

文章编号: 1006-4710(2015)01-0100-06

# 基于 $p$ 范数的 QR-KPCA 人脸识别算法

穆新亮, 周水生, 郑颖

(西安电子科技大学 数学与统计学院, 陕西 西安 710126)

**摘要:** KPCA 是重要的非线性特征提取的人脸识别方法, 但对较大规模训练数据库, 会因核矩阵  $K$  过大, 计算代价高而不能有效实现, 并且使用传统欧式距离度量很难大幅提升识别率。本研究提出了将基于 QR 分解的 PCA 推广到 KPCA 上且应用  $p$  范数度量来解决这一问题的方法, 即: 首先采用选主元的 Cholesky 分解得到核矩阵  $K$  的低秩近似, 然后对小规模矩阵  $H$  进行 QR 分解, 经过一些推导得到中心化核矩阵的特征向量, 实现了 KPCA 的非线性特征提取, 在分类识别阶段, 本研究突破传统欧氏距离度量的局限, 将  $p$  范数作为度量相似性的方法, 在 ORL 和 AR 人脸数据库中做了大量相关实验, 并且分别研究了  $p$  的取值对基于 QR 分解的主成分分析 (QR-PCA) 和核主成分分析 (QR-KPCA) 算法的识别率的影响, 实验结果表明, 这种  $p$  范数意义下的 QR-KPCA 处理人脸识别问题有很高的识别率。

**关键词:** 特征提取; 主成分分析; 核主成分分析; QR 分解

**中图分类号:** O29; TB112 **文献标志码:** A

## Human face recognition algorithm based on $p$ norm QR- KPCA

MU Xinliang, ZHOU Shuisheng, ZHENG Ying

(School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710126, China)

**Abstract:** KPCA is an important human face recognition method for the non-linear feature extraction. But it cannot effectively realize the large-scale training data bank for kernel matrix is too large and calculation cost is too high, and the use of traditional Euclidean distance metric is difficult to raise recognition rate by a large margin. This research suggests that PCA base on QR decomposition be extended to KPCA and that  $p$  norm measurement be used to solve this problem. First of all, the main element Cholesky decomposition is selected to obtain the low rank approximation of kernel matrix  $K$ , and then, small-scale matrix  $H$  is to carry out QR decomposition. Through some deductions, the eigenvectors of centralized kernel matrix can be obtained so as to realize KPCA non-linear feature extraction. In the classification recognition stage, a breakthrough is made in the restriction by the traditional Euclidean distance metric, and the  $p$  norm can be used as the method to measure the similarity in this research. A large number of experiments have been conducted in ORL and AR human face data bank. Also, a study is made of  $p$  value taking to the principal components analysis (QR-PCA) based on QR decomposition and effect on QR-KPCA Algorithm recognition rate. The experiments results indicate that the QR-KPCA treatment of human face recognition problem is of very high recognition rate under this  $p$  norm significance.

**Key words:** feature extraction; principal component analysis; kernel principal component analysis; QR decomposition

目前, 主成分分析<sup>[1-5]</sup> (PCA) 已经广泛地应用到人脸识别中, 其主要特点是将每一张人脸图像按

收稿日期: 2014-05-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60603098)。

作者简介: 穆新亮, 男, 硕士生, 研究方向为最优化方法与理论、机器学习算法及其应用。E-mail: muxinliang168@163.com。

通讯作者: 周水生, 男, 博士, 教授, 博导, 研究方向为最优化理论及其算法和应用、智能信息处理、机器学习、支持向量机等。E-mail: sszhou@mail.xidian.edu.cn。

列拉成一列向量,即随机向量  $x$ ,需要寻找一个投影方向  $v$ ,使这些随机向量在该方向上投影后的方差最大。对于给定  $N$  张训练图像  $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_N]$ ,  $x_i \in \mathbf{R}^n$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $N \ll n$ , 则随机向量的协方差矩阵为:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$$

其中:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{N}} [x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \dots, x_N - \bar{x}] \in \mathbf{R}^{n \times N}$$

平均图像  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ , 问题最终转化为求解协方差矩阵的前  $m$  个最大特征值及所对应的特征向量。

然而由于协方差矩阵的维数太大,计算其特征向量变得几乎不可能。目前比较常用的方法是首先计算矩阵  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{N \times N}$  的特征向量,然后利用奇异值分解<sup>[6]</sup> (SVD) 推导出协方差矩阵的特征向量,但这种方法存在数值不稳定并且矩阵  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  的计算会损失一部分信息的问题<sup>[7]</sup>。还有一种是直接对矩阵  $\mathbf{A}$  进行 SVD 分解,然后再求出协方差矩阵的特征向量,但计算复杂度较高,大约为  $(14nN^2 - 2N^3)$  flops<sup>[7]</sup>。

为了降低复杂度,增加准确率,笔者应用 QR 分解求解协方差矩阵的特征向量。

## 1 基于 QR 分解的主成分分析 (QR-PCA)

首先对矩阵  $\mathbf{A}$  进行 QR 分解<sup>[8]</sup>, 即:  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$ , 其中  $\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{n \times l}$ , 是正交矩阵,  $\mathbf{R} \in \mathbf{R}^{l \times N}$  是上三角矩阵 ( $\text{rank}(\mathbf{A}) = l$ ,  $1 \leq l < N$ ), 然后对矩阵  $\mathbf{R}^T$  进行奇异值分解:

$$\mathbf{R}^T = \tilde{\mathbf{U}}\mathbf{S}\mathbf{V}^T, \tilde{\mathbf{U}} \in \mathbf{R}^{N \times l}, \mathbf{S} \in \mathbf{R}^{l \times l}, \mathbf{V} \in \mathbf{R}^{l \times l}$$

则:

$$\mathbf{C} = \mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{S}\tilde{\mathbf{U}}^T\tilde{\mathbf{U}}\mathbf{S}\mathbf{V}^T\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{S}^2\mathbf{V}^T\mathbf{Q}^T \quad (1)$$

又  $\mathbf{Q}\mathbf{V}$  是正交矩阵,所以协方差矩阵的特征值为  $\mathbf{S}^2$  的主对角线元素,特征向量为矩阵  $\mathbf{Q}\mathbf{V}$  的列向量,因此问题得到很好的解决,选择前  $m$  个最大特征值对应的特征向量,构造变换矩阵  $\mathbf{\Psi} = \mathbf{Q}\mathbf{V}_m$ ,  $\mathbf{V}_m$  表示  $\mathbf{V}$  的前  $m$  列构成的矩阵,最后计算输入样本  $x$  的  $m$  个主成分,即:

$$\mathbf{y} = \mathbf{\Psi}^T x = (\mathbf{Q}\mathbf{V}_m)^T x \quad (2)$$

所以  $n$  维样本图像  $x$  就降到  $m$  维的列向量  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T$ 。此外基于 QR 分解 PCA 计算复杂度<sup>[7]</sup> 大约为  $(2nN^2 + 2nlm)$  flops, 并且这种算法保证了数据的准确性和数值的稳定性。下面将这种方法推广到核空间上进行。

## 2 基于 QR 分解的 QR-KPCA

### 2.1 QR-KPCA 算法

Scholkopf<sup>[9]</sup> 首先提出了作为 PCA 的非线性推广 KPCA,笔者简要回顾一下它的思想。KPCA 是一种非线性特征提取的方法<sup>[10-12]</sup>,它体现在将原始的输入空间  $\mathbf{R}^n$  映射到特征空间  $\mathbf{F}$ ,然后在特征空间上执行线性的 PCA。这个方法的关键之处就是线性的 PCA 通过内积表示出来,因此这个非线性映射并不需要被明确地构造出来,而是通过 Mercer 核函数  $\mathbf{K}$  来确定。具体是将每一张人脸图像映射到更高维的空间  $\mathbf{F}$  中,在空间  $\mathbf{F}$  中进行主成分分析。本研究将 QR 分解的 PCA 推广到基于 QR 分解的 KPCA 上,首先计算出核矩阵的特征向量,然后推出协方差矩阵的特征向量,然后进行特征提取及分类识别,即:首先一个非线性  $\Phi$  被用来将输入数据空间  $\mathbf{R}^n$  映射到特征空间  $\mathbf{F}$ , 即:

$$\Phi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{F}$$

$$x_i \mapsto \Phi(x_i), i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

相应地,在原始输入空间中的一个模式被映射到特征空间中的一个更高维的向量, KPCA 的最初想法就是在特征空间上执行 PCA,建立特征空间的协方差矩阵。设:

$$\mathbf{M} = [\Phi(x_1), \Phi(x_2), \dots, \Phi(x_N)]$$

随机向量  $\Phi(x)$  协方差矩阵为:

$$\mathbf{C}^\Phi = \mathbf{E}[(\Phi(x) - \bar{\Phi})(\Phi(x) - \bar{\Phi})^T] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Phi(x_i) - \bar{\Phi})(\Phi(x_i) - \bar{\Phi})^T \quad (4)$$

其中  $\bar{\Phi} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi(x_i)$ 。

设  $v$  是  $\mathbf{C}^\Phi$  的特征值  $\lambda$  所对应的特征向量,即  $\mathbf{C}^\Phi v = \lambda v$ , 则  $v$  一定位于  $\mathbf{M}$  的向量生成的空间中, 即有  $v = \mathbf{M}\alpha$ , 记  $k_{ij} = \Phi^T(x_i)\Phi(x_j) = (\Phi(x_i) \cdot \Phi(x_j))$ , 则构建核矩阵  $\mathbf{K} = \mathbf{M}^T \mathbf{M}$ , 则  $\alpha$  就是中心化后的核矩阵  $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \mathbf{I}_N \mathbf{K} - \mathbf{K} \mathbf{I}_N + \mathbf{I}_N \mathbf{K} \mathbf{I}_N$  的特征向量。一般情况下核矩阵  $\mathbf{K}$  是低秩的, 以及是半正定矩阵, 设  $\text{rank}(\mathbf{K}) = t$ ,  $1 \leq t < N$ , 一般情况下无法得到具体的  $\mathbf{M}$  矩阵, 但是可以对核矩阵  $\mathbf{K}$  用选主元的 Cholesky 分解<sup>[13]</sup>, 即近似得  $\mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ , 其中  $\mathbf{L} \in \mathbf{R}^{N \times t}$ , 则  $\mathbf{L}$  的列平均向量为  $\bar{l} = \frac{1}{N} \mathbf{L} \mathbf{e}$ , 其中  $\mathbf{e} = [1, 1, \dots, 1]^T$ 。记  $\bar{\mathbf{L}} = [\bar{l}, \bar{l}, \dots, \bar{l}] \in \mathbf{R}^{N \times t}$ , 记  $\mathbf{H} = \mathbf{L} - \bar{\mathbf{L}}$ , 则  $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{H}\mathbf{H}^T$ , 则对矩阵  $\mathbf{H}$  进行 QR 分解, 得到:

$$\mathbf{H} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1 \quad (5)$$

其中,  $\mathbf{Q}_1 \in \mathbf{R}^{N \times t}$  是正交矩阵,  $\mathbf{R}_1 \in \mathbf{R}^{t \times t}$  是上三角矩

阵,则中心化后的核矩阵为  $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_1^T \mathbf{Q}_1^T$ , 然后对矩阵  $\mathbf{R}_1^T$  进行奇异值(SVD)分解,得到:

$$\mathbf{R}_1^T = \mathbf{U}_1 \mathbf{D}_1 \mathbf{V}_1^T \quad (6)$$

其中,  $\mathbf{U}_1 \in \mathbf{R}^{N \times t}$ ,  $\mathbf{D}_1 \in \mathbf{R}^{t \times t}$ ,  $\mathbf{V}_1 \in \mathbf{R}^{t \times t}$ , 则中心化后的核矩阵变为:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{V}_1 \mathbf{D}_1 \mathbf{U}_1^T \mathbf{U}_1 \mathbf{D}_1 \mathbf{V}_1^T \mathbf{Q}_1^T = \mathbf{Q}_1 \mathbf{V}_1 \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}_1^T \mathbf{Q}_1^T \quad (7)$$

其中,  $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{D}_1^2 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_t)$ ,  $\mathbf{U}_1^T \mathbf{U}_1 = \mathbf{I}$ , 又:

$$(\mathbf{Q}_1 \mathbf{V}_1)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_1^T \mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_1^T \mathbf{I} \mathbf{V}_1 = \mathbf{I} \quad (8)$$

则  $\mathbf{Q}_1 \mathbf{V}_1$  也是正交矩阵, 所以  $\mathbf{Q}_1 \mathbf{V}_1$  的列向量就是中心化后的核矩阵  $\tilde{\mathbf{K}}$  的特征向量,  $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{D}_1^2$  中的对角元素就是  $\tilde{\mathbf{K}}$  的特征值, 设  $\mathbf{Q}_1 \mathbf{V}_1 = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t]$ ,  $\alpha_i \in \mathbf{R}^N$ ,  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_t)$ , 则协方差矩阵  $\mathbf{C}^\Phi$  的特征向量为:  $v_i = \mathbf{M} \alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, t$ , 选取前  $m$  个最大特征值所对应的特征向量  $v_1, v_2, \dots, v_m$ ,  $i = 1, 2, \dots, m (m < t)$ ,  $m$  选取原则为:

$$\frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i}{\sum_{i=1}^N \lambda_i} = \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i}{\text{trace}(\mathbf{K})} \geq \eta, \quad \eta = 0.9:0.99 \quad (9)$$

记  $\mathbf{V} = [v_1, v_2, \dots, v_m]$ ,  $\mathbf{U} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m]$ , 则对于输入样本  $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_N]$ , 将其映射到特征空间  $F$  中为  $\mathbf{M} = [\Phi(x_1), \Phi(x_2), \dots, \Phi(x_N)]$ , 提取  $m$  个主成分, 为:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^T \mathbf{M} &= [v_1, v_2, \dots, v_m]^T \mathbf{M} = \\ &(\mathbf{M}[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m])^T \mathbf{M} = \\ &\mathbf{U}^T \mathbf{M}^T \mathbf{M} = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \end{aligned} \quad (10)$$

问题又转化为如何求出核矩阵  $\mathbf{K}$ , 一般使用核函数来计算核矩阵是很方便的。常用的核函数<sup>[14]</sup>有多项式核函数和径向基核函数。

1) 多项式核函数:

$$k_{ij} = k(x_i, x_j) = (x_i^T x_j + c)^d$$

式中  $x_i$  是一个列向量,  $c$  为非负数,  $d$  为正整数, 核矩阵为  $\mathbf{K} = (k_{ij})$ 。

2) 径向基核函数:

$$k_{ij} = k(x_i, x_j) = \exp\left(-\frac{\|x_i - x_j\|^2}{2\sigma^2}\right)$$

式中  $\sigma$  是常数, 核矩阵为  $\mathbf{K} = (k_{ij})$ 。

本研究提出基于 QR 分解的 KPCA 算法进行人脸识别。QR-KPCA 算法步骤如下。

1) 确定使用的核函数, 给核函数中的参数以确定的值。

2) 计算核矩阵  $\mathbf{K} = (k_{ij})$ , 并对其进行选主元的 Cholesky 分解, 即:  $\mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ 。

3) 根据  $\mathbf{H} = \mathbf{L} - \bar{\mathbf{L}}$ , 计算矩阵  $\mathbf{H}$ , 并对其进行 QR 分解, 即:  $\mathbf{H} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1$ 。

4) 对矩阵  $\mathbf{R}_1^T$  进行奇异值分解(使用 MAT-

LAB 中的  $\text{svoids}(\mathbf{R}_1^T, m)$ ) 得到  $\mathbf{R}_1^T = \mathbf{U}_1 \mathbf{D}_1 \mathbf{V}_1^T$ 。根据上面的理论推导可求出协方差矩阵的前  $m$  个最大特征值所对应的特征向量  $\mathbf{V} = [v_1, v_2, \dots, v_m]$ 。

5) 特征提取:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{M}\mathbf{U} = \mathbf{M}[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m] = \\ &[\mathbf{M}\alpha_1, \mathbf{M}\alpha_2, \dots, \mathbf{M}\alpha_m] \\ \mathbf{Y} &= [y_1, y_2, \dots, y_N] \end{aligned}$$

其中  $y_i \in \mathbf{R}^{m \times N}$ , 表示第  $i$  张图片经过非线性降维后的图像向量  $\mathbf{Y} = \mathbf{V}^T \mathbf{M} = \mathbf{U}^T \mathbf{M}^T \mathbf{M} = \mathbf{U}^T \mathbf{K}$ 。

6) 分类识别: 比较待识别的一张图片  $y_c$  和训练集中的所有图片  $t_i$  的向量差的  $p$  范数, 若:

$$d(y_c, t_i) = \min_{1 \leq i \leq N} d(y_c, t_i)$$

其中  $d(y_c, t_i) = \|y_c - t_i\|_p$ , 则认为该测试图像  $y_c$  和  $t_i$  是同一类的。此外, 基于 QR 分解的 KPCA 算法的计算复杂度为  $2nN^2 + 2nlm + l^2 N$  flops。

## 2.2 $p$ 范数的定义

关于向量的  $p$  范数可说明为:  $d = (d_1, d_2, \dots, d_m)$ , 则:

$$\|d\|_p = \left(\sum_{i=1}^m |d_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p > 0 \quad (11)$$

当  $p = 1$  时,  $\|d\|_1 = \sum_{i=1}^m |d_i|$ , 此时度量称为 Manhattan 度量, 当  $p = 2$  时,  $\|d\|_2 = \left(\sum_{i=1}^m |d_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ , 此时度量就是常用的 Euclid 度量, 本研究中, 笔者使用的是  $p (0 < p \leq 2)$  范数来度量两个图像的相似性, 后续实验可证实识别效果良好。

## 3 实验结果及分析

QR-KPCA 算法及其相关算法在人脸识别中的实验比较分析的实验环境: Windows 7 + Matlab2009b; Dual Core Processor 2.4 GHz CPU, 1.87 G 内存。实验中使用如下两个数据库。

1) ORL 人脸数据库 (<http://www.cam-orl.co.uk>), 包含 40 个人, 每个提供 10 种不同的图像。部分图像是在不同的时间拍摄的, 面部表情(眼睛睁开/微笑或不微笑)和面部细节(戴眼镜或不戴眼镜)各有所不同(见图 1)。所有灰度图像分辨率为  $112 \times 92$ 。

2) AR 人脸数据库 ([http://rvll.ecn.purdue.edu/~aleix/aleix face DB.html](http://rvll.ecn.purdue.edu/~aleix/aleix%20face%20DB.html)), 是一个大型的人脸图像数据集。部分图像由于存在太阳镜和围巾, 可能会包含大面积的遮挡, 这增加了类内的差异和识别难度。

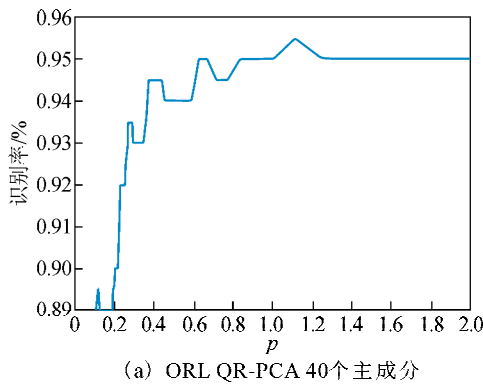
本文使用 AR 的一个子集, 包含 120 个人的 1 680 张人脸图像, 灰度图像分辨率为  $40 \times 50$ 。



图 1 ORL 人脸数据库中的一组人脸图像  
Fig.1 A set of face images in ORL face database

**3.1 基于 QR-PCA 的  $p$  范数中参数  $p$  的最优选择**  
在 ORL 数据库中,每人选取 5 张图像作为训练集元素,剩下的 5 张图像作为测试集元素,下面画出了协方差矩阵的前 100 个特征值的分布情况,从而决定了本研究选择多少个主成分最佳,并且分别画出了选定 20 主成分和 40 主成分时,  $p$  的取值和相应的识别率曲线(见图 2)。

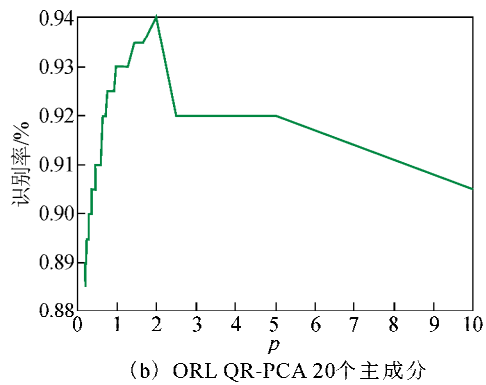
从图 2(a)明显可以看出当  $p=2$  时,应该能够



(a) ORL QR-PCA 40个主成分

得到比较高识别率,随后画出了  $p=2$  时,主成分的个数和识别率的变化曲线。

图 2(a)的图像画出了  $p$  从 0.1~2 时 QR-PCA 的人脸识别率,明显看出  $p=2$ ,亦即度量用欧氏距离时,QR-PCA 的识别率较高,因此再画出图 2(b),  $p$  取 0.1~10 时识别率的变化情况。可以看出当  $p > 2$  时,识别率随着  $p$  的增大而减小,从而确定  $p=2$  时识别率最高。



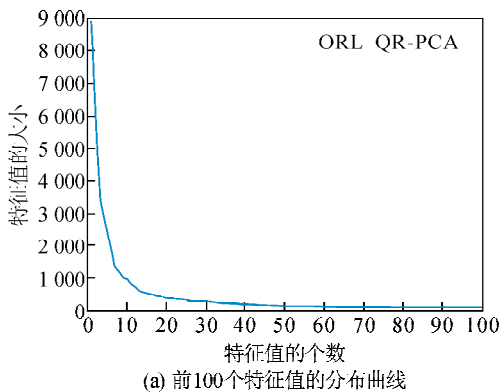
(b) ORL QR-PCA 20个主成分

图 2 主成分与识别率的变化曲线

Fig.2 The curves of principal component and recognition rate

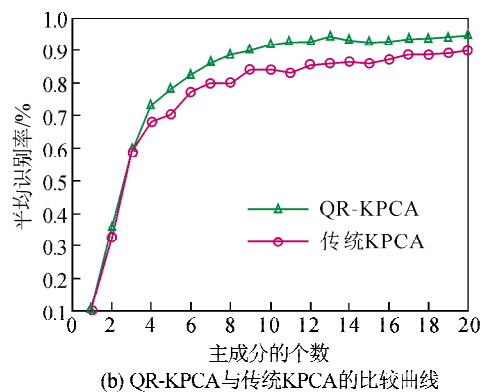
图 3 (a)画出了核矩阵的前 100 个特征值的分布情况。

从图中可以看出,采用 QR-PCA 方法进行数据



(a) 前100个特征值的分布曲线

的线性降维,从中提取 20 个和 40 个主成分,已经能够很有效地表达图像的真实信息,人脸识别效果比较突出。



(b) QR-KPCA与传统KPCA的比较曲线

图 3 QR-PCA 和 QR-KPCA 的相关曲线

Fig.3 The related curves of QR-PCA and QR-KPCA

**3.2 基于 QR-KPCA 的  $p$  范数中参数  $p$  的最优选择**

**3.2.1 基于 ORL 数据库的实验**

在 ORL 数据库中,选择每个人的 5 张图像作为训练集元素,剩余的 5 张图像作为测试集元素,首先

使用高斯核函数来构建核矩阵,其中  $\sigma^2 = 1\ 000$ ,则核矩阵为 200 行、200 列的对称半正定矩阵,然后分别画出主成分为 25、50 时,  $p$  的取值与识别率的变化曲线(见图 4)。

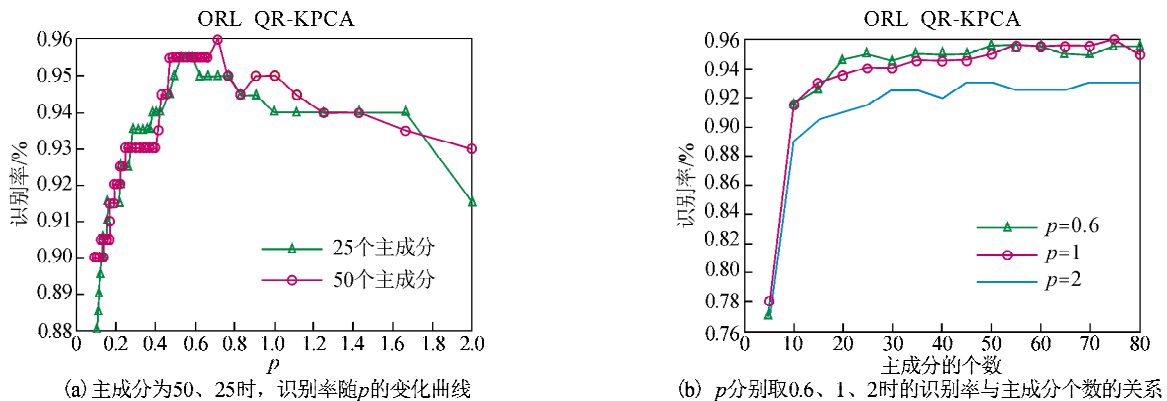


图4 ORL中主成分与识别率的关系曲线

Fig. 4 The related curves of principal component and recognition rate in ORL

在ORL人脸数据库中做了大量相关实验,并画出具有代表性的图4。图4(a)描述的是主成分分别取25和50时, $p$ 的取值在0.1~2范围内时,人脸识别率的变化情况。从中不难看出,在 $p=0.5\sim 0.7$ 时,识别率较高且具有很强的稳定性。为了进一步确认这点,再画出 $p=0.6, 1, 2$ 时识别率随主成分个数的变化情况,明显看出 $p=0.6$ 时识别率最高。

然后使用最优的参数 $p=0.6$ ,使用相同的核参数 $\sigma^2=1\ 000$ ,比较了提出的方法QR-KPCA和传统KPCA的识别率,并画出图3(b)的曲线图。从中可

以看出,在使用了 $p$ 范数的QR-KPCA方法中,对应相同主成分的情况下,人脸识别率大幅度提高,足以验证 $p$ 范数的优越性。

### 3.2.2 基于AR数据库的实验

在AR数据库中,选择每个人的7张图像作为训练集元素,剩余的7张图像作为测试集元素。首先使用高斯核函数来构建核矩阵,其中 $\sigma^2=1\ 000$ ,则核矩阵为840行、840列的对称半正定矩阵,然后分别画出主成分为25、50、100时, $p$ 的取值与识别率的变化曲线及 $p$ 分别取0.1、0.4、1时主成分个数与识别率的关系,如图5所示。

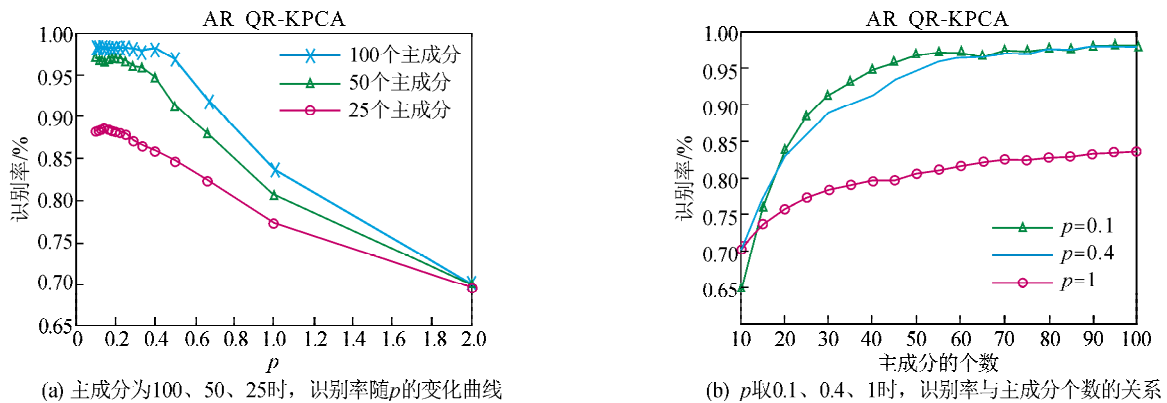


图5 AR中主成分和识别率的相关曲线

Fig. 5 The related curves of principal component and recognition rate in AR

因此,从图5(b)中能够明显看出当 $p$ 在0.1~0.4之间取值的时候,QR-KPCA方法的识别率将达到最高,并且随着 $p$ 取值的增大,识别率明显依次递减,从而可以看出使用 $p$ 范数作为度量相似性的标准具有明显的优势,也是对欧式距离的推广,并且当选择每个人的13张照片作为训练集元素,剩余的一张作为测试集元素,此时核矩阵的维数为 $1\ 560\times 1\ 560$ ,通过实验发现同样是当 $p=0.1\sim 0.4$ 时,QR-KPCA的识别率最高。

笔者在实验中也做了QR-KPCA与QR-KPCA的识别率比较,如图6所示。

很明显,通过本文将QR-KPCA算法推广到QR-KPCA算法,在相同参数的情况下,画出了识别率的比较曲线,从中可以看出识别率得到明显提高,因此提出的QR-KPCA人脸识别算法很有推广的意义。

实验结果表明,对于较大规模问题可以使用cholesky分解核矩阵,然后使用QR-KPCA算法对人脸数据的非线性降维后,再使用 $p$ 范数分类识别

能够达到很好的识别效果,从而能够为大数据时代处理海量数据提供了有力的技术支持。

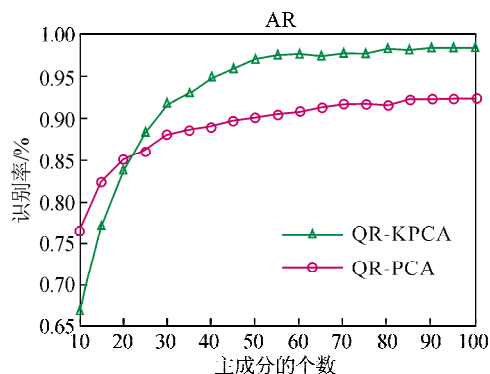


图 6 QR-PCA 算法和 QR-KPCA 算法的识别率比较  
Fig. 6 The recognition rate comparison of QR-KPCA and QR-PCA

#### 4 结 论

1) 应用基于 QR 分解的主成分分析算法进行人脸识别,这种算法在计算复杂度比基于 SVD 的 PCA 的复杂度较低,且比基于  $A^T A$  的特征值分解 (EVD) 的计算精度较高;

2) 在此基础上,将其推广到核空间上提出基于  $p$  范数的 QR-KPCA 算法,并通过大量实验验证了该算法的数值稳定性较好,且比线性的基于 QR 分解的 PCA 方法和传统的 KPCA 方法都具有较高的识别率,从而能为实时的人脸识别系统提供有力的技术支持。

#### 参考文献:

[1] Turk Pentland M. Eigenfaces for recognition[J]. Cognitive Science,1991,1(3):71-86.  
[2] Joliffe I T. Principal component analysis[M]. 2nd edition. New York; Springer Science & Business Media,2002.  
[3] Yang J, Yang J Y. From image vector to matrix: a straightforward image projection technique-IMPCA versus PCA [J]. Pattern Recognition, 2002, 35 (9): 1997-1999.

[4] Chen S, Zhu Y. Subpattern based principal component analysis [J]. Pattern Recognition, 2004, 37 (5): 1081-1083.  
[5] Gottuumukkal R, Asari V K. An improved face recognition technique based on modular PCA approach[J]. Pattern Recognition,2004,37(4):429-436.  
[6] Du G, Zhu W J. Face recognition method based on singular value decomposition and fuzzy decision[J]. Journal of Image and Graphics,2006,11(10):1456-1459.  
[7] Golub G H, Loan C F V. Matrix Computations[M]. Baltimore:The John Hopkins University Press,1999.  
[8] Sharma Alok, Kuldip K, Paliwal Seiya. Principal component analysis using QR decomposition[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2013,4(1):679-683.  
[9] Scholkopf B, Smola A, Muller K R. Nolinear component analysis as a kernel eigenvalue problem[J]. Neural Comput,1996,44(1):1299-1319.  
[10] Ming H, Suan Y. Kernel Eigenfaces vs. Kernel Fisherfaces: face recognition using Kernel methods [C]// proceedings of the Fifth IEEE International Conference on automatic face and gesture recognition. Washington DC, USA,2002:215-220.  
[11] Wang Y M, Zhang Y Z. Facial Recognition Base on Kernel PCA [C]//2010 Third International Conference on Intelligent Networks and Intelligent Systems. Shenyang,China,2010.  
[12] Zhao L H, Zhang X L, Xu X H. Face recognition base on KPCA with polynomial kernel[C]//proceedings of the 2007 international conference on wavelet analysis and pattern recognition. Beijing, China,2007:2-4.  
[13] Harbrecht H, Peters M, Schneider R. On the low-rank approximation by the pivoted Cholesky decomposition[J]. Universitat Stuttgart, Germany,2010,62 (4):428-440.  
[14] 邓乃扬,田英杰.数据挖掘中的新方法-支持向量机 [M].北京:科学出版社,2004.

(责任编辑 王卫勋)