j^2}{4} + \frac{\alpha_j^3}{27}\right)^{1/2}\right]^{1/3} + \left[-\frac{\beta_j}{2} - \left(\frac{\beta_j^2}{4} + \frac{\alpha_j^3}{27}\right)^{1/2}\right]^{1/3} - \frac{p}{3}$$

当：$\beta_j^2/4 + \alpha_j^3/27 < 0$

$$S = \frac{2\sqrt{-\alpha_j}}{\sqrt{3}}\cos\left\{\frac{1}{3}\arccos\left[\frac{-1.5\sqrt{3}\beta_j}{(-\alpha_j)^{1.5}}\right]\right\} - \frac{p}{3}$$

$$D_1 = 0.5[(2.5\beta + 1) - \sqrt{(2.5\beta + 1)^2 - 4(1.5\beta^2 + 2.5\beta + 1) + 4S}]$$

$$D_2 = 0.5(S - \sqrt{S^2 + 12\sigma^2})$$

共轭水深为：

$$\eta = 0.5(-D_1 + \sqrt{D_1^2 - 4D_2}) \tag{35}$$

上面论述了目前梯形渠道水跃共轭水深的一些主要计算方法,可以看出,梯形断面水跃共轭水深的计算除试算法和图解法外,近年来主要采用迭代计算方法。迭代计算不管采用哪种方法,计算过程均比较复杂,且均为近似计算,赵延风[10] 比较了各家迭代公式的精度,认为“冯家涛公式计算的跃前水深最大相对误差为 -3.287% ,跃后水深为 -3.002%;刘玲公式的跃前为 -2.122% ,跃后为 -2.236%;张小林公式的跃前为 -6.014% ,跃后为 9.460%;孙道宗公式的跃前为 -14.359%,跃后为 -7.737%;赵延风公式的跃前为 0.963%,跃后为 -1.1%。倪汉根虽然通过求解一元四次方程得到了梯形断面水跃共轭水深的精确解,但由于一元四次方程的求解过程比较复杂,计算工作量仍然较大。因此,有必要研究更简便的梯形断面水跃共轭水深的计算方法。

3 梯形断面明渠水跃共轭水深新的迭代公式

下面由公式(7) 来研究梯形断面水跃共轭水深比 $\eta = h_2/h_1$ 新的迭代公式。将公式(7) 写成:

$$\eta^2[\eta^2+(2.5\beta+1)\eta+(1.5\beta+1)(\beta+1)]= 3Fr_1^2(\beta+1)^2-[(1.5\beta+1)\beta-3Fr_1^2(\beta+1)]\eta \tag{36}$$

设:

$a=2.5\beta+1, b=(1.5\beta+1)(\beta+1)$

$c=3Fr_1^2(\beta+1)^2, d=(1.5\beta+1)\beta-3Fr_1^2(\beta+1)$

公式(36) 变成:

$$\eta=\sqrt{(c-d\eta)/(\eta^2+a\eta+b)} \tag{37}$$

上式即为已知跃前水深,求跃后水深的梯形断面水跃共轭水深比的迭代公式。

下面证明公式的收敛性。根据文献[15] 的迭代收敛原理,如果 $\eta=\varphi(\eta)$ 在某一邻域内有唯一的根 α,则迭代形式 $\eta_{k+1}=\varphi(\eta_k)$ 收敛于 α 的条件是在 α 的某一邻域 $|\eta-\alpha|<\delta$ 内 $||\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\eta|<1|$。那么以该邻域内任一点为初值的迭代都收敛于 α。因此,只要证明以上迭代函数的导数绝对值小于 1,就可以证明该迭代函数收敛。设:

$$\varphi(\eta)=\sqrt{(c-d\eta)/(\eta^2+a\eta+b)}$$

对 $\varphi(\eta)$ 求导得:

$$\left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\eta}\right|= \left|-\frac{1}{2}\left[\frac{d}{\sqrt{\eta^2+a\eta+b}\ \sqrt{c-d\eta}}+\frac{\sqrt{c-d\eta}(2\eta+a)}{(\eta^2+a\eta+b)^{3/2}}\right]\right|$$

一般来说,公式中的 c 值远大于 a、b 和 d,$\eta>1$,上式中的第一项分母之积远大于分子,第二项分母为 1.5 次方,其值也远大于分子,故式中的两项之和小于 1,即 $|\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\eta|<1$。经过大量的例题分析也证明了这一点。所以梯形断面水跃共轭水深比的公式(37) 是收敛的。

对于已知跃后水深求跃前水深的情况,公式(7) 可以写成:

$$\eta_0^4+a_1\eta_0^3+b_1\eta_0^2+d_1\eta_0-c_1=0 \tag{38}$$

式中:

$\beta_0=b_0/(mh_2)$

$\eta_0=h_1/h_2$

$Fr_2^2=v_2^2/(gh_2)$

$a_1=(2.5\beta_0+1)$

$b_1=(1.5\beta_0+1)(\beta_0+1)$

$c_1=3Fr_2^2(\beta_0+1)^2$

$d_1=(1.5\beta_0+1)\beta_0-3Fr_2^2(\beta_0+1)$

公式(38) 的迭代式为:

$$\eta_0=c_0/(\eta_0^3+a_1\eta_0^2+b_1\eta_0+d_1) \tag{39}$$

设:

$\varphi(\eta_0)=c_1/(\eta_0^3+a_1\eta_0^2+b_1\eta_0+d_1)$

对上式求导得:

$$\left|\frac{\mathrm{d}\varphi(\eta_0)}{\mathrm{d}\eta_0}\right|=\left|\frac{-c_1(3\eta_0^2+2a_1\eta_0+b_1)}{(\eta_0^3+a_1\eta_0^2+b_1\eta_0+d_1)^2}\right|$$

显然,上式中分母为 2 次方,其值远大于分子,所以 $|\mathrm{d}\varphi(\eta_0)/\mathrm{d}\eta_0|$ 小于 1。公式(39) 也是收敛的。

对于迭代初值的选取,当已知跃前水深求跃后水深时,由水跃的试验可知,跃后水深与来流弗劳德数密切相关,当 $1.7<Fr_1<2.5$ 时跃后水深为跃前水深的 2 ~ 3 倍、当 $2.5<Fr_1<4.5$ 时跃后水深为跃前水深的 3 ~ 6 倍、当 $4.5<Fr_1<9.0$ 时跃后水深为跃前水深的 6 ~ 12 倍、当 $Fr_1>9.0$ 时跃后水深超过跃前水深的 12 倍。所以在选取初值时可以直接取 Fr_1 的值作为初值。

当已知跃后水深求跃前水深时,$0<\eta_0=h_1/h_2<1$,所以取 0 ~ 1 之间任一值即可。

4 实例分析

例 1 有一梯形断面渠道,通过的流量 $Q=54.3\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$,底宽 $b_0=7\ m$,边坡系数 $m=1$,在渠道中发生水跃,已知跃前水深 $h_1=0.8$ m,试求跃后水深 h_2。

解:计算时取小数点后 15 位数,以表示计算的精确度(如果在小数点某一位后的数值开始全为零时,即取该位数后一位数),在实际工程中,只要取小数点后三位就可以了(以下的例题相同)。

$$\beta=b_0/(mh_1)=7/(1\times0.8)=8.750$$

$A_1 = (b_0 + mh_1)h_1 = (7 + 1 \times 0.8) \times 0.8 = 6.240\ \mathrm{m}^2$

$Fr_1^2 = \dfrac{v_1^2}{gh_1} = \dfrac{Q^2}{gh_1 A_1^2} = \dfrac{54.3^2}{9.8 \times 0.8 \times 6.24^2} = 9.658\,605\,259\,781\,420$

$a = 22.875\,0$

$b = 137.718\,750$

$c = 2\,754.513\,487\,523\,920$

$d = -158.920\,453\,848\,607\,0$

将以上数据代入公式(37)得：

$$\eta = \sqrt{\frac{c - d\eta}{\eta^2 + a\eta + b}} = \sqrt{\frac{2754.513487523920 + 158.92045384886070\eta}{\eta^2 + 22.8750\eta + 137.718750}}$$

初值选 $Fr_1 = \sqrt{9.658605259781420} \approx 3.1$，由上式迭代到第 18 步时收敛，得：

$\eta = 3.754\,747\,305\,845\,840$

下面介绍用计算机中的 Excel 迭代的过程。已知 a、b、c、d、Fr_1，打开 Excel，在 Excel 中输入公式，公式输完后回车，然后用鼠标下拉，即可得到迭代值，整个过程只要数秒时间就可完成。

跃后水深为：

$h_2 = \eta h_1 = 3.754747305845840 \times 0.8 = 3.003797844676630\ \mathrm{m}$

跃后水深的真值为 $h_2 = 3.003\,798\,446\,766\,70$，二者相差为 -0.0002%。

如果已知跃后水深为：

$h_2 = 3.003\,798\,446\,766\,70$

求跃前水深 h_1，计算过程为：

$\beta_0 = b_0/(mh_2) = 2.330\,383\,188\,870\,510$

$v_2 = Q/A_2 = Q/[(b_0 + mh_2)/h_2] = 1.807\,025\,250\,672\,380\ \mathrm{m/s}$

$Fr_2^2 = v_2^2/(gh_2) = 0.110\,925\,569\,093\,983$

$a_1 = (2.5\beta_0 + 1) = 6.825\,957\,972\,176\,290$

$b_1 = (1.5\beta_0 + 1)(\beta_0 + 1) = 14.971\,986\,682\,631\,70$

$c_1 = 3Fr_4^2(\beta_0 + 1)^2 = 3.690\,976\,937\,003\,420$

$d_1 = [(1.5\beta_0 + 1)\beta_0 - 3Fr_2^2(\beta_0 + 1)] = 9.368\,137\,947\,746\,490$

$$\eta_0 = \frac{c_1}{\eta_0^3 + a_1\eta_0^2 + b_1\eta_0 + d_1} = \frac{3.690976937003420}{\eta_0^3 + 6.825957972176290\eta_0^2 + 14.9719866826317\eta_0 + 9.368137947746490}$$

初值选 $\eta_0 = 0.5$，由上式迭代到第 35 步时收敛，得：

$\eta_0 = 0.266\,329\,507\,299\,488\,0$

真值为：

$\eta_0 = 0.266\,329\,507\,299\,491\,0$

二者相差 0.00000000000112552387%。

跃前水深为：

$h_1 = \eta_0 h_2 = 0.2663295072994880 \times 3.003797844676630 = 0.8\ \mathrm{m}$

例 2　已知某梯形渠道的 $\beta = b_0/(mh_1) = 40$，$Fr_1^2 = 1.523$，求梯形渠道水跃的共轭水深比 η。

解：$a = 2.5\beta + 1 = 2.5 \times 40 + 1 = 101.0$

$b = (1.5\beta + 1)(\beta + 1) = (1.5 \times 40 + 1)(40 + 1) = 2501.0$

$c = 3Fr_1^2(\beta + 1)^2 = 7\,680.489\,0$

$d = [(1.5\beta + 1)\beta - 3Fr_1^2(\beta + 1)] = 2\,252.671\,0$

将 a、b、c、d 代入公式(37)迭代得：

$\eta = 1.332\,080\,234\,721\,930$，

真值 $\eta = 1.332\,080\,234\,721\,930$，相差为零。

由以上算例可以看出，本研究提出的迭代公式不仅简单、初值选取方便、收敛快，而且精度很高。分析原因，是由于本研究构造的迭代方程比其他迭代公式更加合理、形式更加简单，所以计算精度更高。

5　结　论

1）分析了前人对梯形断面明渠水跃共轭水深求解方法的研究成果，试算法工作量大，查图法精度不高，迭代法不管是公式的形式还是初值的选取，都比较复杂，解一元四次方程虽然可以得到精确解，但计算过程繁杂。

2）根据梯形断面水跃共轭水深的公式(7)，重新提出了梯形断面明渠水跃共轭水深的迭代公式，在初值的选取中，已知跃前水深求跃后水深时，初值取跃前断面的弗劳德数，已知跃后水深求跃前水深时，初值取 0～1 之间的任一值。

3）由算例可以看出，本研究提出的迭代算法简便，初值选取简单，计算精度更高。比试算法、查图法、其他迭代法以及精确计算公式应用更加方便。

参考文献：

[1] 张志昌. 水力学(下册)[M]. 北京：中国水利水电出版社，2011.

[2] 吴持恭. 水力学[M]. 北京：高等教育出版社，1998.

[3] 张志昌.《水力学习题解析》(下册)[M]. 北京：中国水利水电出版社，2012.

[4] П. Г. 基谢列夫. 水力计算手册[M]. 北京：电力工业出版

社,1957.

[5] 清华大学水力学教研室.水力学[M].北京:高等教育出版社,1982.

[6] 冯家涛.梯形渠道水跃共轭水深直接计算公式[J].力学与实践,1998,20(5):50-53.
Feng Jiaotao. A direct calculation formula for conjugate water depth of water jump in a trapezoid channel[J]. Mechanics in Engineering,1998,20(5):50-53.

[7] 刘玲,刘伊生.梯形渠道水跃共轭水深计算方法[J].北方交通大学学报. 1999,23(3):44-47.
Liu Ling,Liu Yisheng. Calculating method for conjugate depth of hydraulic jump in trapezoidal channels[J]. Journal of Northern Jiaotong University,1999,23(3):44-47.

[8] 张小林,刘惹梅.梯形断面渠道水跃共轭水深的计算方法[J].水利与建筑工程学报,2003,1(2):41-43.
Zhang Xiaolin,Liu Remei. Method of calculation for conjugate water depth of water jump in Trapezoid channel[J]. Journal of Water Resources and Architectural Engineering,2003,1(2):41-43.

[9] 孙道宗.梯形断面渠道中水跃共轭水深计算[J].江西水利科技,2003,29(3):133-137.
Sun Daozong. The calculation of the conjugate depth about the hydraulic jump of the canal of the trapezoidal section[J]. Jiangxi Hydraulic Science & Technology,2003,29(3):133-137.

[10] 赵延风,王正中,芦琴,等. 梯形明渠水跃共轭水深的直接计算方法[J].山东大学学报,2009,39(2):131-136.
Zhao Yanfeng,Wang Zhengzhong,Lu Qing,et al. Direct calculation method for conjugate water depth of the trapezoidal open channel[J]. Journal of Shandong University,2009,39(2):131-136.

[11] 刘计良,王正中,杨晓松,等. 梯形渠道水跃共轭水深理论计算方法初探[J].水力发电学报. 2010,29(5):216-219.
Liu Jiliang,Wang Zhengzhong,Yang Xiaosong,et al. Preliminary study on the theoretical method for calculating conjugate depth of trapezoidal channel[J]. Journal of Hydroelectric Engineering,2010,29(5):216-219.

[12] 李蕊,王正中,张宽地,等.梯形明渠共轭水深计算方法[J].长江科学院学报,2012,29(11):33-36.
Li Rui,Wang Zhengzhong,Zhang Kuandi,et al. Calculation method for conjugate water depth in open trapezoidal channel[J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute,2012,29(11):33-36.

[13] 金菊良,付强,魏一鸣,等. 梯形明渠水跃共轭水深的优化计算[J].东北农业大学学报. 2002,33(1):58-62.
Jin Juliang,Fu Qiang,Wei Yiming,et al. Optimal computation for conjugate water depth of hydraulic jumps in trapezoidal channels[J]. Journal of Northeast Agricultural University,2002,33(1):58-62.

[14] 倪汉根,刘亚坤.击波 水跃 跌水 消能[M].大连:大连理工大学出版社,2008.

[15] 邓建中,葛仁兴,程正兴.计算方法[M].西安:西安交通大学出版社,1994.

(责任编辑 李虹燕)