

文章编号: 1006-4710(2015)01-0091-04

稳定磁流体局部径向基点插值法误差影响因素分析

蔡星会¹, 强洪夫², 董三强¹, 卢江仁¹

(1. 第二炮兵工程大学 核工程系, 陕西 西安 710025; 2. 第二炮兵工程大学 动力工程系, 陕西 西安 710025)

摘要: 稳定磁流体流动方程局部径向基点方法的关键参数对计算结果误差影响较大, 确定这些参数的最优值将提高计算精度。通过对具体磁流体流动数值仿真计算分析局部径向基点算法典型参数对计算结果精度的影响, 并得到其变化规律, 最终确定了 LRPIM 法计算磁流体流动典型参数的最优值。

关键词: 磁流体; 无网格法; 局部径向基点插值法; 误差影响因素分析

中图分类号: O29 **文献标志码:** A

Research on the error factors of local radial point interpolation method applied in steady magnetohydrodynamic flow

CAI Xinghui¹, QIANG Hongfu², DONG Sanqiang¹, LU Jiangren¹

(1. Faculty of Department of Nuclear Engineering, The Second Artillery Engineering University, Xi'an 710025, China;

2. Faculty of Department of Power Engineering, The Second Artillery Engineering University, Xi'an 710025, China)

Abstract: Most of the error factors may affect the computation accuracy of local radial point interpolation method applied in steady magnetohydrodynamic flow. The determination of these parameters may improve the computation accuracy. The evolution trends of computation accuracy caused by different values of these parameters are analyzed through numerical simulation with local radial point interpolation method. And finally, the optimal values for these parameters of the method in steady magnetohydrodynamic flow are obtained.

Key words: magnetohydrodynamic flow; meshless method; local radial point interpolation method; error factors analysis

局部径向基点插值法(LRPIM)是于2002年由新加坡国立大学机械工程系教授 G R Liu^[1]等人提出的一种新的无网格算法。LRPIM在固体振动分析^[2]、涡电流分析^[3]、二维压电结构分析^[4]、功能梯度材料分析^[5]、时域电磁场分析^[6]等方面得到了很好的应用,也有学者将 LRPIM 应用于模拟裂纹尖端的应力场^[7]、厚板弯曲静力^[8]和动力学分析^[9]等问题。本文作者首次将 LRPIM 法引入到充分发展的磁流体流动计算中^[10],对 LRPIM 法在磁流体流动方面的计算进行了初步研究。LRPIM 法的关键参数对固体力学计算的影响因素已经得到系统的研究^[11],但在其它领域的研究还没有展开。

磁流体力学方程把流场方程和电磁场方程联立起来,形成了新的非线性耦合控制方程,与普通流体力学方程相比,具有其特殊性和复杂性。本文通

过数值仿真计算分析了 LRPIM 法典型参数对磁流体控制方程计算结果的影响规律,并得到了 LRPIM 法计算磁流体流动典型参数的最优值。

1 局部径向基点插值法的稳定磁流体流动方程

以矩形导电管道内的稳定磁流体流动为例进行分析。导电流体在管道中沿轴向流动,外加磁场在 $x-y$ 平面内,且与 y 轴成一夹角为 β 。流体的电导率为 σ ,管道壁面电导率为 σ' 。如果管壁厚度 h 与其截面特征长度 a 相比较小的话,则根据 Shercliff 理论^[12],磁场边界条件可简化为^[13]: $\frac{\partial B}{\partial n} + \theta B = 0$,其中, B 为无量纲磁感应强度, n 为垂直于管道壁面的单位法向量, θ 为相对电导率, $\theta = \frac{\sigma h}{\sigma a}$ 。

收稿日期: 2014-06-12

基金项目: 中国博士后科学基金面上资助项目(2014M562635); 陕西省自然科学基金研究计划资助项目(2013JM1005)。

作者简介: 蔡星会,男,博士,讲师,研究方向为无网格算法数值仿真计算。E-mail: hui_xing1975@sina.com。

在上述条件下,不必考虑外壁面的边界。在流体横截面区域 Ω 上,对任意节点 I ,可利用局部加权残量法,得出磁流体流动的无量纲加权残值表达式^[1]:

$$\int_{\Omega_q} [W_{i,x} W_{i,y}] \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} d\Omega - \int_{\Omega_q} [Ha_x Ha_y] \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} W_i d\Omega - \int_{\partial\Omega_q} W_i [V_x V_y] \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} d\Omega = \int_{\Omega_q} W_i d\Omega \quad (1)$$

$$\int_{\Omega_q} [W_{i,x} W_{i,y}] \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} d\Omega - \int_{\Omega_q} [Ha_x Ha_y] \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} W_i d\Omega - \int_{\partial\Omega_q} W_i [B_x B_y] \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} d\Omega = 0 \quad (2)$$

式中, Ω_q 为局部积分域; Ha 为哈特曼数, $Ha_x = Ha \sin\beta, Ha_y = Ha \cos\beta; V_x = \frac{\partial V}{\partial X}, V_y = \frac{\partial V}{\partial Y}; B_x = \frac{\partial B}{\partial X}, B_y = \frac{\partial B}{\partial Y}; W_i$ 为权函数, $W_{i,x} = \frac{\partial W_i}{\partial X}, W_{i,y} = \frac{\partial W_i}{\partial Y}$ 。

为得到离散系统方程,需使用分布合理的节点表示全局问题域 Ω ,采用径向基形函数作为试函数近似表示任意点 x 处的无量纲速度场和感应磁场,可得积分域内无量纲速度场、感应磁场及其导数的逼近值为:

$$V^h(x) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x) \hat{V}_i, \\ B^h(x) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x) \hat{B}_i, \\ \frac{\partial V^h}{\partial X}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_i}{\partial X}(x) \hat{B}_i, \\ \frac{\partial V^h}{\partial Y}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_i}{\partial Y}(x) \hat{V}_i, \\ \frac{\partial B^h}{\partial X}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_i}{\partial X}(x) \hat{B}_i, \\ \frac{\partial B^h}{\partial Y}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_i}{\partial Y}(x) \hat{B}_i$$

在流动边界上有:

$$\frac{\partial V^h}{\partial n}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_i}{\partial n}(x) \hat{V}_i, \\ \frac{\partial B^h}{\partial n}(x) = -\theta \sum_{i=1}^n \Phi_i(x) \hat{B}_i$$

式中, \hat{V}_i 为 x_i 节点处的速度; \hat{B}_i 为 x_i 节点处的磁场。

采用高斯积分计算(1)、(2)式中积分,另外,为

了保证精确的数值积分,在积分过程中进一步将积分域分成更小的规则子域,在每个子域中,选择合理的积分点以保证足够的积分精度。由于 LRPIM 形函数具有 Kronecker δ 函数性质,故可直接施加本质边界条件^[1],这种方法在有限元法中被广泛应用。

2 数值计算

以下计算结果均采用 81×81 均匀节点分布,直接施加本质边界条件。形函数为复合二次径向基函数并添加线性多项式,即径向基函数插值近似式为:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n (r_i^2 + (a_c d_c)^2)^\lambda a_i + \sum_{j=1}^m p_j(x) b_j$$

式中, a_c 和 λ 为形状参数, d_c 表示局部支持域中节点间距的特征长度, m 为多项式基函数的个数。权函数采用三次样条函数,计算区域为 $|X| \leq 1, |Y| \leq 1$,管道的相对电导率 $\theta = 0.1$,哈特曼数 $Ha = 50$,外加磁场方向角 $\beta = 0$ 。对于绝缘管道,只需令 $\theta = 0$ 即可。

2.1 形状参数的影响

计算中先采用支持域尺寸参数 $a_s = 1.9$,局部积分域参数 $a_q = 1.9$,积分子区间数目为 3,采用 4 点高斯积分。形状参数 a_c 取 6 个值,分别为 0.5, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0。 λ 取值为 -5.1, -3.1, -1.1, 0.5, 0.98, 1.03, 1.1, 1.9, 2.5, 3.1 和 5.1。

先考虑复合二次径向基函数没有添加多项式的情况,图 1 给出了没有添加多项式时,即 $m = 0$ 时,形状参数变化对计算结果的影响曲线。

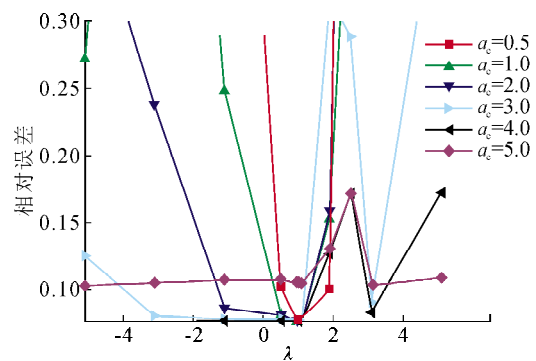


图 1 $m = 0$ 时, a_c 和 λ 值变化对计算结果的影响
Fig. 1 $m = 0$, numerical simulation results with the values of a_c and λ

从图 1 中可以看出:①当没有添加多项式时,计算结果随着 a_c 和 λ 值变化十分不稳定,计算误差在多个 a_c 和 λ 值处超过了 30%,甚至更多;②当 a_c 值在 0.5 至 5.0 之间变化, λ 取 0.98~1.1 之间的值时,计算结果误差比较小;③当 a_c 值在 3.0~4.0 之间变化时,多数计算结果误差较小;④ λ 值的变化与

a_c 值变化相比,前者对计算结果精度的影响要大一些;⑤计算中还发现,当 λ 取整数时,所对应的矩阵奇异导致有些计算失败;而且当 λ 值向负值方向取值时,小于某个值时导致计算失败,当 λ 值向正值方向取值时,大于某个值时也会导致计算失败。

图 2 给出了复合二次径向基函数添加多项式后,形状参数变化对计算结果影响的变化曲线。

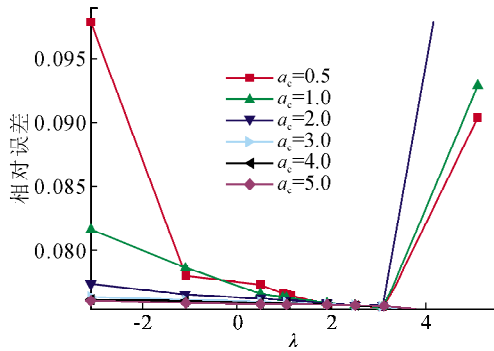


图 2 $m = 3$ 时, a_c 和 λ 值变化对计算结果的影响

Fig. 2 $m = 3$, numerical simulation results with the values of a_c and λ

从图 2 中可以看出:①当 $m = 3$ 时,计算误差有了明显的降低,可见添加了多项式后的确能够大幅提高计算精度;② a_c 值取 0.5 到 5.0 之间时,选取合适的 λ 值,可以得到较好的计算结果;③ λ 值的变化与 a_c 值变化相比,前者对计算结果精度的影响要大一些;④计算中也出现 λ 值等于整数时,所对应的矩阵奇异导致计算失败的现象,而且当 λ 值向负值方向取值时,小于某个值时导致计算失败;当 λ 值向正值方向取值时,大于某个值时也会导致计算失败。

总之,当 $m = 3$ 时, a_c 值取 4.0, λ 值取 3.1 比较合适。

2.2 局部积分域尺寸的影响

局部积分域尺寸定义为 $r_q = a_q d_{ct}$, a_q 为控制积分域尺寸的无量纲因子。

计算中采用添加了多项式的径向基函数,即 $m = 3$, 支持域尺寸参数为 $a_s = 1.9$, $a_c = 4.0$, $\lambda = 3.1$, 积分分子区间数目为 3, 采用 4 点高斯积分。分别对 $a_q = 0.6, 0.8, 0.9, 1.1, 1.3, 1.5, 1.7, 1.9, 2.1, 2.3, 2.5, 2.7, 2.9, 3.1, 3.3$ 以及 $Ha = 50$ 进行计算,图 3 给出了上述局部积分尺寸下对总体相对误差影响曲线。

从图 3 中可以看出当 $a_q = 2.1$ 时,总体相对误差最低,局部积分域增大或减小都会使误差增大, a_q 值取 1.5~2.3 之间均能取得较好的计算结果。

2.3 支持域尺寸的影响

计算中采用局部积分域 $a_q = 2.1$, 积分分子区间

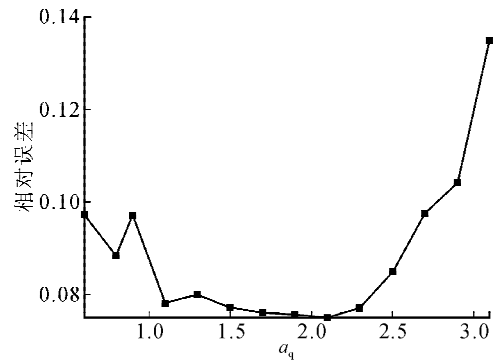


图 3 局部积分域尺寸参数 a_q 变化对计算结果的影响

Fig. 3 Numerical simulation results with the values of a_q

为 3, 采用 4 点高斯积分, $m = 3$ 。支持域尺寸参数取 $a_s = 1.1, 1.2, \dots, 4.1$, 图 4 给出了支持域尺寸变化对总体相对误差的影响曲线。

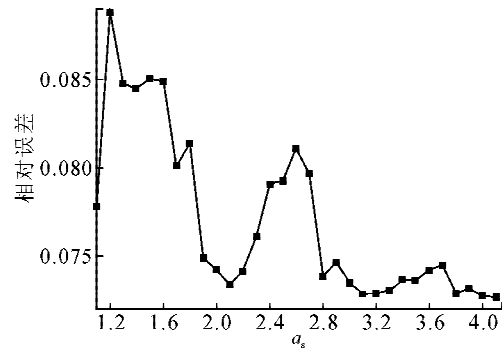


图 4 支持域尺寸参数 a_s 变化对结果的影响

Fig. 4 Numerical simulation results with the values of a_s

从图 4 中可以看出,随着支持域尺寸的增加,相对误差总体向减小方向变化,但有波动。在 $a_s = 1.1, 2.1, 3.1, 4.1$ 时,相对误差出现了局部极小值。

根据计算,在 $a_s = 2.1$ 时,相对误差为 0.073 38, 计算时间为 2 923. 859 秒,而当 $a_s = 4.1$ 时,相对误差为 0.072 72, 计算时间为 54 806. 70 秒,相对误差减少得并不大,而计算时间却大大增加。因此,支持域尺寸参数取 2.1 可得到较好的结果。

2.4 数值积分的影响

支持域尺寸参数采用 2.1, 局部积分域尺寸参数 2.1, $m = 3$, 采用 4 点高斯积分。数值积分分子区间划分为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 计算结果如图 5 所示。

从图 5 中可以看出,并非积分分子区间数目越多,计算结果越准确,当积分分子区划分数目为 3、4 和 6 时,相对误差较小,当积分分子区间数目继续增加时,计算时间大大增加,误差也增大。因此,针对该问题,将积分分子区间划分为 3 个,可以得到较好的结果。

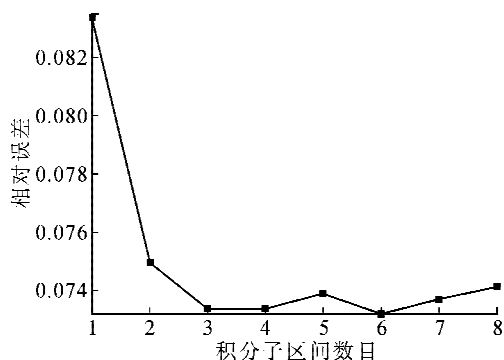


图5 积分子区间数目对结果的影响

Fig. 5 Numerical simulation results with the number of local quadrature domain

3 结论

LRPIM 计算过程中的支持域参数大小,局部积分域参数的大小,积分子区间的数目,基函数是否添加多项式、形状参数等对计算结果影响较大,需在不同问题中通过数值实验加以确定,在矩形管道的磁流体问题中,一般的选取支持域参数 $a_s = 2.1$,局部积分域参数 $a_q = 2.1$,积分子区间数目为 3, $m = 3$, a_c 值取 4.0, λ 值取 3.1,可以得到相对准确的解。

参考文献:

- [1] Liu G R. Point interpolation method based on local residual formulation using radial basis functions [J]. *Structural Engineering and Mechanics*, 2002, 14 (6): 713-732.
- [2] Liu G R. A local radial point interpolation method (LRPIM) for free vibration analyses of 2-D solids [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 246 (1): 29-46.
- [3] Vsardl H C. Application of the local radial point interpolation method to solve eddy-current problems [J]. *IEEE Transactions on Magetics*, 2006, 42: 591-594
- [4] Liu G R, Dai K Y, Lim K M, et al. A radial point interpolation method for simulation of two-dimensional piezoelectric structures[J]. *Smart Materials and Structures*, 2003, 12 (2): 171.
- [5] Dai K Y, Liu G R, Lim K M, et al. A meshfree radial point interpolation method for analysis of functionally graded material (FGM) plates[J]. *Computational Mechanics*, 2004, 34 (3): 213-223.
- [6] Kaufmann T, Fumeaux C, Vahldieck R. The meshless radial point interpolation method for time-domain electromagnetics[C]//*Microwave Symposium Digest, 2008 IEEE MTT-S International*, Atlanta, GA, 2008: 61-64.
- [7] 严默非, 杨庆, 常文洁. 局部径向基点插值法模拟裂纹尖端附近应力场[J]. *武汉理工大学学报*, 2010, 32: 141-145.
Yan Mofci, Yang Qing, Chang Wenjie. Local radial-basis point interpolation method for crack tip stress field [J]. *Journal of Wuhan University of Technology*, 2010, 32:141-145.
- [8] 夏平, 龙述尧, 崔洪雪. 用无网格 LRPIM 分析中厚板弯曲问题[J]. *应用力学学报*, 2009, 26 (2): 383-388.
Xia Ping, Long Shuyao, Cui Hongxu. Bending analysis for moderately thick plates by mesh free local radial point interpolation method[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2009, 26 (2): 383-388.
- [9] Xia P, Long S Y. The dynamic analysis for the non-homogeneous moderately thick plate by the meshless LRPIM[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2010, 27: 1029-1035.
- [10] Cai X H, Su G H, Qiu S Z. Local radial point interpolation method for the fully developed magnetohydrodynamic flow [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2011, 217(9): 4529-4539.
- [11] 刘桂荣, 顾元通. 无网格法理论及程序设计 [M]. 济南: 山东大学出版社, 2007.
- [12] Shercliff J A. The flow of conducting fluids in circular pipes under transverse magnetic field [J]. *Fluid Mechanics*, 1956, 1 (6): 644-666.
- [13] Hunt J C R. Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1965, 21 (4): 577-590.

(责任编辑 杨小丽)