

文章编号: 1006-4710(2014)04-0454-06

非线性函数三次型逼近算法研究

宋巨龙¹, 钱富才², 梁锦锦¹

(1. 西安石油大学 理学院, 陕西 西安 710065; 2. 西安理工大学 自动化与信息工程学院, 陕西 西安 710048)

摘要: 为提高函数逼近的精度, 扩展二次型的适用范围, 对二次型及矩阵的概念及运算方法进行了推广, 提出了三次型及体阵的概念和运算方法, 给出了多元函数梯度、黑塞矩阵, 特别是多元函数泰勒公式的新的矩阵表达式, 为二次型的进一步深入研究提供了新的基础, 为函数逼近, 最优化等方面的研究提供了一个新的视角, 使得已有的特征值, 特征向量等有可能被进一步推广从而使二次型的研究及应用得到极大的扩展, 对于控制问题、优化问题的研究具有潜在的应用价值。

关键词: 矩阵; 二次型; 体阵; 三次型

中图分类号: O151.21 文献标志码: A

Research on approach algorithm of cubic form for nonlinear functions

SONG Julong¹, QIAN Fucai², LIANG Jinjin¹

(1. School of Science, Xi'an Shiyou University, Xi'an 710065, China;

2. Faculty of Automation and Information Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

Abstract: To improve the accuracy of function approximation and to expand the application range of quadratic form, the concept and operation method of matrix and quadratic form are extended. The concept and operation method of cubic form and cubic array are proposed. The new matrix expressions of gradient, Hesse Matrix, Taylor rule of multivariate functions are given specially. All these not only provide a new foundation for further study quadratic form but also provide a new perspective for further study function approximation and optimization. In addition to these, the concept of eigenvalues and eigenvector can be further expanded, where by making quadratic form research and application get the extremely large expansion so as to holding the potential application value for solving the problems control optimization researches. The results have certain potential practical value for solving of control problems and optimization problems.

Key words: matrix; quadratic form; cubic array; cubic form

在非线性控制领域中, 二次型最优控制方法是一个值得研究的方向, 文献[1]提出了非齐次双线性二次型最优控制迭代算法、文献[2]基于二次型性能指标对简单自适应控制系统进行了研究, 文献[3]给出了一个二次型控制方法在风量空调箱优化方面的应用。文献[4]~[6]则对广义二次型和类二次型以及矩阵的性质及应用进行了研究, 文献[7]所论及的二次型设计方法则涉及二次型在军事领域的应用, 此外二次型还在航空、自动化、化工^[7-9]等诸多领域中有着广泛的应用。在最优化方法中, 人们也常常将非线性函数展开为二次函数进行近似求解^[10], 这里也涉及二次型。受上述文献的启发我们

考虑如果能将非线性函数的三阶泰勒多项式加以应用, 用三次型替代二次型应该能够得到更为精确的结果。但是目前较为一般的方法是把非线性函数利用其二次函数替代, 这是因为多元函数三次以上的泰勒展开式的形式比较复杂, 从几何意义上看不很明确, 利用起来比较困难。比如文献[11]对多元函数的泰勒公式进行了研究, 但所使用的就是传统的多元函数泰勒展开式, 显得较为繁琐而不易理解。此外注意到函数逼近论中很多情况下也是将一个函数用多项式来替代从而达到近似计算的目的^[12], 如果我们能给出更高阶的、几何特征正直观的多项式, 也会使这种问题得到更精确的结果。

收稿日期: 2014-07-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61273127, 61304204); 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20116118110008)。

作者简介: 宋巨龙, 男, 教授, 研究方向为非线性、最优化及数值计算。E-mail: sjlong@xsysu.edu.cn。

本文根据目前的研究现状,从二次型这一概念及其重要的应用性出发,对二次型进行一个数学意义上的扩展,提出了一个新的概念——三次型。对二次型的运算方式进行稍稍改变,并由此出发给出三次型的定义和运算方法。从向量、矩阵引申出体阵的概念;从二次型扩展到三次型。还将传统的二次型和新提出来的三次型在形式上、运算方式上进行了统一,给出了三次型的各阶导数。

1 二次型

二次型的定义^[4]:

定义 1 含有 n 个变量 x_1, x_2, \dots, x_n 的二次齐次多项式 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, 其中 $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), 称为一个 n 元二次型。写成矩阵形式即为:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

这里对称矩阵 \mathbf{A} 称为二次型的矩阵,显然给定矩阵 \mathbf{A} 可以确定一个二次型,而给定二次型就有唯一的一个矩阵 \mathbf{A} 与之对应。并且 \mathbf{A} 的元素满足 $a_{ij} = a_{ji}$ ($i \neq j$) 是二次型的项 $x_i x_j$ 的系数的一半,其主对角线上的元素 a_{ii} ($i = 1, 2, \dots, n$) 是二次型的项 x_i^2 的系数。当 \mathbf{A} 为实对称矩阵时称相应的二次型为实二次型。这里对数域不做过多的讨论,主要讨论定义的形式和计算方法。

众所周知,二次型由于其形式特殊、性质特殊、应用范围广泛,因而极具研究价值。

从二次型的定义 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ 知道,它是一个 n 元二次齐次多项式。从其表达式上看,很容易让人联想到类似的函数—— n 元三次齐次多项式:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ijk} x_i x_j x_k$$

推而广之,不难写出 n 元 k 次齐次多项式。

相信很多人也想过这个问题,只不过对其理论意义和应用价值无法确定,另外由于其表现形式已经比较复杂了,失去了二次型通过矩阵运算相对简单的特性,因而如何使其运算简单化,也是需要考虑的一个问题。下面对这些问题逐一进行探讨。

2 三次型的定义

为了使得后面所讨论的问题能够有一个比较简单的形式,先给出一些定义。

定义 2 称由 n 个数 a_1, a_2, \dots, a_n 组成的 n 维数组为一个 1 度 n 维体阵,记为:

$$\overset{1}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

即为通常意义上的 n 维向量,因而 1 度 n 维体阵也和向量看作是相同的。

定义 3 称由 n^2 个数 a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 组成的正方形数表为一个 2 度 n 维体阵,记为:

$$\overset{2}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

其中 $a_{ij} = a_{ji}$ ($i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$)。即通常意义上的 n 阶方阵。

定义 4 称由 n^3 个数 a_{ijk} ($i, j, k = 1, 2, \dots, n$) 组成的立方体数阵为一个 3 度 n 维体阵,记为:

$$\overset{3}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \overset{2}{\mathbf{A}}_1 \\ \overset{2}{\mathbf{A}}_2 \\ \vdots \\ \overset{2}{\mathbf{A}}_n \end{bmatrix} = \begin{array}{ccccccccc} a_{111} & a_{112} & \cdots & a_{11n} & & & & & \\ a_{121} & a_{122} & \cdots & a_{12n} & & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & \\ a_{1n1} & a_{1n2} & \cdots & a_{1nn} & & & & & \\ \hline a_{211} & a_{212} & \cdots & a_{21n} & a_{221} & a_{222} & \cdots & a_{22n} & \cdots \\ a_{221} & a_{222} & \cdots & a_{22n} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ a_{2n1} & a_{2n2} & \cdots & a_{2nn} & & & & & \\ \hline \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ a_{nn1} & a_{nn2} & \cdots & a_{nnn} & a_{n21} & a_{n22} & \cdots & a_{n2n} & \cdots \\ a_{n21} & a_{n22} & \cdots & a_{n2n} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ a_{n21} & a_{n22} & \cdots & a_{n2n} & & & & & \\ \hline a_{n11} & a_{n12} & \cdots & a_{n1n} & a_{n21} & a_{n22} & \cdots & a_{n2n} & \cdots \\ a_{n21} & a_{n22} & \cdots & a_{n2n} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ a_{n21} & a_{n22} & \cdots & a_{n2n} & & & & & \\ \hline a_{n11} & a_{n12} & \cdots & a_{n1n} & a_{n21} & a_{n22} & \cdots & a_{n2n} & \cdots \\ a_{n21} & a_{n22} & \cdots & a_{n2n} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ a_{n21} & a_{n22} & \cdots & a_{n2n} & & & & & \\ \hline \end{array}$$

其中:

$$a_{ijk} = a_{ikj} = a_{kji} = a_{kij} = a_{jik} = a_{jki} \\ (i \neq j, \text{ 或 } j \neq k, \text{ 或 } k \neq i; i, j, k = 1, 2, \dots, n)$$

定义 5 设有 1 度 n 维体阵 $\overset{1}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, 向量 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

, 定义 $\overset{1}{\mathbf{A}}$ 与 \mathbf{x} 的乘积为一个数量:

$$\mathbf{A}x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

定义6 设有2度n维体阵:

$$\overset{2}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

向量 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, 定义 $\overset{2}{\mathbf{A}}$ 与 \mathbf{x} 的乘积为一个向量:

$$\overset{2}{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{i1}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{i2}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{in}x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \end{bmatrix}$$

而定义 $\overset{2}{\mathbf{A}}$ 与 \mathbf{x}^2 的乘积为一个数量:

$$\overset{2}{\mathbf{A}}\mathbf{x}^2 = (\overset{2}{\mathbf{A}}\mathbf{x})\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j$$

如图1所示,该结果由图中*i*方向上的 x_1, x_2, \dots, x_n 与下方的 $\overset{2}{\mathbf{A}}$ 的各行元素分别作内积,形成一个列向量,然后再和 *j*方向上的 x_1, x_2, \dots, x_n 作内积,最终形成乘积 $\overset{2}{\mathbf{A}}\mathbf{x}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j$ 。当然,也可以将此顺序颠倒一下,先在 *j*方向上作内积,然后再在 *i*方向上作内积。结果是一样的。

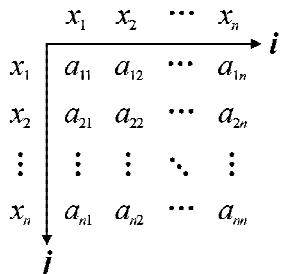


图1 2度n维体阵 $\overset{2}{\mathbf{A}}$ 与 \mathbf{x}^2 的乘积法则

Fig. 1 Multiplication rule
of 2 measure n dimension cubic array $\overset{2}{\mathbf{A}}$ and \mathbf{x}^2

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, 定义 $\overset{3}{\mathbf{A}}$ 与 \mathbf{x} 的乘积为一个2度n维体阵:

$$\overset{3}{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n a_{k11}x_k & \sum_{k=1}^n a_{k12}x_k & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{k1n}x_k \\ \sum_{k=1}^n a_{k21}x_k & \sum_{k=1}^n a_{k22}x_k & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{k2n}x_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{kn1}x_k & \sum_{k=1}^n a_{kn2}x_k & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{kn}x_k \end{bmatrix}$$

定义 $\overset{3}{\mathbf{A}}$ 与 \mathbf{x}^3 的乘积为一个1度n维体阵:

$$\overset{3}{\mathbf{A}}\mathbf{x}^3 = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki1}x_kx_i \\ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki2}x_kx_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{kin}x_kx_i \end{bmatrix}$$

定义 $\overset{3}{\mathbf{A}}$ 与 \mathbf{x}^3 的乘积为一个数:

$$\overset{3}{\mathbf{A}}\mathbf{x}^3 = (\overset{3}{\mathbf{A}}\mathbf{x}^2)\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{kij}x_kx_ix_j$$

如图2所示。

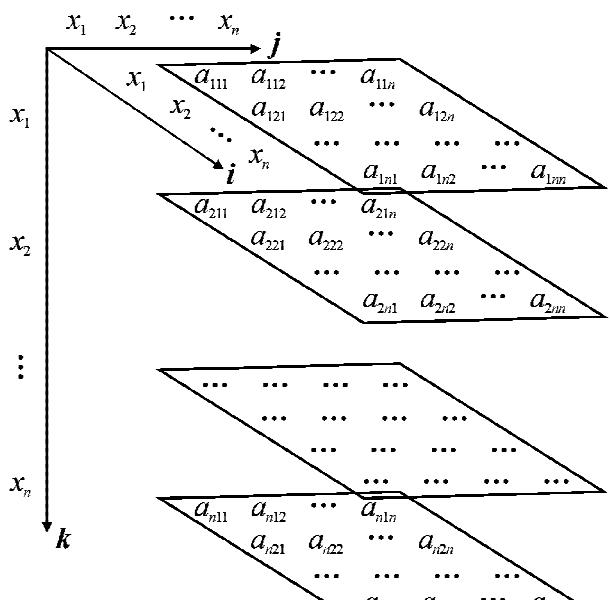


图2 3度n维体阵 $\overset{3}{\mathbf{A}}$ 与 \mathbf{x}^3 的乘积法则

Fig. 2 Multiplication rule

of 3 measure n dimension cubic array $\overset{3}{\mathbf{A}}$ and \mathbf{x}^3

定义7 设有3度n维体阵 $\overset{3}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \overset{2}{\mathbf{A}}_1 \\ \overset{2}{\mathbf{A}}_2 \\ \vdots \\ \overset{2}{\mathbf{A}}_n \end{bmatrix}$, 向量

3度 n 维体阵与向量 \mathbf{x} 的幂的乘积方法为:

1) $\mathbf{A}^3\mathbf{x}$:用 k 方向中的 x_1, x_2, \dots, x_n 与数字体阵中的所有列作内积,形成 i, j 方向上的一个2度 n 维体阵 $\mathbf{A}^3\mathbf{x}$;

2) 再将2度 n 维体阵 $\mathbf{A}^3\mathbf{x}$ 中 i 方向上的 x_1, x_2, \dots, x_n 与体阵中所有的列作内积,形成 j 方向上的一个1度 n 维体阵 $\mathbf{A}^3\mathbf{x}^2$;

3) 最后将1度 n 维体阵 $\mathbf{A}^3\mathbf{x}^2$ 中 j 方向上的 x_1, x_2, \dots, x_n 与体阵中的列作内积。

简单地说,分三步进行,每次都是将体阵中的每一列和与该列平行的 x_1, x_2, \dots, x_n 作内积,最终形成一个数字。由于体阵的对称性,这种做法可以按可能的任意一种顺序进行,其结果都是一样的。

最后,为统一起见,笔者用 $\overset{\circ}{\mathbf{A}}$ 表示常数,看做是0度1维体阵。

3 三次型的导数

根据上述定义,从导数的定义出发,不难推出以下关于三次型的各阶导数的结论。

定理1 根据上述定义, n 元齐次函数 $\overset{\circ}{\mathbf{A}}\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{A}\mathbf{x}^2$ 、 $\mathbf{A}\mathbf{x}^3$ 的导数有如下表达式:

1) 若 $\overset{\circ}{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n a_i x_i$, 则有:

$$\nabla(\overset{\circ}{\mathbf{A}}\mathbf{x}) = \overset{\circ}{\mathbf{A}}$$

2) 若 $\mathbf{A}\mathbf{x}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, 则有:

$$\textcircled{a} \quad \nabla(\mathbf{A}\mathbf{x}^2) = 2\mathbf{A}\mathbf{x}$$

$$\textcircled{b} \quad \nabla^2(\mathbf{A}\mathbf{x}^2) = 2! \overset{\circ}{\mathbf{A}}$$

3) 若 $\mathbf{A}\mathbf{x}^3 = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{kij} x_k x_i x_j$, 则有:

$$\textcircled{a} \quad \nabla(\mathbf{A}\mathbf{x}^3) = 3\mathbf{A}\mathbf{x}^2$$

$$\textcircled{b} \quad \nabla^2(\mathbf{A}\mathbf{x}^3) = 3 \cdot 2\mathbf{A}\mathbf{x}$$

$$\textcircled{c} \quad \nabla^3(\mathbf{A}\mathbf{x}^3) = 3! \overset{\circ}{\mathbf{A}}$$

这里面涉及到的符号 $\nabla f(\mathbf{x})$ 、 $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ 、 $\nabla^3 f(\mathbf{x})$ 的含义如下:

I) $\nabla f(\mathbf{x})$ 代表函数 $f(\mathbf{x})$ 的一阶导数,即梯度,为一个向量,亦即本文所提出的1度 n 维体阵;

II) $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ 代表函数 $f(\mathbf{x})$ 二阶导数,即黑塞矩阵,也就是本文所提出的由 $f(\mathbf{x})$ 的所有二阶偏导数组成的2度 n 维体阵;

III) $\nabla^3 f(\mathbf{x})$ 是以往所没有的,我们这里对它定义:由 $f(\mathbf{x})$ 的所有三阶偏导数所构成的一个3度 n 维体阵。

对于上面的结论,因为都非常简单,所以这里只对3)中的④进行证明。

证明:由于函数的表达式是由 n^3 个项的和构成的,所以我们只需证明任意一项的三阶导数都等于其系数即可。设任意一项为 $a_{kij} x_k x_i x_j$,分3种情形讨论。

情形1:当 i, j, k 互不相同时,设其任意一个3阶偏导数为 $\frac{\partial^3(a_{kij} x_k x_i x_j)}{\partial x_p \partial x_q \partial x_r}$,当 i, j, k 是 p, q, r 的任意一种组合时,注意到 a_{kij} 的对称性,可以认为其结果都是 a_{kij} ,而这种组合一共有6种,所以 $\frac{\partial^3(a_{kij} x_k x_i x_j)}{\partial x_p \partial x_q \partial x_r} = 6a_{kij}$;

情形2:当 $i=j=k$ 时,该项实际为 $a_{kkk} x_k^3$,此时的偏导数为 $\frac{\partial^3(a_{kkk} x_k^3)}{\partial x_p \partial x_q \partial x_r}$,显然只有当 $p=q=r=k$ 时,这一导数不为零,此时其导数为 $6a_{kkk}$;

情形3:当有两个下标相等而另外一个不同时,不失一般性,不妨设 $i=j \neq k$,此时该项实际为 $a_{kii} x_k x_i^2$,其偏导数为 $\frac{\partial^3(a_{kii} x_k x_i^2)}{\partial x_p \partial x_q \partial x_r}$,显然只有当 p, q, r 中任意两个等于 i ,而另外一个等于 k 时,其导数才不为零而为 a_{kii} ,等于 k 那个下标有三种选择,当其确定之后,另外两个下标有两种排序,所以也是一共有6种结果,同样考虑到 a_{kii} 的对称性,可以认为其导数为 $6a_{kii}$ 。

综合以上,可知命题3)的④是成立的。

当我们给出上述表示方法,并且有了相应函数的导数记法,原来已有的多元函数的一些表示方法可以写成和人们熟悉的一元函数一样。

例1 原来的二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 可以被直接写为 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}^2$,其一阶导数为: $\nabla f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{A}\mathbf{x}$,二阶导数为 $\nabla^2 f(\mathbf{x}) = 2\overset{\circ}{\mathbf{A}}$,与一元二次函数 $f(x) = x^2$ 的结果类似。

例2 原来的凸二次函数 $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$,可以写为: $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \overset{\circ}{\mathbf{A}}\mathbf{x}^2 + \overset{\circ}{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \overset{\circ}{\mathbf{A}}$,其一阶导数为: $\nabla f(\mathbf{x}) = \overset{\circ}{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \overset{\circ}{\mathbf{A}}$,二阶导数为 $\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \overset{\circ}{\mathbf{A}}$,与一元二次函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$ 的结果类似。

例3 此外还可以定义三次多项式函数:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{3!} \mathbf{A}^3 \mathbf{x}^3 + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 \mathbf{x}^2 + \frac{1}{1!} \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{A}$$

其一阶导数为:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{A}^3 \mathbf{x}^2 + \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{A}$$

二阶导数为:

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^3 + \mathbf{A}^2$$

三阶导数为:

$$\nabla^3 f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^3$$

这完全和一元三次函数 $f(x) = \frac{1}{3!} ax^3 + \frac{1}{2!} bx^2 + cx + d$ 的结果类似。

当然以上各例中的 \mathbf{A} 、 \mathbf{A}^2 、 \mathbf{A}^3 都必须是对称的, 否则这些命题都不一定成立。

例4 三阶偏导数连续的多元函数的泰勒公式可以写为:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}^0) + \nabla f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \\ &\quad \frac{1}{2!} \nabla^2 f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^2 + \\ &\quad \frac{1}{3!} \nabla^3 f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^3 + \\ &\quad o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|^3) \end{aligned}$$

4 结 论

提出了体阵的概念, 并通过体阵的定义推导出体阵的导数的形式和导数, 给出了一些数学结果及其记法, 给出了几个体阵的运算方法, 使得复杂问题得以简化规范, 并且将多元函数的符号记法及运算结果与一元函数的符号记法及运算结果进行了统一, 使得多元函数的表示更加简洁、更易于理解, 该结果有一定的实用价值。

另外, 当笔者给出三次型之后, 很可能有类似于二次型的应用结果。例如是否存在三次型的特征值和特征向量, 其意义如何? 再如, 动态系统的稳定性一直是理论界和工程界关注的热点问题之一, 因为不稳定的系统无法付诸实际应用, 而 Lyapunov 方法是解决这类问题的有力工具。

对于线性系统, 判断平衡点稳定性的基本思想为:首先构造一个具有二次型的 Lyapunov 函数, 然后求解 Lyapunov 方程, 就可给出所需的结果。

对于多元多项式非线性系统, 用类似的思想也可以对平衡点的稳定性进行判断, 只不过需要把二次型的 Lyapunov 函数推广到三次正定型, 这方面的潜在应用还有待于进一步研究。

参考文献:

- [1] 李俊民, 邢科义, 万百五. 连续时间非齐次双线性二次型最优控制迭代算法[J]. 西安电子科技大学学报, 2000, 27(5): 630-634.
Li Junmin, Xing Keyi, Wan Baiwu. An iterative algorithm of optimal control for the non-homogenous bilinear quadratic problem [J]. Journal of Xidian University, 2000, 27(5): 630-634.
- [2] 尹怡欣, 孙一康, 舒迪前. 具有二次型性能指标的简单自适应控制算法及其应用[J]. 控制与决策, 2000, 15(2): 236-238.
Yin Yixin, Sun Yikang, Shu Diqian. Simple adaptive control algorithm with quadratic performance and its application [J]. Control and Decision, 2000, 15(2): 236-238.
- [3] 王军, 王雁, 王瑞祥, 等. 采用逆系统设计和二次型最优控制提高变风量箱的性能[J]. 上海交通大学学报, 2006, 40(8): 1431-1436.
Wang Jun, Wang Yan, Wang Ruixiang, et al. The performance improvement of variable air volume box through inverse system design and quadratic optimal control [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2006, 40(8): 1431-1436.
- [4] 刘丁, 赵豆, 杨延西. 基于快速立体匹配的基本矩阵估计方法[J]. 西安理工大学学报, 2009, 25(1): 1-7.
Liu Ding, Zhao Dou, Yang Yanxi. Fundamental matrix estimation method based on fast stereo matching [J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2009, 25(1): 1-7.
- [5] 陈雪波, 徐望宝, 李小华, 等. 非线性系统零解稳定性判定的广义二次型方法[J]. 控制与决策, 2007, 22(1): 81-84.
Chen Xuebo, Xu Wangbao, Li Xiaohua, et al. Generalized quadratic form method for zero2 solution stability of nonlinear systems [J]. Control and Decision, 2007, 22(1): 81-84.
- [6] 刘忠汉, 吴宏鑫. 类二次型最优控制方法在自主对接控制中的应用研究[J]. 宇航学报, 2002, 32(2): 44-49.
Liu Zhonghan, Wu Hongxin. Application of a similar quadratic optimization control method in the autonomous docking control [J]. Journal of Astronautics, 2002, 32(2): 44-49.
- [7] 陈浩, 华灯鑫, 张毅坤, 等. 一种基于变换矩阵的激光雷达数据无量纲统一化转换方法[J]. 西安理工大学学报, 2014, 30(1): 1-7.
Chen Hao, Hua Dengxin, Zhang Yikun, et al. A conversion method for radar data non-dimensionalization and standardization based on transform matrix [J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2014, 30(1): 1-7.

- [8] 邵克勇,蒋锐,李文成,等. 基于二次型性能指标的不确定混沌系统最优控制器设计[J]. 化工自动化及仪表, 2013, 40(11): 1347-1350.
Shao Keyong, Jiang Rui, Li Wencheng, et al. Design of optimal controller for uncertain chaotic systems based on quadratic performance index [J]. Control and Instruments In Chemical Industry, 2013, 40(11), 1347-1350.
- [9] 王双进,冯磊,黄贤军,等. 用二次型的正定性判断晶体相稳定性[J]. 河北工业大学学报, 2007, 36(1): 30-34.
Wang Shangjin, Feng Lei, Huang Xianjun, et al. The judgement for crystal stability of phasc in positive definite quadratic form[J]. Journal of Hebei University of Technology, 2007, 36(1): 30-34.
- [10] 宋巨龙,王香柯,冯晓慧. 最优化方法[M]. 西安:西安电子科技大学出版社, 2012.
- [11] 秦国强. 多元函数的泰勒公式及其应用[J]. 吕梁教育学院学报, 2013, 30(2): 103-105.
Qin Guoqiang. Taylor rule of multivariate functions with it's application[J]. Journal of Lvliang Education Institute, 2013, 30(2): 103-105.
- [12] 莫国瑞,刘开第. 函数逼近论方法[M]. 北京:科学出版社, 2003.

(责任编辑 杨小丽)

(上接第 408 页)

- [8] 裴勇兵,谢德龙,张心亚,等. 可再分散乳胶粉的作用机理与制备研究进展[J]. 混凝土, 2007, (8): 58-60.
Fei Yongbing, Xie Delong, Zhang Xinya, et al. Progress on the mechanisms and preparation of redispersible emulsion powders[J]. Concrete, 2007, (8): 58-60.
- [9] 钱慧丽,梁会忠,韩飞,等. 低掺量水性环氧树脂对高性能混凝土抗冲击韧性的研究[J]. 混凝土, 2013, (5): 97-100.
Qian Huili, Liang Huizhong, Han Fei, et al. Study on the effects of low volume waterbome epoxy resin on dynamic ductility of high performance concrete[J]. Concrete, 2013, (5): 97-100.
- [10] 杨成忠,刘新荣,李虹. 添加聚丙烯纤维对路面混凝土抗冲击韧性的影响[J]. 重庆建筑大学学报, 2008, 30(6): 42-45.
Yang Chengzhong, Liu Xinrong, Li Hong. Adding polypropylene fiber to pavement concrete and its influence on shock resistance toughness [J]. Journal of Chongqing Jianzhu University, 2008, 30(6): 42-45.
- [11] 施永生,徐向荣. 流体力学[M]. 北京:科学出版社, 2005.
- [12] 李兴翠,邓德华,何富强. 混凝土中含气量影响因素的研究[J]. 低温建筑技术, 2008, (1): 17-19.
Li Xingcui, Deng Dehua, He Fuqiang. Study on factors influencing air content of air-entrained concrete [J]. Low Temperature Architecture Technology, 2008, (1): 17-19.
- [13] Sidney D. Mercury porosimetry; an inappropriate method for measurement of pore size distributions in cement-based materials[J]. Cement and Concrete Research, 2000, 30(2): 1517-1525.
- [14] Rakesh K, Bhattacharjee B. Study on some factors affecting the results in the use of MIP method in concrete research[J]. Cement and Concrete Research, 2003, 33(3): 417-424.
- [15] 金南国,金贤玉,郭剑飞. 混凝土孔结构与强度关系模型研究[J]. 浙江大学学报:工学版, 2005, 39(11): 1680-1684.
Jin Nanguo, Jin Xianyu, Guo Jianfei. Relationship modeling of pore structure and strength of concrete [J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2005, 39(11): 1680-1684.
- [16] 董松,张智强. 聚合物水泥基复合防水涂膜的显微结构研究[J]. 化学建材, 2008, 24(4): 35-38.
Dong Song, Zhang Zhiqiang. Study of microstructure of polymer-cement compounded waterproof coating[J]. Chemical Materials for Construction, 2008, 24 (4): 35-38.
- [17] Miltz J, Gruenbaum G. Evaluation of cushion properties of plastic foamed compressive measurements[J]. Polymer Engineering and Science, 1981, 21(15): 1010-1014.

(责任编辑 杨小丽)