

文章编号: 1006-4710(2015)01-0050-05

体积积分新息滤波

郭文艳, 姬春艳

(西安理工大学 理学院, 陕西 西安 710054)

摘要: 为了提高扩展新息滤波的精度, 将体积积分方法和新息滤波相结合, 提出了体积积分新息滤波算法。新算法采用三阶球半径体积规则和高斯-拉盖尔积分规则选择积分点, 估计新息滤波的新息状态和新息矩阵, 不需要计算非线性函数的雅可比矩阵。实验结果表明, 与扩展新息滤波和体积新息滤波相比, 新算法提高了非线性系统的估计精度。

关键词: 新息滤波; 体积卡尔曼滤波; 体积规则; 非线性状态估计

中图分类号: TN912.3

文献标志码: A

Cubature quadrature information filter

GUO Wenyan, JI Chunyan

(Faculty of Science, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China)

Abstract: In order to improve the accuracy of the extended information filtering, a new estimation algorithm called cubature quadrature information filtering (CQIF) is proposed. The new algorithm embeds the cubature quadrature methods to information filtering. The third-order spherical radial cubature and Gauss-Laguerre quadrature rules are used to estimate the information state and information matrix. Meanwhile, the new algorithm does not need to calculate the estimation of Jacobians matrix of nonlinear functions. The experiments show that, the accuracy of proposed algorithm is higher than extended information filtering and cubature information filtering.

Key words: information filter; cubature quadrature Kalman filter; cubature rules; nonlinear state estimation

对于非线性系统, 状态估计的精度依赖于非线性函数的逼近方式或非线性函数各阶矩的计算。基于非线性函数逼近的泰勒展开的扩展卡尔曼滤波^[1] (Extended Kalman Filter, 简称 EKF), 对于弱非线性系统有较好的估计结果。近几年出现的基于逼近各阶矩的贝叶斯滤波方法^[2-4], 用一系列确定选取的积分点及其权值来估计非线性函数的各阶矩。无迹卡尔曼滤波^[2] (Unscented Kalman Filter, 简称 UKF)、体积卡尔曼滤波^[3] (Cubature Kalman Filter, 简称 CKF) 分别采用无迹变换和体积规则选取积分点和权值; 体积积分卡尔曼滤波^[4] (Cubature Quadrature Kalman Filter, 简称 CQKF) 采用体积规则和高斯-拉盖尔规则计算积分点和权值。由于

CQKF 选取的积分点精度较高, 因而估计效果优于 UKF 与 CKF。

新息滤波^[5-10] (Information Filter, 简称 IF) 具有初始化容易, 滤波过程计算简单, 而且估计效果与卡尔曼型滤波相当的优点。将卡尔曼型滤波算法与新息滤波算法结合, 得到的非线性新息滤波算法能改进滤波的稳定性, 提高滤波的数值精度。文献 [5]~[7] 分别给出了 EKF, UKF、中心差分滤波和 CKF 与新息滤波相结合的扩展新息滤波 (EIF)、无迹新息滤波 (UIF)、中心差分新息滤波和体积新息滤波 (CIF) 算法。除 EIF 之外, 这些新息滤波算法采用不同的取点策略逼近状态真正的均值和协方差。CQKF^[4] 采用体积积分规则选择积分点和权

收稿日期: 2014-06-10

基金项目: 国家自然科学基金重大研究计划培育资助项目 (91120014); 陕西省教育厅自然科学基金资助项目 (12JK0534); 西安理工大学博士启动基金资助项目 (108-211001)。

作者简介: 郭文艳, 女, 副教授, 博士, 研究方向为非线性估计、图形图像处理。E-mail: wyguo@xaut.edu.cn。

值,具有较高的估计性能。本文在 EIF 原理的基础上,将 CQKF 算法与新息滤波算法相结合,提出了体积分新息滤波(CQIF)新算法。新算法采用体积分规则估计新息滤波的新息状态和新息矩阵,不需要计算非线性函数的雅克比矩阵。经典的一维例子和二维频率调制模型的实验结果表明,新算法提高了估计精度,改进了数值稳定性。

1 扩展新息滤波

考虑如下的非线性系统:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \boldsymbol{\eta}_{k-1} \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \quad (2)$$

其中, $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{z}_k \in \mathbf{R}^r$ 分别为系统在 k 时刻的状态向量和量测向量, $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{h}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^r$ 均为已知的非线性函数。过程噪声 $\boldsymbol{\eta}_{k-1} \in \mathbf{R}^n$ 和量测噪声 $\mathbf{v}_k \in \mathbf{R}^r$ 是独立的高斯白噪声,满足 $\boldsymbol{\eta}_{k-1} \sim N(0, \mathbf{Q}_{k-1})$, $\mathbf{v}_k \sim N(0, \mathbf{R}_k)$ 。扩展新息滤波(EIF)分为预测和更新两个阶段。

在 $k-1$ 时刻系统状态的一步预测为 $\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}$, 预测的协方差为 $\mathbf{P}_{k/k-1}$, $\mathbf{F}_k = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1}}$ 。则 EIF^[5] 的预测新息状态 $\hat{\mathbf{y}}_{k/k-1}$ 和预测新息协方差 $\mathbf{Y}_{k/k-1}$ 分别为:

$$\hat{\mathbf{y}}_{k/k-1} = (\mathbf{P}_{k/k-1})^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} \quad (3)$$

$$\mathbf{Y}_{k/k-1} = (\mathbf{P}_{k/k-1})^{-1} = \left[\mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1/k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_{k-1} \right]^{-1} \quad (4)$$

在 k 时刻,新息状态 $\hat{\mathbf{y}}_{k/k}$ 和新息矩阵 $\mathbf{Y}_{k/k}$ 的更新为:

$$\hat{\mathbf{y}}_{k/k} = \hat{\mathbf{y}}_{k/k-1} + \mathbf{i}_k \quad (5)$$

$$\mathbf{Y}_{k/k} = \mathbf{Y}_{k/k-1} + \mathbf{I}_k \quad (6)$$

其中,新息状态分布 \mathbf{i}_k 和新息分布矩阵 \mathbf{I}_k 分别为:

$$\mathbf{i}_k = \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \left[\mathbf{u}_k + \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} \right] \quad (7)$$

$$\mathbf{I}_k = \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k \quad (8)$$

式中:

$$\mathbf{H}_k = \left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}}$$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1})$$

系统状态估计 $\hat{\mathbf{x}}_{k/k}$ 和估计的协方差 $\mathbf{P}_{k/k}$ 为:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k} = \mathbf{Y}_{k/k} \backslash \hat{\mathbf{y}}_{k/k} \quad (9)$$

$$\mathbf{P}_{k/k} = \mathbf{Y}_{k/k} \backslash \mathbf{E}_n \quad (10)$$

其中 \mathbf{E}_n 为 n 阶单位矩阵。

EIF 的初始化过程和更新过程的计算比卡尔曼型的滤波算法简单,但是由于 EIF 仍采用非线性函数通过线性化的方法来逼近,因而线性化方法本身

固有的缺陷对 EIF 的估计性能影响较大。

2 体积分新息滤波

2.1 体积分点的选取

对噪声服从高斯分布的非线性系统(1)~(2),基于贝叶斯框架的非线性滤波依赖于非线性函数与高斯函数乘积的积分,即 $\int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{g}(\mathbf{x}) N(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \mathbf{P}) d\mathbf{x}$ 的高维积分的计算,解析的求解该积分非常困难,通常采用积分点的值的线性组合的方式近似求解。体积分方法采用体积规则计算超球体上的曲面积分,通过高斯-拉盖尔积分规则计算线积分的方式计算高维数值积分,计算表达式为:

$$\int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{g}(\mathbf{x}) N(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \mathbf{P}) d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{2mn} w_j \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}_j) \quad (11)$$

其中, n, m 分别为状态的维数和切比雪夫-拉盖尔多项式的阶数。体积分选择积分点 $\boldsymbol{\xi}_j$ 及其权值 w_j 的计算方法如下^[4]。

1) 由体积分规则计算 $2n$ 个对称的体积点,其中第 i 个积分点 $[\mathbf{u}_i]$ ($i=1, 2, \dots, 2n$) 是下列 $n \times 2n$ 矩阵的第 i 列。

$$\sqrt{n} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

2) 由 m 阶切比雪夫-拉盖尔多项式计算 m 个高斯拉盖尔积分点 $\lambda_{i'}$ ($i'=1, 2, \dots, m$), 其中, $\lambda_{i'}$ 是下列多项式的第 i' 个根。

$$L_m^a(\lambda) = \lambda^m - \frac{m}{1!} \left(m + \frac{n}{2} - 1 \right) \lambda^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2!} \times \left(m + \frac{n}{2} - 1 \right) \times \left(m + \frac{n}{2} - 2 \right) \lambda^{m-2} + \cdots = 0 \quad (13)$$

3) 体积分点 $\boldsymbol{\xi}_j$ 及其相应权值 w_j 为:

$$\boldsymbol{\xi}_j = \sqrt{2\lambda_{i'}} [\mathbf{u}_i] \quad (14)$$

$$w_j = \frac{1}{2n\Gamma(n/2)} \frac{m! \Gamma(n/2 + m)}{\lambda_{i'} [\dot{L}_m^a(\lambda_{i'})]^2} \quad (15)$$

其中, $i=1, 2, \dots, 2n$; $i'=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, 2mn$; $\dot{L}_m(\cdot)$ 表示 $L_m(\cdot)$ 的一阶导数, $\Gamma(\cdot)$ 表示伽马函数。

在 n 和 m 给定后, $2mn$ 个体积分点 $\boldsymbol{\xi}_j$ 及其权值 w_j 可以离线计算。

2.2 体积分新息滤波

在噪声服从高斯分布的假设下,文献[4]用体积

积分点计算滤波的预测和更新,提出了体积积分卡尔曼滤波 CQKF。本节将 CQKF 与新息滤波相结合,提出了体积积分新息滤波(CQIF)算法,算法的推导过程如下。

在 $k-1$ 时刻系统(1)、(2)的状态估计为 $\hat{x}_{k-1/k-1}$,估计的协方差为 $P_{k-1/k-1}$,对 $P_{k-1/k-1}$ 进行平方根分解,得 $S_{k-1/k-1}$,即:

$$P_{k-1/k-1} = S_{k-1/k-1} S_{k-1/k-1}^T$$

体积积分点的计算为:

$$X_{j,k-1/k-1}^x = S_{k-1/k-1} \xi_j + \hat{x}_{k-1/k-1} \quad (16)$$

积分点通过系统方程(1)的传播,得一步预测的积分点为:

$$X_{j,k/k-1}^{xx} = f(X_{j,k-1/k-1}^x) \quad (17)$$

新息状态一步预测和预测的协方差为:

$$\hat{y}_{k/k-1} = Y_{k/k-1} \sum_{j=1}^{2nm} \omega_j X_{j,k/k-1}^{xz} \quad (18)$$

$$Y_{k/k-1} = P_{k/k-1}^{-1} \quad (19)$$

其中:

$$P_{k/k-1} = Q_{k-1} + \sum_{j=1}^{2nm} \omega_j (X_{j,k/k-1}^{xx} - \hat{x}_{k/k-1})(X_{j,k/k-1}^{xx} - \hat{x}_{k/k-1})^T \quad (20)$$

在 CQKF 算法的量测更新过程中,采用体积积分点计算非线性量测函数的一阶矩和二阶矩,而不是逼近非线性函数本身,因而没有 EIF 中的线性化矩阵 H_k 。文献[8]采用统计线性化误差传播方法,推导出互协方差矩阵的近似表达式为:

$$P_{xx,k/k-1} \approx P_{k/k-1} H_k^T \quad (21)$$

对式(7)和式(8)乘 $P_{k/k-1}^{-1}$ 和 $P_{k/k-1}$,得:

$$i_k = P_{k/k-1}^{-1} P_{k/k-1} H_k^T R_k^{-1} [u_k + H_k P_{k/k-1}^T (P_{k/k-1}^{-1})^T \hat{x}_{k/k-1}] \quad (22)$$

$$I_k = P_{k/k-1}^{-1} P_{k/k-1} H_k^T R_k^{-1} H_k P_{k/k-1}^T P_{k/k-1}^{-1} \quad (23)$$

将式(21)代入式(22)和(23)得:

$$i_k = P_{k/k-1}^{-1} P_{xx,k/k-1} R_k^{-1} [u_k + P_{xx,k/k-1}^T (P_{k/k-1}^{-1})^T \hat{x}_{k/k-1}] \quad (24)$$

$$I_k = P_{k/k-1}^{-1} P_{xx,k/k-1} R_k^{-1} P_{xx,k/k-1} P_{k/k-1}^{-1} \quad (25)$$

其中:

$$P_{xx,k/k-1} = \sum_{j=1}^{2nm} \omega_j (X_{j,k/k-1}^{xx} - \hat{x}_{k/k-1})(X_{j,k/k-1}^{xx} - \hat{x}_{k/k-1})^T \quad (26)$$

式中, $X_{j,k/k-1}^{xx}$ 和 $\hat{x}_{k/k-1}$ 由下式计算:

$$P_{k/k-1} = S_{k/k-1} S_{k/k-1}^T \quad (27)$$

$$X_{j,k/k-1}^{xx} = S_{k/k-1} \xi_j + \hat{x}_{k/k-1} \quad (28)$$

$$X_{j,k/k-1}^{xz} = h(X_{j,k/k-1}^z) \quad (29)$$

$$\hat{z}_{k/k-1} = \sum_{j=1}^{2nm} \omega_j X_{j,k/k-1}^{xz} \quad (30)$$

综上所述,CQIF 滤波算法步骤如下:

Step1 预测更新。通过式(18)~(20)计算预测新息状态 $\hat{y}_{k/k-1}$ 和预测新息矩阵 $Y_{k/k-1}$;

Step2 量测更新。

1) 由式(24)~(26)计算新息状态分布 i_k 和新息矩阵 I_k ;

2) 新息状态和新息矩阵的更新分别为:

$$\hat{y}_{k/k} = \hat{y}_{k/k-1} + i_k \quad (31)$$

$$Y_{k/k} = Y_{k/k-1} + I_k \quad (32)$$

3) 系统的状态估计及其估计协方差由式(9)~(10)计算。

3 实验结果与分析

本节用两个非线性系统的实例验证提出算法的有效性。

3.1 一维系统

考虑非线性系统^[1],状态方程为:

$$x_k = x_{k-1} + \Delta t \times 5x_{k-1}(1 - x_{k-1}^2) + \eta_{k-1}$$

量测方程为:

$$z_k = \Delta t \times x_k(1 - 0.5x_k) + v_k$$

其中, $\eta_{k-1} \sim N(0, 0.0025)$, $v_k \sim N(0, 10^{-4})$, $\Delta t=0.01$ 。

滤波初始化过程为: $x_0 = -0.2$, $\hat{x}_{0/0} = 0.8$, $P_{0/0}=2$ 。

系统的两个稳态平衡点为 $x = \pm 1$,非稳态平衡点为 $x=0$ 。取切比雪夫-拉盖尔多项式的阶次为 1, 2,其估计结果用 CQIF、CQIF-2 表示,计算 80 s, EIF,CQIF 和 CQIF-2 估计结果与真实值的比较如图 1 所示。

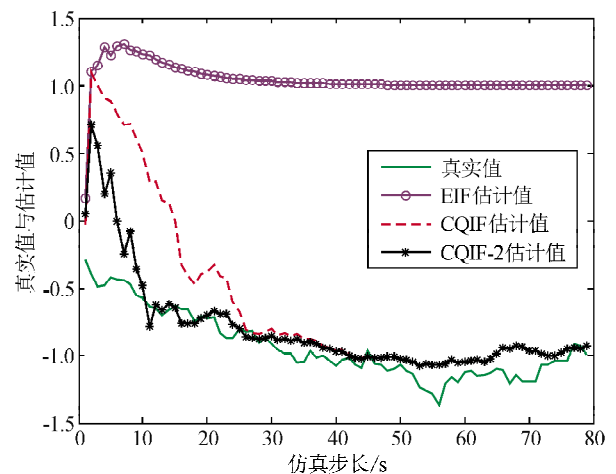


图 1 EIF、CQIF 和 CQIF-2 的估计结果

Fig.1 State estimation of EIF,CQIF and CQIF-2

进行 100 次蒙特卡罗仿真实验,均方根误差(RMSE)的比较如图 2 所示。EIF、CQIF 和 CQIF-2

的运行时间比较如表 1 所示。

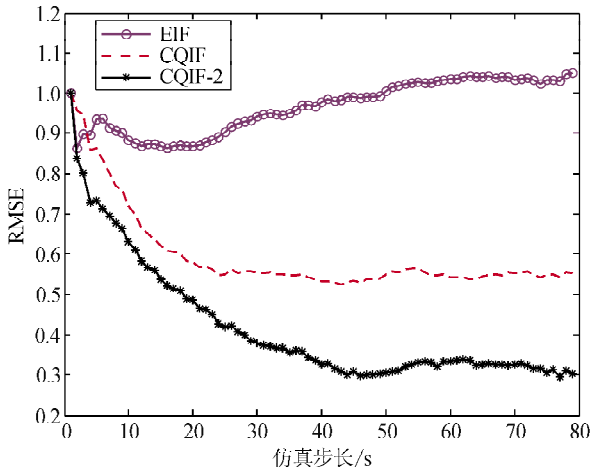


图 2 EIF,CQIF 和 CQIF-2 的均方根误差

Fig. 2 RMSE of state estimation of EIF,CQIF and CQIF-2

表 1 三种算法的运行时间
Tab. 1 Run time of three algorithms estimator relative computational time

算法	运行时间/s
EIF	0.675 0
CQIF	1.261 0
CQIF-2	2.138 0

从图 1 可以看出,EIF 算法失效,而 CQIF 和 CQIF-2 能有效的处理该问题,且 CQIF-2 估计性能优于 CQIF。从图 2 可以看出,CQIF 明显优于 EIF,但 CQIF 算法的运行时间较长。

3.2 频率调制模型

考虑如下的频率调制模型^[9],频率 ω 和相位 φ 的状态演化过程为:

$$\begin{bmatrix} \omega_k \\ \varphi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9\omega_{k-1} \\ \arctan(0.99\varphi_{k-1} + \omega_{k-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_{1,k-1} \\ \eta_{2,k-1} \end{bmatrix}$$

量测方程为

$$[z_k] = \begin{bmatrix} \cos\varphi_k \\ \sin\varphi_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{1,k} \\ v_{2,k} \end{bmatrix}$$

过程噪声和量测噪声的标准差分别为 1 和 0.002。采用文献[9]中提出的体积分新息卡尔曼滤波(CIF)和本文的体积分新息卡尔曼滤波(CQIF)对频率调制模型进行估计。用 CQIF 2、CQIF 3 分别表示切比雪夫-拉盖尔多项式(13)中 m 取 2、3 时的估计结果,计算 80 s。两种滤波算法均随机初始化,CIF 与 CQIF 对频率和相位的估计结果如图 3、4 所示。从图 3、4 可以看出,CQIF-2、CQIF-3 的估计性能优于 CIF。

图 5 给出了 $M=100$ 次蒙特卡罗仿真的 CIF 和 CQIF 的均方根误差(RMSE)比较。其中:

$$RMSE(k) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^M (\omega_{jk} - \hat{\omega}_{jk})^2 + (\varphi_{jk} - \hat{\varphi}_{jk})^2}{M}}$$

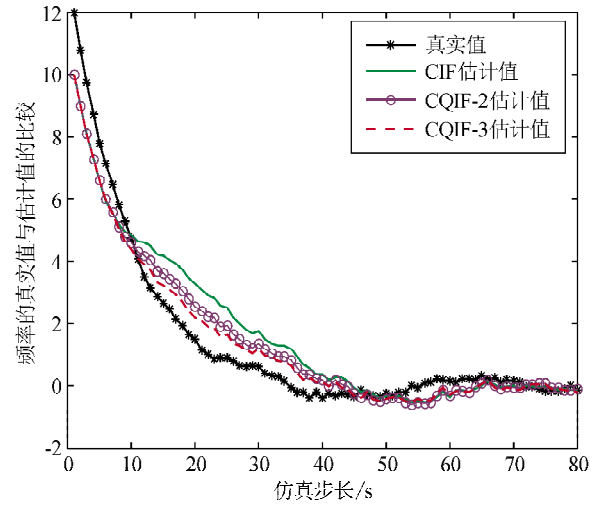


图 3 频率的估计结果

Fig. 3 The estimation of frequency

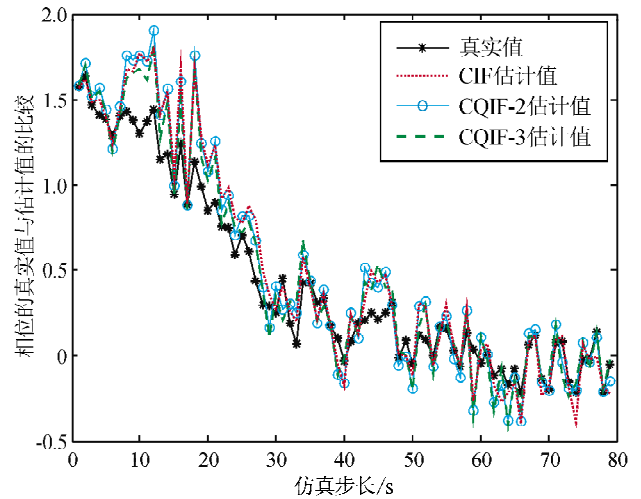


图 4 相位的估计结果

Fig. 4 The estimation of phase

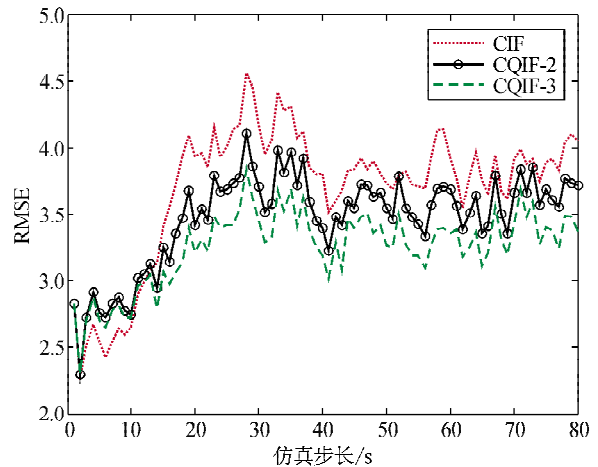


图 5 CIF 和 CQIF 对频率和相位的均方根误差

Fig. 5 RMSE of frequency and phase of CIF and CQIF

从图5可以看出, CIF的均方根误差高于CQIF-2、CQIF-3, CIF的均方根误差的平均均值约为4.0423。而CQIF-2、CQIF-3均方根误差的平均均值分别约为3.5502和3.4825。所以, CQIF-2、CQIF-3的估计性能优于CIF。

同时, CQIF-2、CQIF-3的平均误差相差较小, 说明再增加切比雪夫-拉盖尔多项式的阶次, 滤波效果改进不明显。

4 结论

本文将体积积分方法与新息滤波相结合, 提出了体积积分新息滤波新算法, 并推导了算法过程。

新算法不需要计算非线性函数的雅克比矩阵, 初始化过程和滤波更新过程的计算比卡尔曼型的非线性滤波算法简单。

一维的非线性模型和二维的频率调制模型验证了新算法的有效性。

参考文献:

- [1] Ito K, Xiong K. Gaussian filters for nonlinear filtering problems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(5): 910-927.
- [2] Gustafsson F, Hendeby G. Some relations between extended and unscented Kalman filters[J]. IEEE Transactions On Signal Processing, 2012, 60(2): 545-555.
- [3] Arasaratnam I, Haykin S. Cubature Kalman filters[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(6): 1254-1269.
- [4] Bhaumik S, Swati I. Cubature quadrature Kalman filter[J]. IET Signal Processing, 2013, 7(7): 533-541.
- [5] Lee D J. Nonlinear estimation and multiple sensor fusion using unscented information filtering[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2008, 15: 861-864.
- [6] Liu G L, Worgotter F, Markelic I. Square-root sigma-point information filtering[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(11): 2945-2950.
- [7] Pakki K, Chandra B, Gu D W. Square root cubature information filter[J]. IEEE Sensors Journal, 2013, 13(2): 750-758.
- [8] Arasaratnam I. Sensor fusion with square-root cubature information filtering[J]. Intelligent Control and Automation, 2013, 4: 11-17.
- [9] Pakki K, Chandra B, Gu D W. Cubature information filter and its applications[C]// American Control Conference, San Francisco, 2011: 3609-3614.
- [10] 王小旭, 潘泉, 黄鹤. 非线性系统确定采样型滤波算法综述[J]. 控制与决策, 2012, 27(6): 801-812.
Wang Xiaoxu, Pan Quan, Huang He. Nonlinear systems determine the type of sampling filter review[J]. Control and Decision, 2012, 27(6): 801-812.

(责任编辑 杨小丽)