

文章编号: 1006-4710(2014)03-0320-06

SIRS 传染病模型的全局稳定及最优控制分析

张素霞, 胡钢

(西安理工大学 理学院, 陕西 西安 710054)

摘要: 讨论了一个具有一般饱和传染率及两种控制措施 SIRS 传染病模型, 分析了模型平衡点的稳定性态, 并通过构造 Lyapunov 函数得到了地方病平衡点的全局稳定性。同时, 本研究探讨了对易感者和染病者通过降低传染率和提高恢复率进行管理控制的最优措施, 利用最优控制理论分析了一定时间内使染病者人数最少同时所投入经济成本最低的控制措施和管理方法, 对疾病流行时实施最优控制的效果进行了数值模拟, 结果显示当采取治疗等管理措施后, 疾病由流行逐渐得到控制, 直至最终绝灭。

关键词: 数学模型; 饱和传染率; 稳定性; 最优控制

中图分类号: O175 **文献标志码:** A

Optimal control and dynamic analysis of SIRS epidemic model

ZHANG Suxia, HU Gang

(Faculty of Sciences, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China)

Abstract: A SIRS epidemic model with saturated incidence and optimal control is discussed the stabilities of the equilibria are analyzed and the global stability of the endemic equilibrium is proved by constructing a Lyapunov function. At the same time, this paper deals with the optimal measures to carry out management and control over the susceptibles and infections through reducing the infectivity and improving the recovery rate. The optimal control theory is used to analyze the control measure and management method for the least number of the infections and minimum input economic cost within a certain time. The numerical simulation is made of the effect of implementing the optimal control when the incidence occurs. The results indicate that after the cure and management measures are adopted, the prevalence rate of the diseases is gradually controlled till to their extinction.

Key words: mathematical model; saturated incidence; stability; optimal control

1 基本模型

当前, 随着全球一体化格局的逐渐形成, 人类共同面临着许多已有及新发传染病长期而严峻的威胁, 对传染病发病机理、传染规律和防治策略研究的重要性日益突出, 同时也成为我国疾病控制工作面临的新的问题和挑战。目前对传染病控制问题研究的重要性日益突出, 而对一些具体实施的预防控制策略的效果分析是复杂而困难的工作。通过建立恰当数学模型我们能够对疾病防治决策提供理论基础

和数量依据, 更有利于疾病控制策略的研究。在很多实际问题中, 非线性系统的控制问题都显示了重要性及复杂性的特点, 从而使其成为了控制问题的重点和难点之一。目前在工程、经济、医学和生物等很多领域, 最优控制理论被广泛利用并发挥了重要的作用, 而在对传染病动力学的研究过程中, 将最优控制问题作为传染病数学模型的一个重要研究内容也已出现^[1-4], 本研究将利用理论分析和数值模拟研究一类传染病模型的动力学性态, 并考虑控制疾病传播的一些措施和效果。

收稿日期: 2014-04-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51305344); 陕西省教育厅基金资助项目(2013JK0582); 西安市科技局基金资助项目(CXY1341(4))。

作者简介: 张素霞, 女, 博士, 讲师, 研究方向为微分方程。E-mail: sxzhang@xaut.edu.cn。

在传染病模型中传染率是一个重要的函数,反映了一个病人感染他人的平均能力,通常依赖于环境中的总人口数、病人的活动能力、环境条件以及病菌的毒力等因素^[5]。通常情况下,当环境中人口数量不多时,可假定单位时间内一个病人与他人的接触次数与环境内人口总数成正比,可采用双线性传染率形式;而当人口数量较大时,因为单位时间内一个病人所能接触他人的数目是有限的,此时标准传染率更符合实际情况;介于双线性传染率和标准传染率之间,具有饱和形式的传染率应该更能反映出疾病的传染能力。Horst R Thieme 和 Carlos Castillo Chavez 在文献^[6]中提出传染率的一般形式应为饱和函数 $\beta\phi(N) \frac{S}{N}I$,本研究将利用这种一般饱和传染率来讨论一个 SIRS 传染病模型的全局稳定及最优控制问题。

2 模型建立

基于流行病仓室建模的思想,笔者将整个人口 $N(t)$ 划分为 3 个仓室:易感者 $(S(t))$ 、染病者 $(I(t))$ 和恢复者 $(R(t))$,其中 t 为时间。根据疾病感染进程,一个易感者通过与染病者的有效接触而被感染,从而转移至染病者仓室,由于宿主体内免疫系统的作用,一些染病者会自动清除病毒而痊愈,从而进入到恢复者类。另外,在感染期若一些机体由于免疫失败不能主动清除病毒则将导致疾病的进一步发展,最终可能引起死亡。同时,在清除病毒后恢复者会有短期的抗体免疫,但经过一段时间后免疫消失,恢复者又重新回到易感者类。为了控制疾病的传播和流行笔者考虑两类措施:① 利用自我防护、媒体宣传和限制外出等手段以减少易感者被传染的概率;② 除染病者的自愈外,加强对他们的主动治疗,从而提高感染者的恢复比例。在这些假设的基础上建立模型为:

$$(I) \begin{cases} S'(t) = b - \beta(1 - u_1(t))\phi(N) \frac{S(t)}{N(t)}I(t) - \mu S(t) + \delta R(t) \\ I'(t) = \beta(1 - u_1(t))\phi(N) \frac{S(t)}{N(t)}I(t) - (\mu + \alpha + \xi + u_2(t))I(t) \\ R'(t) = (\xi + u_2(t))I(t) - (\mu + \delta)R(t) \\ N(t) = S(t) + I(t) + R(t) \end{cases}$$

式中 $\beta\phi(N) \frac{S(t)}{N(t)}I(t)$ 为疾病的传染率,其中,函数 $\phi(N)$ 满足以下条件: $\phi(0) = 0, \phi'(N) \geq 0$,

$(\frac{\phi(N)}{N})' \leq 0$,并且当 N 较小时, $\phi(N)$ 是 N 的线性函数,而当 N 充分大时, $\phi(N)$ 是不依赖于 N 的函数。 $u_1(t)$ 表示当疾病出现并流行时,通过采取措施使得一部分易感者被感染的可能性降低, $u_2(t)$ 表示采取了适当的治疗措施后感染者的恢复率得以提高。模型中其余参数的含义为, b 是易感者 S 的输入,包括出生和迁入,假设所有的输入都进入 S 类; β 为传染系数, μ 和 α 分别为自然死亡率和因病死亡率, ξ 为染病者的恢复率, δ 为恢复者返回到易感者的比例,模型中的参数都是非负的。从模型易知,系统 (I) 所有具有非负初值的解在时间 $t \geq 0$ 时存在并且非负。

3 稳定性分析

首先分析无控制措施时模型的稳定性态,即 $u_1(t) = 0, u_2(t) = 0$ 。

定义基本再生数为 $R_0 = \phi(\frac{b}{\mu}) \frac{\beta}{\mu + \alpha + \xi}$,表示易感人群中一个染病者在其平均患病期内所传染的人数,是传染病模型中区分疾病流行与否的阈值^[5]。由模型 (I) 易得其两个平衡点:

- 1) 无病平衡点 $E_0 = (S_0, I_0, R_0)$;
- 2) 地方病平衡点 $E^* = (S^*, I^*, R^*)$

式中:

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{b}{\mu}, I_0 = 0, R_0 = 0 \\ S^* &= \frac{b + \delta R^* - \lambda^*}{\mu} \\ I^* &= \frac{\lambda^*}{\mu + \alpha + \xi} \\ R^* &= \frac{\xi I^*}{\mu + \delta} \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} \lambda^* &= \beta\phi(N^*) \frac{S^*}{N^*} I^* \\ N^* &= S^* + I^* + R^* = \frac{b}{\mu} - \frac{\alpha}{\mu k} \lambda^* \end{aligned}$$

定理 1 当 $R_0 < 1$ 时,地方病平衡点不存在;当 $R_0 > 1$ 时,地方病平衡点存在且唯一。

证明 为了方便,令:

$$k = \mu + \alpha + \xi$$

则:

$$I^* = \lambda^* / k$$

于是:

$$\lambda^* = \beta\phi(N^*) \frac{S^*}{N^*} I^* = \beta S^* \frac{\lambda^*}{k} \frac{\phi(N^*)}{N^*}$$

因为 λ^* 非零,且:

$$S^* = \frac{b + \frac{\delta\xi - k(\mu + \delta)}{k(\mu + \delta)}\lambda^*}{\mu}$$

由上式得:

$$I = \frac{\beta}{k} \frac{b + \frac{\delta\xi - k(\mu + \delta)}{k(\mu + \delta)}\lambda^*}{b - \frac{\alpha}{k}\lambda^*} \phi(N^*) \quad (1)$$

令:

$$F(\lambda^*) = \frac{b + \frac{\delta\xi - k(\mu + \delta)}{k(\mu + \delta)}\lambda^*}{b - \frac{\alpha}{k}\lambda^*}$$

则当 $\lambda^* \in (0, \frac{bk(\mu + \delta)}{k(\mu + \delta) - \delta\xi})$ 时, $F(\lambda^*) > 0$, 同时,有:

$$F'(\lambda^*) = -\frac{\mu(\mu + \xi) + \mu\delta}{k(\mu + \delta)(b - \frac{\alpha}{k}\lambda^*)^2} \cdot b < 0$$

于是 $F(\lambda^*)$ 是关于 λ^* 的单调减函数,且 $R_0 = \frac{\beta}{k}\phi(\frac{b}{\mu})$, 则当 $R_0 < 1$ 时,存在唯一的 λ^* ,使得式(1)成立。

利用 Hurwitz 判据、Lyapunov 函数及 Lasalle 不变集原理,笔者讨论两个平衡点的全局稳定性。

定理 2 当 $R_0 < 1$ 时,无病平衡点 E_0 全局渐近稳定。

证明 模型(I)在 E_0 处的雅可比矩阵为:

$$\begin{pmatrix} x + \mu & \beta\phi(\frac{b}{\mu}) & \delta \\ 0 & x - \beta\phi(\frac{b}{\mu}) + k & 0 \\ 0 & -\xi & x + \mu + \delta \end{pmatrix}$$

因此特征值为 $x_1 = -\mu, x_2 = -(\mu + \delta), x_3 = \beta\phi(\frac{b}{\mu}) - k$,且当 $R_0 < 1$ 时 $x_3 < 0$,则 E_0 是局部稳定的。同时,有:

$$I'(t) \leq (\beta\phi(\frac{b}{\mu}) - k)I(t)$$

于是当 $t \rightarrow \infty$ 时,有:

$$I(t) \leq I(t_0) \exp(\beta\phi(\frac{b}{\mu}) - k)(t - t_0) \rightarrow 0$$

$$R(t) = R(t_0) \exp(-(\mu + \delta))(t - t_0) \rightarrow 0$$

$$S(t) = \frac{b}{\mu} + (S(t_0) - \frac{b}{\mu})e^{-\mu t} \rightarrow \frac{b}{\mu}$$

这里 t_0 为初始时刻,因此当 $R_0 < 1$ 时 E_0 全局渐近稳定。

定理 3 当 $R_0 > 1$ 时,地方病平衡点全局渐近

稳定。

证明 首先,令:

$$\Phi(N) = \frac{\phi(N)}{N}$$

$$A = \beta I^* \Phi(N^*) + \beta S^* I^* \Phi'(N^*)$$

$$B = \beta S^* \Phi(N^*) + \beta S^* I^* \Phi'(N^*)$$

$$C = \beta S^* I^* \Phi'(N^*)$$

由于 $-1 \leq \frac{N^* \Phi'(N^*)}{\Phi(N^*)} \leq 0$, 则有 $A > 0, B > 0$, 并且 $C < 0$ 。

模型在 E^* 处的特征方程为:

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

其中:

$$a_1 = 2\mu + \delta + \beta I^* \Phi(N^*) > 0$$

$$a_2 = \mu\beta I^* \Phi(N^*) + (\alpha + \xi)A +$$

$$(\mu + \xi)(\mu + \beta I^* \Phi(N^*)) - C\xi > 0$$

$$a_3 = \beta I^* \Phi(N^*)\mu(\mu + \delta) + \xi\mu A +$$

$$\alpha A(\mu + \delta) - C\mu\xi > 0$$

经过计算,有:

$$a_1 a_2 - a_3 =$$

$$[(2\mu + \delta)^2 - \mu(\mu + \delta)]\beta I^* \Phi(N^*) -$$

$$C\xi[1 + \beta I^* \Phi(N^*) - \mu] +$$

$$[(2\mu + \delta)(\alpha + \xi) - \xi\mu - \alpha(\mu + \delta)]A +$$

$$(2\mu + \delta)(\beta I^* \Phi(N^*))^2 +$$

$$(\alpha + \xi)A\beta I^* \Phi(N^*) > 0$$

由 Hurwitz 判据知, E_0 局部渐近稳定。

令:

$$T(N) = (\phi(N) - \phi(N^*))1 - \frac{I^*}{N^*} - \frac{R^*}{N^*} +$$

$$(I^* + R^*)\phi(N) \frac{N - N^*}{NN^*}$$

则 $T(N)(N - N^*) \geq 0$ 。选取 Lyapunov 函数,为:

$$V(N, I, R) =$$

$$\frac{\beta}{\alpha} \int_{N^*}^N T(t) dt + I -$$

$$I^* \ln \frac{I}{I^*} + \frac{\beta}{\xi} \frac{\phi(N)}{N} \int_{R^*}^R (t - R^*) dt$$

沿模型(I)的解对 $V(N, I, R)$ 求导,得:

$$V' = \frac{\beta}{\alpha} T(N)N' + I' - I^* \frac{I}{I^*} +$$

$$\frac{\beta}{\xi} \frac{\phi(N)}{N} (R - R^*)R' =$$

$$\frac{\beta}{\alpha} T(N)[- (N - N^*) - \alpha(I - I^*)] +$$

$$(1 - \frac{I^*}{I}) [\beta I T(N) -$$

$$\beta I \frac{\phi(N)}{N} (I - I^* + R - R^*)] +$$

$$\begin{aligned} & \frac{\beta}{\xi} \frac{\phi(N)}{N} (R - R^*) [\xi(I - I^*) - \\ & (\mu + \delta)(R - R^*)] = \\ & - \frac{\beta}{\alpha} T(N)(N - N^*) - \beta \frac{\phi(N)}{N} (I - I^*)^2 - \\ & \frac{\beta(\mu + \delta)}{\xi} \frac{\phi(N)}{N} (R - R^*)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

同时, $V' = 0$ 当且仅当 $N = N^*, I = I^*, R = R^*$, 由 Lasalle 不变集原理知 E^* 全局稳定。

4 最优控制分析

由于疾病的传播和蔓延对人们的生活和健康造成的危害甚大,因此笔者将利用庞特里亚金极大值原理来考虑治疗和控制疾病传播的一些措施并给出理论分析和数值模拟^[7-8]。当模型(I)中的控制函数 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 随时间变化时,人们自然希望通过采取措施取得对疾病最优控制效果,一定时间段内人群中染病者人数能降到较低水平,同时从经济成本考虑,采取防治控制措施时所投入的费用不能太高,从而笔者可以定义目标函数为:

$$J(u_1, u_2) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[I(t) + \frac{B_1}{2} u_1^2(t) + \frac{B_2}{2} u_2^2(t) \right] \quad (2)$$

式中, t_1 表示控制开始的时间, t_2 表示控制结束的时间。

通常情况下,可以认为采取措施时的经济投入与控制措施函数 $u_1(t)$ 及 $u_2(t)$ 之间有某种非线性关系,这里假设前者是后者的二次函数, B_1 和 B_2 分别表示为降低疾病传染概率和采取治疗措施提高恢复率时所投入控制成本的权重系数。

显然,模型(I)中右端项是有界的,且由函数(2)的形式可知,被积函数关于控制函数具有凸性,从而达到最优防治效果的 $u_1^*(t), u_2^*(t)$ 是存在的,同时该最优控制也能使得目标函数的值取得最小,即染病者人数和控制成本费用也最低,于是有:

$$J(u_1^*, u_2^*) = \min_{\Omega} J(u_1, u_2)$$

其中:

$$\Omega = \{(u_1, u_2) \in L^1(t_1, t_2) \mid 0 \leq u_i \leq 1, i = 1, 2\}$$

接下来对模型(I)在时间区间 $[t_1, t_2]$ 内的控制最优解 $u_i (i = 1, 2)$ 进行分析。先定义目标函数(2)的拉格朗日函数 $L(S, I, R)$ 为:

$$L(S, I, R) = I(t) + \frac{B_1}{2} u_1^2(t) + \frac{B_2}{2} u_2^2(t)$$

同时,为了分析该控制问题,记 H 为哈密尔顿函数,其形式为:

$$\begin{aligned} H = L(S, I, R) + \sum_{i=1}^3 \lambda_i f_i = L(S, I, R) + \\ \lambda_1 \left[b - \mu S - \beta(1 - u_1(t)) SI \frac{C(N)}{N} + \delta R \right] + \\ \lambda_2 \left[\beta(1 - u_1(t)) SI \frac{C(N)}{N} - \right. \\ \left. (\mu + \alpha + \xi + u_2(t)) I \right] + \\ \lambda_3 \left[(\xi + u_2(t)) I - (\mu + \delta) R \right] \end{aligned}$$

这里 f_i 和 λ_i 为时间 t 的函数,分别表示模型(I)的右端表达式和系统的伴随变量,同时伴随变量与哈密尔顿函数满足关系,为:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1(t)}{dt} = \\ - \frac{\partial H}{\partial S} = \lambda_1 \left[u + \beta(1 - u_1) I \frac{C(N)}{N} + \right. \\ \left. \beta(1 - u_1) SI \frac{C'(N)N - C(N)}{N^2} \right] - \\ \lambda_2 \left[\beta(1 - u_1) I \frac{C(N)}{N} + \right. \\ \left. \beta(1 - u_1) SI \frac{C'(N)N - C(N)}{N^2} \right] \\ \frac{d\lambda_2(t)}{dt} = \\ - \frac{\partial H}{\partial I} = -1 + \lambda_1 \left[\beta(1 - u_1) S \frac{C(N)}{N} + \right. \\ \left. \beta(1 - u_1) SI \frac{C'(N)N - C(N)}{N^2} \right] - \\ \lambda_2 \left[\beta(1 - u_1) S \frac{C(N)}{N} + \right. \\ \left. \beta(1 - u_1) SI \frac{C'(N)N - C(N)}{N^2} \right] + \\ (\mu + \alpha + \xi + u_2) \lambda_2 - (\xi + u_2) \lambda_3 \\ \frac{d\lambda_3(t)}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial R} = \\ \lambda_1 \left[\beta(1 - u_1) SI \frac{C'(N)N - C(N)}{N^2} - \delta \right] - \\ \lambda_2 \left[\beta(1 - u_1) SI \frac{C'(N)N - C(N)}{N^2} \right] + \\ (\mu + \delta) \lambda_3 \end{aligned}$$

在末态时刻 t_2 , 令伴随变量满足横截条件: $\lambda_i(t_2) = 0, i = 1, 2, 3$ 。对于哈密尔顿函数,利用控制条件,在最优解 u_1^* 和 u_2^* 处满足:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u_1} \Big|_{u_1=u_1^*} = B_1 u_1^* + \lambda_1 \beta S^* I^* \frac{C(N^*)}{N^*} - \\ \lambda_2 \beta S^* I^* \frac{C(N^*)}{N^*} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} \Big|_{u_2=u_2^*} = B_2 u_2^* - \lambda_2 I^* + \lambda_3 I^* = 0$$

解得:

$$u_1^* = \frac{1}{B_1}(\lambda_2 - \lambda_1)\beta S^* I^* \frac{C(N^*)}{N^*}$$

$$u_2^* = \frac{1}{B_2}(\lambda_2 - \lambda_3)I^*$$

根据实际情况下对控制函数的限制,即:

$$0 \leq u_i \leq 1 \quad i = 1, 2$$

在 Ω 中,最优解 u_1^* 具有以下可能性:

- (a) $u_1^* = 0$, 当 $\frac{\partial H}{\partial u_1} < 0$;
- (b) $0 < u_1^* < 1$, 当 $\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0$;
- (c) $u_1^* = 1$, 当 $\frac{\partial H}{\partial u_1} > 0$ 。

同样,对于最优解 u_2^* ,其取值可能性与 u_1^* 类似,因此当达到最优控制效果时,控制最优解存在,可表示为:

$$u_1^* = \max\left\{\min\left\{\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)\beta S^* I^* C(N^*)}{B_1 N^*}, 1\right\}, 0\right\} \quad (3)$$

$$u_2^* = \max\left\{\min\left\{\frac{(\lambda_2 - \lambda_3)I^*}{B_2}, 1\right\}, 0\right\} \quad (4)$$

其中, u_1^* 和 u_2^* 中含有伴随变量 $\lambda_i(t)$ ($i=1, 2, 3$), 利用龙格-库塔公式,可以从数值上将 $\lambda_i(t)$ ($i=1, 2, 3$) 及 u_1^* 、 u_2^* 求出。

为了进一步了解控制函数对疾病流行和传播的抑制效果,在图 1~3 中笔者利用数值结果显示了不同情况下控制措施的具体含义及实际执行情况,并且按照这些最优防治措施执行控制方案时,能够将人群中染病者的人数控制到最少,同时对降低疾病传染率和通过治疗提高恢复率所进行的经济投入也最低,达到了通过采取防治措施对人群中疾病的传播和流行进行最优管理和控制的目的,于是得到结论(定理 4)。

定理 4 当目标函数(2)取得最小值时,模型(I)的最优控制解 u_1^* 和 u_2^* 为(3)和(4)。

图 1 显示了当基本再生数 $R_0 > 1$ 时,两种控制措施 u_1^* 和 u_2^* 同时实施的最优函数图像,以及两种最优控制措施对疾病流行状态的影响。

当不采取控制措施时,由定理 3 可知在 $R_0 > 1$ 时疾病将持续流行,并且地方病平衡点全局渐近稳定,即从初始流行状态开始,疾病最终将会稳定于地方病平衡点,从而形成地方病。当采取治疗和控制措施后,可以看到疾病会逐渐得到控制,直至最终绝灭,这说明降低传染率及通过治疗提高恢复率等联合措施在控制疾病传播过程中具有重要的作用和影响。

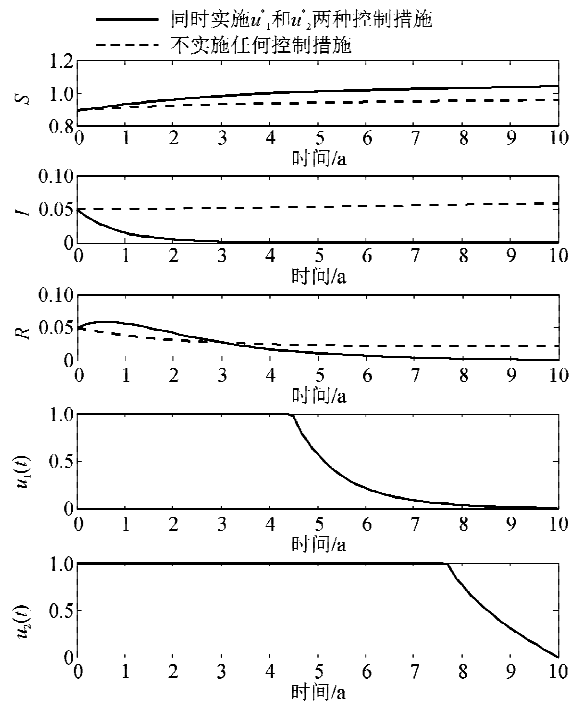


图 1 $R_0 = 1.4553 > 1$ 且两种措施同时实施时控制函数随时间变化图像及其对疾病流行的影响效果
Fig. 1 Behaviors of control functions as time varying and the effect of control measures on the disease prevalence when $R_0 = 1.4553 > 1$

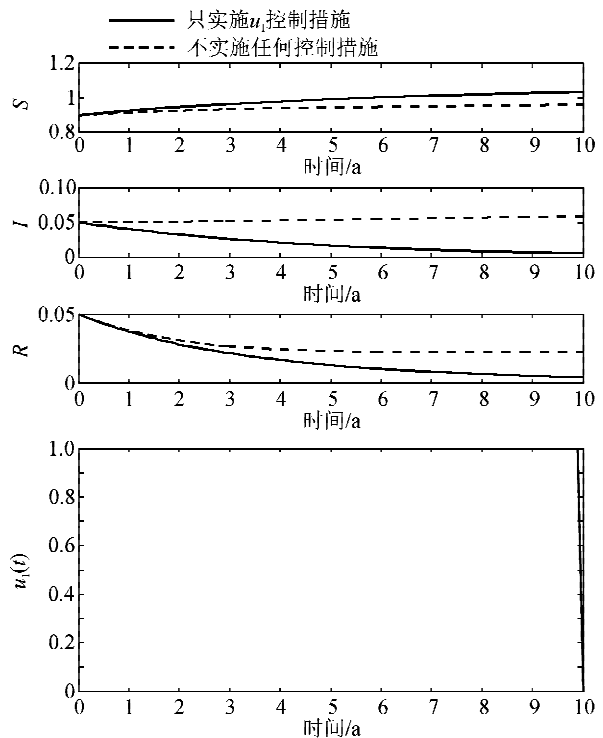


图 2 $R_0 = 1.4553 > 1$ 且只采取措施降低疾病传染率时最优控制 $u_1^*(t)$ 图像及其作用效果
Fig. 2 Behavior of the optimal control $u_1^*(t)$ aiming to reduce the infectivity and its effect on state variables when $R_0 = 1.4553 > 1$

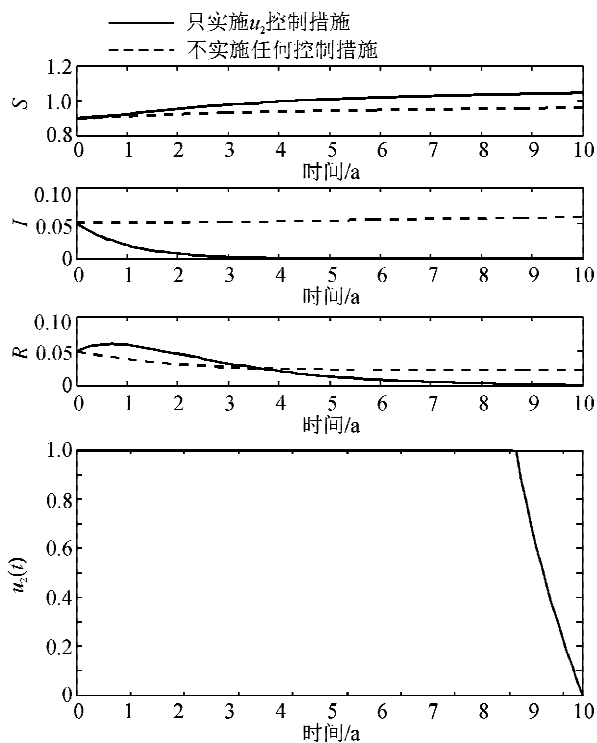


图3 $R_0 = 1.4553 > 1$ 且只采取措施提高恢复率时最优控制 u_2^* 图像及其对疾病流行的抑制效果
Fig. 3 Behavior of the optimal control $u_2^*(t)$ aiming to improve the recovery and its effect on state variables when $R_0 = 1.4553 > 1$

图2和图3显示了采取单一措施时控制函数的实施情况及其对疾病流行的影响。从图中可以看出,当只有措施 u_1 时,要达到最优控制效果,从初始时刻起 u_1^* 就需以最大值1持续作用,并延续几乎整个时间区间,但疾病也没有最终消除,仍然处于流行状态;当只有措施 u_2 时,在相同的参数条件下,虽然疾病最终得到了控制,但 u_2^* 的作用强度需比两种控制联合实施时要大,且持续的时间也长。

在图1、图2和图3中,权重系数 B_1 、 B_2 的取值相同,表明两种措施的成本一样,当改变权重系数时,进一步模拟结果发现两者的取值对最优控制措施的实施方式影响不大。

5 结 语

当前,对疾病的预防和控制是传染病防治工作

的重要内容之一,而对控制管理的效果进行分析和评价是公共卫生部门制定相关控制策略的重要参考和依据,其研究重要性随着一些新发传染病的出现和流行而日益突出。利用数学模型对疾病的发生、发展、流行和控制等过程进行理论分析和数值模拟是研究传染病问题的一种重要手段和方法,有利于疾病发展趋势的预测和最优控制策略的研究,本研究利用仓室模型建模方法,通过建立一个 SIRS 模型来分析降低疾病传染率和通过治疗提高恢复率两种控制措施对疾病流行所起的影响和作用,讨论了最优控制理论在流行病仓室数学模型中的应用问题,并对疾病流行时对易感者和染病者进行管理和控制的措施进行了分析和讨论,本研究的结果丰富了流行病动力学的研究工作,并为疾病控制工作提供了一定的理论指导和建议。

参考文献:

- [1] Bowong S. Optimal control of the transmission dynamics of tuberculosis[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2010, 61(4): 729-748.
- [2] Whang S, Choi S, Jung E. A dynamic model for tuberculosis transmission and optimal treatment strategies in South Korea[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2011, 279(1):120-131.
- [3] Bowong S, Aziz Alaoui A M. Optimal intervention strategies for tuberculosis[J]. *Commun Nonlinear Science Numer Simulat*, 2013, 18(6):1441-1453.
- [4] Okosun K O, Rachid O, Marcus N. Optimal control strategies and cost-effectiveness analysis of a malaria model[J]. *Biosystems*, 2013, 111(2):83-101.
- [5] 马知恩, 周义仓, 王稳地, 等. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [6] Horst R T, Carlos C C. How may infection age-dependent infectivity affect the dynamics of HIV/AIDS? [J]. *Siam Apply Math*, 1993, 53(5):1447-1479.
- [7] Pontryagin L S. The mathematical theory of optimal processed[M]. Taylor & Francis, 1987.
- [8] 赫孝良, 葛照强. 最优化与最优控制 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2009.

(责任编辑 李虹燕)