

文章编号: 1006-4710(2015)01-0034-06

紊流滑动轴承-转子系统的稳定性

吕延军^{1,2}, 郭冰军^{1,2}, 张永芳³, 陈永辉^{1,2}, 周超^{1,2}

(1. 西安理工大学 机械与精密仪器工程学院, 陕西 西安 710048;

2. 西安交通大学 机械结构强度与振动国家重点实验室, 陕西 西安 710049;

3. 西安理工大学 印刷包装工程学院, 陕西 西安 710048)

摘要: 在轴承-转子系统中, 由于转子尺寸的不断增大和线速度的不断提高, 使得大部分轴承在紊流工况下运行。为分析轴承-转子动力学的稳定性, 本文采用无限长滑动轴承模型假设, 结合 Sommerfeld 变换, 获得了紊流工况下非线性油膜力, 建立了紊流滑动轴承支承的转子系统的动力学模型, 运用 Routh-Hurwitz 判据分析了轴承-转子系统的稳定性, 研究了紊流效应对紊流滑动轴承的刚度系数、阻尼系数、转子临界转速和在临界转速下转速频率比的影响。

关键词: 轴承-转子系统; 紊流效应; 无限长滑动轴承

中图分类号: TH133.31 **文献标志码:** A

Stability of rotor system supported by sliding bearing with turbulent effect

LÜ Yanjun^{1,2}, GUO Bingjun^{1,2}, ZHANG Yongfang³, CHEN Yonghui^{1,2}, ZHOU Chao^{1,2}

(1. Faculty of Mechanical and Precision Instrumental Engineering, Xi'an University of Technology,

Xi'an 710048, China; 2. State Key Laboratory of Strength and Vibration of Mechanical Structures,

Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 3. Faculty of Printing and Packaging Engineering,

Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

Abstract: The much more sliding bearings operate under the turbulent condition owing to an increase in the size and the linear velocity of the rotor in the bearing-rotor system. The analytical expression of non-linear oil film forces of the turbulent sliding bearings is obtained by the Sommerfeld transformation under the infinitely long bearing assumption, and then a rotor system with the sliding bearings support is modeled. The stability of the bearing-rotor system is determined by Routh-Hurwitz criteria. The effect of turbulence on the stiffness coefficient, damping coefficient, the critical speed of the rotor and the whirl frequency ratio at the critical speed are investigated.

Key words: bearing-rotor system; turbulent effects; infinitely long journal bearing

轴承-转子系统是发电机组、航空发动机等大型旋转机械的核心部件, 因此轴承-转子系统的稳定、安全运行就显得尤为关键。作为转子系统支承的轴承的非线性特性对整个轴承-转子系统的稳定运转有着重要影响, 因此, 支承轴承稳定性的研究越来越受到国内外学者的关注。王小静等^[1-3]对滑动轴承复合紊流润滑理论模式进行了深入研究。并提出了先进的复合紊流润滑理论, 能准确地分析滑动轴承的紊流润滑性能, 为高速重载滑动轴承的设计提供了依据。张永芳等^[4]利用多参数摄动原理, 采用零方程模式的 Constantinescu 理论即 Prandtl 混合长

度润滑理论模式对有限长紊流滑动轴承的 Reynolds 方程进行了求解, 得到了紊流有限长轴承承载力的近似解析表达式, 使得非线性油膜承载力能够被快速计算出来。Zhang Yongfang 等^[5]采用变分原理和分离变量法给出了一种紊流无限长轴承非线性油膜力的近似解析表达式, 快速求解了具有下游 Reynolds 和上下游 Reynolds 边界条件的轴承润滑 Reynolds 方程。Chang-Jian C. W. 等^[6]对紊流滑动轴承支承的转子系统的分岔和混沌等非线性行为进行了研究, 通过采用长轴承假设模型得到了紊流长轴承假设下的油膜力。Amamou A. 等^[7]以径向滑

收稿日期: 2014-08-19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51375380); 机械结构强度及振动国家重点实验室开放课题(SV2014-KF-08); 陕西省自然科学基金资助项目(2014JM2-5082)。

作者简介: 吕延军, 男, 教授, 博导, 主要研究方向为润滑理论和新型轴承技术、非线性动力学及控制。

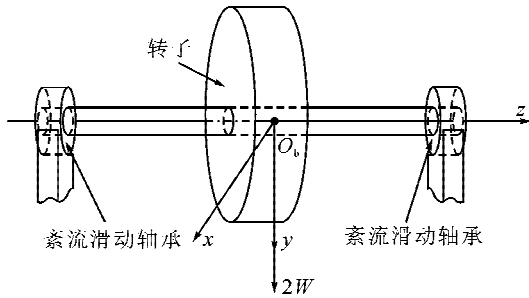
E-mail: yanjunlu@xaut.edu.cn.

动轴承为刚性转子提供支承,采用无限短轴承模型研究了转子平衡点的分岔和极限环。Chouchane M. 等^[8]以径向滑动轴承为刚性转子系统的支承,采用无限长轴承模型求解非线性油膜力,运用数值延拓法分析了动压滑动轴承的非线性稳定性。以上这些研究均是针对滑动轴承(紊流或层流)的非线性油膜力或其支承转子系统的非线性动力学展开的研究,并未对轴承的动力学系数及稳定性进行研究。Wang J. K. 等^[9]以无限短轴承为转子系统提供支承,并将 Hopf 分岔理论应用于轴承-转子系统,分析了考虑紊流效应的轴承-转子系统的稳定性。Lu Yanjun 等^[10]将预估校正机理、Newton-Raphson 和 Wilson- θ 法相结合,运用 Hopf 分岔理论分析了非线性轴承-转子耦合系统周期解的稳定性和分岔。

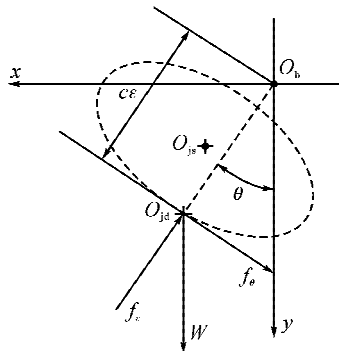
本文以无限长滑动轴承的非线性油膜力作为轴承-转子系统的支承力,推导了紊流条件下长轴承的刚度和阻尼系数以及轴承-转子系统的临界转速。运用 Routh-Hurwitz 判据分析了轴承-转子系统的稳定性,研究了紊流效应对刚度系数、阻尼系数、转子临界转速和在临界转速下转速频率比的影响。

1 轴承-转子系统的运动方程

图 1(a)是紊流滑动轴承支承的刚性转子模型,图 1(b)是转子在轴承间隙圆中的运动轨迹示意图。



(a) 紊流滑动轴承支承的刚性转子模型



(b) 转子在轴承间隙圆中的运动轨迹示意图

图 1 轴承-转子系统模型示意图

Fig. 1 The model of the bearing-rotor system

图中, O_b 为轴承中心; O_{js} 为轴颈中心的静态平衡位置; O_{jd} 为轴颈中心的动态位置; W 为每个轴承的载荷; ε 和 θ 分别表示轴颈中心的动态无量纲偏心率和无量纲偏位角; c 为半径间隙; f_e 和 f_θ 分别表示径向轴承油膜力的径向和切向分量; x 和 y 分别表示水平方向和垂直方向的坐标。

图 1 中所示的轴承-转子系统在极坐标系下的运动方程可写为:

$$\begin{cases} -m\epsilon'' - m\epsilon\theta' = -f_e + W\cos\theta \\ -m\epsilon\theta' + 2m\epsilon'\theta' = -f_\theta - W\sin\theta \end{cases} \quad (1)$$

式中, m 为集总到每个轴承上的转子质量。

用 $\tau = \omega t$ 将时间无量纲后得到运动方程的无量纲形式为:

$$\begin{cases} \epsilon'' + \epsilon\theta' - F_e - \frac{W}{mc\omega^2}\cos\theta = 0 \\ \theta'' - \frac{2\epsilon'\theta'}{\epsilon} - \frac{F_\theta}{\epsilon} - \frac{W}{mc\epsilon\omega^2}\sin\theta = 0 \end{cases} \quad (2)$$

式中, F_e 和 F_θ 分别为无量纲非线性油膜力的径向分量与切向分量。

图 2 所示为轴承计算坐标。图中, $xO_b y$ 是轴承坐标系, φ 是从轴承上方垂线开始计量至油膜位置的角度, ω 是轴颈转速。

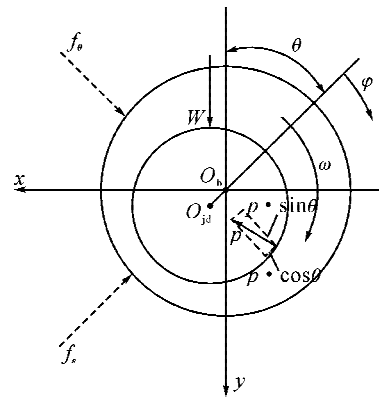


图 2 轴承的计算坐标

Fig. 2 Calculation coordinates of sliding bearing

无限长滑动轴承非线性油膜力的径向和切向分量分别为:

$$\begin{aligned} F_e &= \int_{-1}^1 \int_0^\pi -P(\varphi)\cos\varphi d\varphi d\lambda = \\ &= 2 \int_0^\pi \frac{dP(\varphi)}{d\varphi} \sin\varphi d\varphi = \\ &= \frac{4C_1 + (1-\epsilon^2)(1-2\theta')}{G_\varphi(1-\epsilon^2)^2} + \frac{\epsilon'\pi}{2G_\varphi(1-\epsilon^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} F_\theta &= \int_{-1}^1 \int_0^\pi -P(\varphi)\sin\varphi d\varphi d\lambda = \\ &= -2 \int_0^\pi \frac{dP(\varphi)}{d\varphi} \cos\varphi d\varphi = \end{aligned}$$

$$\frac{(1-2\theta')\pi\epsilon}{2G_\varphi(1-\epsilon^2)^{3/2}} + \frac{2\epsilon'\epsilon}{G_\varphi(1-\epsilon^2)^2} + \frac{3\epsilon\pi C_1}{G_\varphi(1-\epsilon^2)^{5/2}} \quad (4)$$

式中, $C_1 = \frac{(1-\epsilon^2)^{1/2}}{2\pi(2+\epsilon^2)}[\pi(1-2\theta')(1-\epsilon^2)^{1/2} + 4\epsilon']$,

紊流因子 $G_\varphi = \frac{1}{12 + 0.0136Re^{0.90}}$, Re 为雷诺数。

为了求解式(2)的二阶非线性运动方程,将该运动方程表示在状态空间。

令 $x_1 = \epsilon, x_2 = \epsilon', x_3 = \theta, x_4 = \theta'$ 和无量纲转速 $\bar{\omega} = \omega\sqrt{c/g}$, 可得如下无量纲状态方程:

$$x_1' = x_2 \quad (5)$$

$$x_2' = -x_1x_2' + \frac{f_\epsilon}{mc\omega^2} - \frac{g}{c\omega^2}\cos x_3 = \quad (6)$$

$$-x_1x_2' + F_\epsilon - \frac{g}{c\omega^2}\cos x_3$$

$$x_3' = x_4 \quad (7)$$

$$x_4' = \frac{2x_2x_4}{x_1} + \frac{f_\theta}{x_1mc\omega^2} + \frac{g}{x_1c\omega^2}\sin x_3 = \quad (8)$$

$$\frac{2x_2x_4}{x_1} + \frac{F_\theta}{x_1} + \frac{g}{x_1c\omega^2}\sin x_3$$

式中, g 是引力常量。

将式(5)~(8)表示为如下形式:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \bar{\omega}) \quad (9)$$

通过求解式(9)可得系统的稳态平衡位置 \mathbf{x}_s (由式 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_s, \bar{\omega}) = 0$ 求得稳态平衡位置 \mathbf{x}_s), 即 $x_{1s} = \epsilon_s, x_{2s} = \epsilon'_s, x_{3s} = \theta_s, x_{4s} = \theta'_s$ 。下标 s 表示稳态平衡位置。考虑紊流效应的系统稳态平衡位置方程如下:

$$\left(\frac{4+x_{1s}^2}{G_\varphi(2+x_{1s}^2)(1-x_{1s}^2)}\right)^2 + \pi^2 x_{1s}^2 \left[\frac{5+x_{1s}^2}{2G_\varphi(1-x_{1s}^2)^{3/2}(2+x_{1s}^2)}\right]^2 = \left(\frac{1}{\bar{\omega}^2}\right)^2 \quad (10)$$

$$x_{2s} = 0 \quad (11)$$

$$x_{3s} = -\arctan \frac{\pi x_{1s}(5+x_{1s}^2)}{(4+x_{1s}^2)(1-x_{1s}^2)^{1/2}} \quad (12)$$

$$x_{4s} = 0 \quad (13)$$

通过 Sommerfeld 数 $\sigma = \mu B \omega R^3 / (Wc^2)$, 引入系统参数 S :

$$S = \frac{\sigma}{\bar{\omega}} = \frac{\mu BR^3}{c^2 \sqrt{Wmc}}$$

由于 $\frac{1}{\bar{\omega}^2} = \frac{S^2}{\sigma^2} = \frac{S^2 W^3 c^4}{\mu^2 B^2 \omega^2 R^6 g}$, 代入式(10)可得到系统参数 S 和偏心率 ϵ 之间的关系, 即:

$$\left(\frac{4+x_{1s}^2}{G_\varphi(2+x_{1s}^2)(1-x_{1s}^2)}\right)^2 + \pi^2 x_{1s}^2 \times$$

$$\left(\frac{5+x_{1s}^2}{2G_\varphi(1-x_{1s}^2)^{3/2}(2+x_{1s}^2)}\right)^2 = \left(\frac{S^2 W^3 c^4}{\mu^2 B^2 \omega^2 R^6 g}\right)^2 \quad (14)$$

2 轴承-转子系统的稳定性分析

2.1 轴承的刚度系数和阻尼系数

刚度系数 k_{ij} ($i, j = \epsilon, \theta$) 和阻尼系数 b_{ij} ($i, j = \epsilon', \theta'$) 的定义如下:

$$\begin{bmatrix} k_{\epsilon\epsilon} & k_{\theta\epsilon} \\ k_{\theta\epsilon} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial F_\epsilon}{c\partial\epsilon} & -\frac{\partial F_\epsilon}{c\epsilon\partial\theta} + \frac{F_\theta}{c\epsilon} \\ -\frac{\partial F_\theta}{c\partial\epsilon} & -\frac{\partial F_\theta}{c\epsilon\partial\theta} - \frac{F_\epsilon}{c\epsilon} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} b_{\epsilon\epsilon'} & b_{\theta\epsilon'} \\ b_{\theta\epsilon'} & b_{\theta\theta'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial F_\epsilon}{c\partial\epsilon'} & -\frac{\partial F_\epsilon}{c\epsilon\partial\theta'} \\ -\frac{\partial F_\theta}{c\partial\epsilon'} & -\frac{\partial F_\theta}{c\epsilon\partial\theta'} \end{bmatrix} \quad (16)$$

将无量纲油膜压力表达式代入式(15), 并简化结果表达式, 得到刚度矩阵 \mathbf{K} 的元素为:

$$k_{\epsilon\epsilon} = -\frac{1}{G_\varphi(1-\epsilon^2)^2} \left\{ \frac{2\epsilon[\pi(1-2\theta')\sqrt{1-\epsilon^2} + 4\epsilon']}{\pi\sqrt{1-\epsilon^2}(2+\epsilon^2)} + \frac{4\epsilon\sqrt{1-\epsilon^2}[\pi(1-2\theta')\sqrt{1-\epsilon^2} + 4\epsilon']}{\pi(2+\epsilon^2)^2} - \frac{2\epsilon(1-2\theta')(1+\epsilon^2)}{2+\epsilon^2} \right\} + \frac{4\epsilon}{G_\varphi(1-\epsilon^2)^3} \left\{ \frac{2\sqrt{1-\epsilon^2}[\pi(1-2\theta')\sqrt{1-\epsilon^2} + 4\epsilon']}{\pi(2+\epsilon^2)} + (1-\epsilon^2)(1-2\theta') \right\} + \frac{3}{2} \frac{\pi\epsilon\epsilon'}{G_\varphi(1-\epsilon^2)^{5/2}} \quad (17)$$

$$k_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \frac{\pi(1-2\theta')}{G_\varphi(1-\epsilon^2)^{3/2}} + \frac{2\epsilon\epsilon'}{G_\varphi(1-\epsilon^2)} - \frac{3}{2} \frac{\pi(1-2\theta')\sqrt{1-\epsilon^2}}{G_\varphi(1-\epsilon^2)^2(2+\epsilon^2)} \quad (18)$$

$$k_{\theta\epsilon} = -\frac{1}{2} \frac{1}{G_\varphi(\epsilon^2-1)(2+\epsilon^2)^2\sqrt{1-\epsilon^2}} \times (-2\pi\epsilon^5 + 4\pi\epsilon^5\theta' + 12\epsilon'\epsilon^4\sqrt{1-\epsilon^2} - 6\pi\epsilon^4\theta' + 3\pi\epsilon^4 + 6\pi\epsilon^2\theta' - 3\pi\epsilon^2 + 4\epsilon'\epsilon^2\sqrt{1-\epsilon^2} - 4\pi\theta' + 8\epsilon'\sqrt{1-\epsilon^2}) \quad (19)$$

$$k_{\theta\theta} = -\frac{2\sqrt{1-\epsilon^2}[\pi(1-2\theta')\sqrt{1-\epsilon^2} + 4\epsilon']}{G_\varphi\pi\epsilon(1-\epsilon^2)^2(2+\epsilon^2)} + \frac{(1-2\theta')(1-\epsilon^2)}{G_\varphi\epsilon(1-\epsilon^2)^2} + \frac{1}{2} \frac{\pi\theta'}{G_\varphi\epsilon(1-\epsilon^2)^{3/2}} \quad (20)$$

同样地, 将无量纲油膜力表达式代入式(16)并简化结果表达式, 得到阻尼矩阵 \mathbf{b} 的元素为:

$$b_{\epsilon\epsilon'} = -\frac{8}{G_\varphi\pi(1-\epsilon^2)^{3/2}(2+\epsilon^2)} + \frac{\pi}{2G_\varphi(1-\epsilon^2)^{3/2}} \quad (21)$$

$$b_{\theta\theta'} = -\frac{2\epsilon}{G_\varphi(1-\epsilon^2)(2+\epsilon^2)} \quad (22)$$

$$b_k = -\frac{2\varepsilon}{G_\varphi(1-\varepsilon^2)(2+\varepsilon^2)} \quad (23)$$

$$b_\omega = -\frac{\pi(5+\varepsilon^2)}{G_\varphi(1-\varepsilon^2)^{3/2}(2+\varepsilon^2)} \quad (24)$$

2.2 不稳定临界值

式(9)给出的运动方程 $\dot{x}' = f(x, \bar{\omega})$ 具有稳态平衡位置 x_s 。当轴承-转子系统的其他参数都固定时,转速 $\bar{\omega}$ 被认为是系统参数。根据 Hopf 分岔理论,如果运动方程中的参数 $\bar{\omega}$ 比某个临界转速 $\bar{\omega}_{st}$ 大,那么一个孤立的静态点 $x_s(\bar{\omega})$ 将失去它的线性稳定性,表现为有一个共轭复数特征对穿过右半平面,即特征值的正实部大于零。因此,临界值 $\bar{\omega}_{st}$ 就是轴承-转子系统的不稳定临界值。

应用泰勒展开,将非线性运动方程的右端在静态平衡位置 $x = x_s$ 处展开为:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m\omega^2} \frac{\partial f_\varepsilon}{c \partial x_1} & \frac{1}{m\omega^2} \frac{\partial f_\varepsilon}{c \partial x_2} & -\frac{x_1}{m\omega^2} \left(\frac{f_\theta}{cx_1} - \frac{\partial f_\varepsilon}{cx_1 \partial x_3} \right) & \frac{x_1}{m\omega^2} \frac{\partial f_\varepsilon}{cx_1 \partial x_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{x_1 m\omega^2} \frac{\partial f_\theta}{c \partial x_1} & \frac{1}{x_1 m\omega^2} \frac{\partial f_\theta}{c \partial x_2} & -\frac{1}{m\omega^2} \left(-\frac{\partial f_\theta}{cx_1 \partial x_3} - \frac{f_\varepsilon}{cx_1} \right) & \frac{1}{m\omega^2} \frac{\partial f_\theta}{cx_1 \partial x_1} \end{bmatrix} \quad (26)$$

通过引入变量 $x_{1s} = \varepsilon_s, x_{2s} = \varepsilon_s', x_{3s} = \theta_s, x_{4s} = \theta_s'$, 以及上述的刚度和阻尼系数矩阵,式(26)可以写为:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m\omega^2} k_{\varepsilon\varepsilon} & -\frac{1}{m\omega} b_{\varepsilon\varepsilon} & -\frac{\varepsilon}{m\omega^2} k_{\varepsilon\theta} & -\frac{\varepsilon}{m\omega} b_{\varepsilon\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\varepsilon m\omega^2} k_{\theta\varepsilon} & -\frac{1}{\varepsilon m\omega} b_{\theta\varepsilon} & -\frac{1}{m\omega^2} k_{\theta\theta} & -\frac{1}{m\omega} b_{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad (27)$$

令无量纲刚度系数 $\bar{k}_{ij} = [(c/R)^3 / (\mu\omega L)] k_{ij}, (i, j = \varepsilon, \theta)$, 无量纲阻尼系数 $\bar{b}_{ij} = [(c/R)^3 / (\mu L)] b_{ij}, (i, j = \varepsilon, \theta)$, 式(27)的无量纲形式为:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\pi\sigma}{\omega^2} \bar{k}_{\varepsilon\varepsilon} & -\frac{\pi\sigma}{\omega^2} \bar{b}_{\varepsilon\varepsilon} & -\frac{\varepsilon\pi\sigma}{\omega^2} \bar{k}_{\varepsilon\theta} & -\frac{\varepsilon\pi\sigma}{\omega^2} \bar{k}_{\theta\varepsilon} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\pi\sigma}{\varepsilon\omega^2} \bar{k}_{\theta\varepsilon} & -\frac{\pi\sigma}{\varepsilon\omega^2} \bar{b}_{\theta\varepsilon} & -\frac{\pi\sigma}{\omega^2} \bar{k}_{\theta\theta} & -\frac{\pi\sigma}{\omega^2} \bar{b}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad (28)$$

通过 $f(x, \bar{\omega}) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_s, \bar{\omega}) \Delta x$ 和式(27)可以得到 $[\varepsilon'' \quad \theta'']^T$:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\pi\sigma}{\omega^2} \bar{k}_{\varepsilon\varepsilon} & -\frac{\pi\sigma}{\omega^2} \bar{b}_{\varepsilon\varepsilon} & -\frac{\varepsilon\pi\sigma}{\omega^2} \bar{k}_{\varepsilon\theta} & -\frac{\varepsilon\pi\sigma}{\omega^2} \bar{k}_{\theta\varepsilon} \\ -\frac{\pi\sigma}{\varepsilon\omega^2} \bar{k}_{\theta\varepsilon} & -\frac{\pi\sigma}{\varepsilon\omega^2} \bar{b}_{\theta\varepsilon} & -\frac{\pi\sigma}{\omega^2} \bar{k}_{\theta\theta} & -\frac{\pi\sigma}{\omega^2} \bar{b}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon \\ \Delta\varepsilon' \\ \Delta\theta \\ \Delta\theta' \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$f(x, \bar{\omega}) = f(x_s, \bar{\omega}) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_s, \bar{\omega}) \Delta x + \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_s, \bar{\omega}) (\Delta x)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_s, \bar{\omega}) (\Delta x)^3 + \dots$$

式中, $\Delta x(\bar{\omega}) = x(\bar{\omega}) - x_s(\bar{\omega})$, 零阶项 $f(x_s, \bar{\omega})$ 用于确定静态平衡位置,一阶项 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_s, \bar{\omega})$ 是式(9)的雅可比矩阵,用来通过分析特征值进而分析动态特性。二阶项 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_s, \bar{\omega})$ 和三阶项 $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_s, \bar{\omega})$ 用来判断周期解的稳定性,确定周期解的幅值和频率。

系统的运动方程式(5)~(8)在静态平衡位置 x_s 处 ($f(x_s, \bar{\omega}) = 0$) 的雅可比矩阵 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_s, \omega)$ 为:

如果系统正好处于临界值 $\bar{\omega}_{st}$, 那么轴颈的运动方程可以写成如下形式:

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_s + A_\varepsilon e^{i\Omega t} \\ \theta = \theta_s + A_\theta e^{i\Omega t} \end{cases} \quad (30)$$

式中, $\Omega = \bar{\omega}_s / \bar{\omega}_{st}$ 是在临界转速 $\bar{\omega}_{st}$ 时的转动频率比。 $\bar{\omega}_s$ 是在临界转速 $\bar{\omega}_{st}$ 时的无量纲转速频率。 A_ε 和 A_θ 分别为在临界转速 $\bar{\omega}_{st}$ 时 ε 和 θ 的幅值。

将式(29)代入式(28),得到下面的表达式:

$$A_\varepsilon (\Omega^2 - i\Omega \frac{\pi\sigma}{\omega_{st}^2} \bar{b}_{\varepsilon\varepsilon} - \frac{\pi\sigma}{\omega_{st}^2} \bar{k}_{\varepsilon\varepsilon}) + \quad (31)$$

$$A_\theta (-i\Omega \frac{\varepsilon_s \pi\sigma}{\omega_{st}^2} \bar{b}_{\varepsilon\theta} - \frac{\varepsilon_s \pi\sigma}{\omega_{st}^2} \bar{k}_{\theta\varepsilon}) = 0$$

$$A_\varepsilon (-i\Omega \frac{\pi\sigma}{\varepsilon_s \omega_{st}^2} \bar{b}_{\theta\varepsilon} - \frac{\pi\sigma}{\varepsilon_s \omega_{st}^2} \bar{k}_{\theta\varepsilon}) + \quad (32)$$

$$A_\theta (\Omega^2 - i\Omega \frac{\pi\sigma}{\omega_{st}^2} \bar{b}_{\theta\theta} - \frac{\pi\sigma}{\omega_{st}^2} \bar{k}_{\theta\theta}) = 0$$

为了求解式(31)、(32)的非平凡解,必须满足下面的条件:

$$\begin{vmatrix} \Omega^2 - i\Omega \frac{\pi\sigma}{\omega_{st}^2} \bar{b}_{\varepsilon\varepsilon} - \frac{\pi\sigma}{\omega_{st}^2} \bar{k}_{\varepsilon\varepsilon} & -i\Omega \frac{\varepsilon_s \pi\sigma}{\omega_{st}^2} \bar{b}_{\varepsilon\theta} - \frac{\varepsilon_s \pi\sigma}{\omega_{st}^2} \bar{k}_{\theta\varepsilon} \\ -i\Omega \frac{\pi\sigma}{\varepsilon_s \omega_{st}^2} \bar{b}_{\theta\varepsilon} - \frac{\pi\sigma}{\varepsilon_s \omega_{st}^2} \bar{k}_{\theta\varepsilon} & \Omega^2 - i\Omega \frac{\pi\sigma}{\omega_{st}^2} \bar{b}_{\theta\theta} - \frac{\pi\sigma}{\omega_{st}^2} \bar{k}_{\theta\theta} \end{vmatrix} = 0 \quad (33)$$

即:

$$(\bar{\omega}_{st}^2 \Omega^2 - i\Omega\pi\bar{\sigma}_{\epsilon\epsilon} - \pi\bar{\sigma}_{\epsilon\theta}) (\bar{\omega}_{st}^2 \Omega^2 - i\Omega\pi\bar{\sigma}_{\theta\theta} - \pi\bar{\sigma}_{\theta\theta}) -$$

$$(i\Omega\pi\bar{\sigma}_{\theta\theta} | \pi\bar{\sigma}_{\theta\theta}) (i\Omega\pi\bar{\sigma}_{\theta\epsilon} | \pi\bar{\sigma}_{\theta\epsilon}) = 0$$

令 $K_{ij} = \pi\bar{\sigma}_{ij}$, $B_{ij} = \pi\bar{\sigma}_{ij}$, 则:

$$(\bar{\omega}_{st}^2 \Omega^2 - K_{\epsilon\epsilon}) (\bar{\omega}_{st}^2 \Omega^2 - K_{\theta\theta}) - \Omega^2 B_{\epsilon\theta} B_{\theta\epsilon} - K_{\theta\epsilon} K_{\epsilon\theta} + \Omega^2 B_{\theta\theta} B_{\theta\theta} - i\Omega [B_{\theta\theta} (\bar{\omega}_{st}^2 \Omega^2 - K_{\epsilon\epsilon}) + B_{\theta\epsilon} K_{\epsilon\theta} + B_{\epsilon\epsilon} (\bar{\omega}_{st}^2 \Omega^2 - K_{\theta\theta}) + B_{\theta\theta} K_{\theta\theta}] = 0$$

分别令式(35)的实部和虚部为零,则:

$$(\bar{\omega}_{st}^2 \Omega^2 - K_{\epsilon\epsilon}) (\bar{\omega}_{st}^2 \Omega^2 - K_{\theta\theta}) - \Omega^2 B_{\epsilon\theta} B_{\theta\theta} - K_{\theta\epsilon} K_{\epsilon\theta} + \Omega^2 B_{\theta\theta} B_{\theta\theta} = 0$$

$$B_{\theta\theta} (\bar{\omega}_{st}^2 \Omega^2 - K_{\epsilon\epsilon}) + B_{\epsilon\epsilon} (\bar{\omega}_{st}^2 \Omega^2 - K_{\theta\theta}) + B_{\theta\epsilon} K_{\epsilon\theta} + B_{\theta\theta} K_{\theta\theta} = 0$$

通过式(36)和(37)可以得到如下关系式:

$$\bar{\omega}_s^2 = \bar{\omega}_{st}^2 \Omega^2 = \frac{B_{\theta\theta} K_{\epsilon\epsilon} + B_{\epsilon\epsilon} K_{\theta\theta} - B_{\theta\epsilon} K_{\epsilon\theta} - B_{\theta\theta} K_{\theta\theta}}{B_{\theta\theta} + B_{\epsilon\epsilon}}$$

$$\Omega^2 = \frac{\bar{\omega}_s^2}{\bar{\omega}_{st}^2} = \frac{(\bar{\omega}_s^2 - K_{\epsilon\epsilon}) (\bar{\omega}_s^2 - K_{\theta\theta}) - K_{\theta\epsilon} K_{\epsilon\theta}}{B_{\theta\theta} B_{\epsilon\epsilon} - B_{\theta\epsilon} B_{\theta\theta}}$$

因此,无量纲临界转速为:

$$\bar{\omega}_{st}^2 = \bar{\omega}_s \sqrt{\frac{B_{\theta\theta} B_{\epsilon\epsilon} - B_{\theta\epsilon} B_{\theta\theta}}{(\bar{\omega}_s^2 - K_{\epsilon\epsilon}) (\bar{\omega}_s^2 - K_{\theta\theta}) - K_{\theta\epsilon} K_{\epsilon\theta}}}$$

式中,无量纲转速为:

$$\bar{\omega}_s = \sqrt{\frac{B_{\theta\theta} K_{\epsilon\epsilon} + B_{\epsilon\epsilon} K_{\theta\theta} - B_{\theta\epsilon} K_{\epsilon\theta} - B_{\theta\theta} K_{\theta\theta}}{B_{\theta\theta} + B_{\epsilon\epsilon}}}$$

3 数值算例及分析

轴承-转子系统参数如下:宽径比 $B/d=3$, 半径间隙 $c=0.24 \text{ mm}$, $B=0.03 \text{ m}$, $m=1 \text{ kg}$, 润滑油粘度 $\mu=0.022 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ 。图3示出了紊流对稳态偏心率 ϵ 的影响。图3表明当系统参数 $S \leq 0.02$ 时,紊流对稳态偏心率有很大的影响。当 $S=0.01$ 时,在层流状态下,稳态偏心率 $\epsilon=0.82$ 。在系统参数数相同的条件下,当雷诺数 $Re=2500$ 时, $\epsilon=0.76$; 当雷诺数 $Re=5000$ 时, $\epsilon=0.70$; 当雷诺数 $Re=10000$ 时, $\epsilon=0.56$ 。随着系统参数 S 的增大,紊流对稳态偏心率的影响会逐渐减弱。图4和图5分别示出了当雷诺数 $Re=5000$ 时紊流对轴承-转子系统的刚度系数 $k_{ij} (i, j = \epsilon, \theta)$ 和阻尼系数 $b_{ij} (i, j = \epsilon, \theta)$ 的影响,可以看出紊流对轴承-转子系统的刚度和阻尼系数有较大的影响。

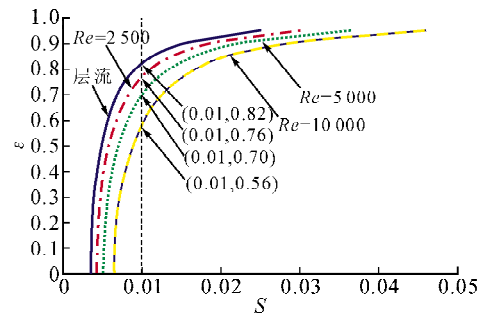


图3 紊流对偏心率 ϵ 的影响
Fig. 3 The effects of turbulence on the eccentricity ratio

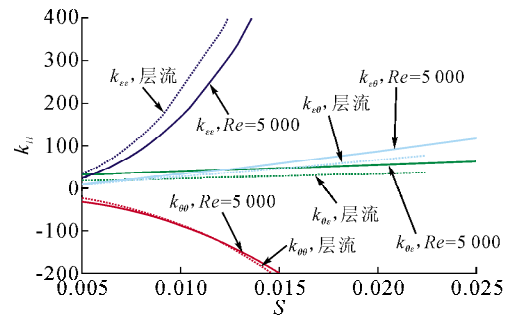


图4 紊流对无量纲刚度系数 $k_{ij} (i, j = \epsilon, \theta)$ 的影响
Fig. 4 The effects of turbulence on the dimensionless stiffness coefficients $k_{ij} (i, j = \epsilon, \theta)$

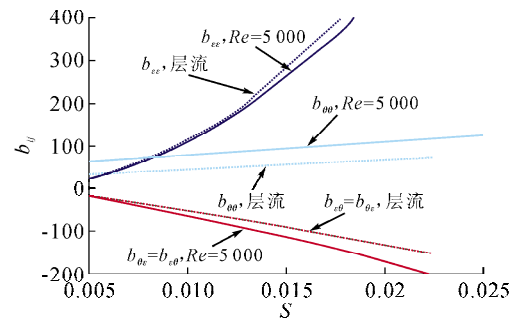
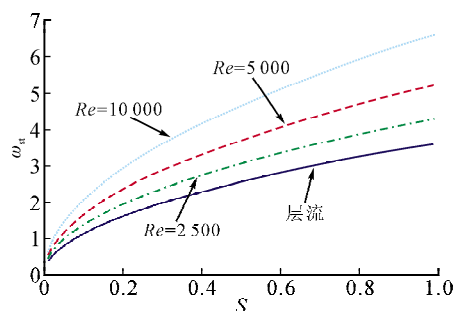
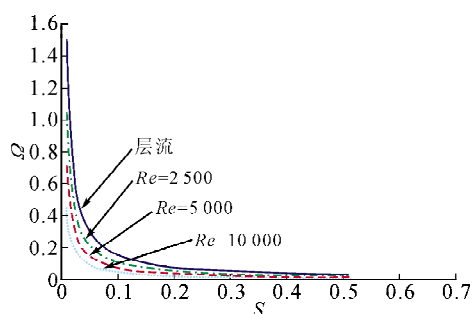


图5 紊流对无量纲阻尼系数 $b_{ij} (i, j = \epsilon, \theta)$ 的影响
Fig. 5 The effects of turbulence on the dimensionless damping coefficients $b_{ij} (i, j = \epsilon, \theta)$

图6所示为紊流对临界转速的影响。在紊流和层流情况下,随着系统参数 S 的增大,系统的临界转速也随着增大。特别地,在紊流状况时这种变化比较明显。

图7所示为紊流对临界转速下转速频率比的影响。表明当系统参数 S 大于0.15时,紊流对转速频率比的影响可以忽略,当系统参数 $0.08 < S < 0.15$ 时,转速频率比约为0.2,当系统参数小于0.08时,紊流对临界转速下转动频率比的影响非常明显,并且 Reynolds 数越大对转速频率比影响越大。

图6 紊流对无量纲临界速度 ω_{st} 的影响Fig. 6 The effects of turbulence on the dimensionless critical speed ω_{st} 图7 紊流对临界速度 ω_{st} 下转动频率比的影响Fig. 7 The effects of turbulence on the whirl frequency ratio Ω at the critical speed ω_{st}

4 结论

1) 推导了紊流条件下长轴承的刚度系数和阻尼系数,并结合 Routh-Hurwitz 判据推导了轴承-转子系统的临界转速。

2) 随着系统参数 S 的增大,紊流对稳态偏心率的影响逐渐减弱。紊流对轴承-转子系统的刚度和阻尼系数有较大的影响。

3) 随着系统参数数 S 的增大,系统的临界速度也随之增大。临界转速下转动频率比随之减小。

参考文献:

- [1] 王小静,张直明,孙美丽.复合型紊流润滑理论模式的研究[J].摩擦学学报,2000,20(2):127-130.
Wang Xiaojing, Zhang Zhiming, Sun Meili. A combined theory for turbulence in lubricating films [J]. Tribology, 2000,20(2):127-130.
- [2] 王小静,苏荻,张直明.基于复合型紊流润滑理论的径

向滑动轴承紊流润滑性能的研究[J].机械工程学报,2003,39(3):85-89.

Wang Xiaojing, Su Hong, Zhang Zhiming. Study on the performance of journal bearing in turbulent regime with the combined Reynolds stress model[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering,2003,39(3):85-89.

- [3] 王小静,张直明,孙美丽.复合型紊流润滑理论在周隙密封紊流润滑研究中的应用[J].摩擦学学报,2002,22(4S):359-362.

Wang Xiaojing, Zhang Zhiming, Sun Meili. Application of combined Reynolds stress turbulent model to study of plain seal[J]. Tribology,2002,22(4S):359-362.

- [4] 张永芳,刘成,王东,等.紊流滑动轴承油膜承载力的近似解析解[J].振动与冲击,2014,33(7):181-186.

Zhang Yongfang, Liu Cheng, Wang Dong, et al. Approximate solution to load-carrying capacity of a turbulent flow sliding bearing's oil film[J]. Journal of Vibration and Shock,2014,33(7):181-186.

- [5] Zhang Yongfang, Hei Di, Liu Cheng, et al. An approximate solution of nonlinear oil film forces of turbulent finite length journal bearing[J]. Tribology International, 2014,74:110-120.

- [6] Chang-Jian C W, Chen C K. Bifurcation and chaos analysis of a flexible rotor supported by turbulent long journal bearings[J]. Chaos, Solutions and Fractals,2007,34(4):1160-1179.

- [7] Mnaouar Chouchane, Amira Amamou. Bifurcation of limit cycles in fluid film bearings[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics,2011,46(9):1258-1264.

- [8] Amira Amamou, Mnaouar Chouchane. Nonlinear stability analysis of long hydrodynamic journal bearings using numerical continuation [J]. Mechanism and Machine Theory,2014,72:17-24.

- [9] Wang J K, Khonsari M M. Application of Hopf bifurcation theory to rotor-bearing systems with consideration of turbulent effects[J]. Tribology International,2006,39(7):701-714.

- [10] Lü Yanjun, Dai Rong, Hei Di, et al. Stability and bifurcation of a non-linear bearing-flexible rotor coupling dynamic system[J]. IMechE Journal of Mechanical Engineering Science,2009,223(4):835-849.

(责任编辑 王卫勋)