

文章编号: 1006-4710(2015)02-0176-04

表面效应对平面压缩波(P波)散射的影响

汝艳, 曹小杉

(西安理工大学 土木建筑工程学院, 陕西 西安 710048)

摘要: 研究了阵列纳米孔洞周围的弹性波散射和动应力集中问题。当孔洞的尺寸缩小到纳米尺度时, 比表面积显著增加, 表面效应对材料力学特性的影响变得非常重要。基于表面弹性理论和经典弹性理论, 用位移势函数法、波函数展开法和弹性波的多重散射理论, 求得了无限大空间中一组以正四边形方式排列的纳米圆柱孔洞附近由平面弹性压缩波(P波)诱发的应力场。分析了表面效应对孔洞周围动应力集中的影响。结果表明, 纳米圆柱孔洞周围的动应力集中不仅和表面效应有关, 还和孔洞之间的距离有关。

关键词: 表面效应; 弹性波散射; 多重散射; 动应力集中因子

中图分类号: O343

文献标志码: A

Surface effects on the scattering of plane elastic P-wave

RU Yan, CAO Xiaoshan

(Faculty of Civil Engineering and Architecture, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

Abstract: In this paper, the multiple scattering of P-wave by nanosized cylindrical holes arranged as quadrangular shape is studied. When the radius of the holes shrinks to nanometers, surface effects play an important role in their mechanical performance. Based on the surface elasticity theory and classical elasticity theory, the displacement potential method, wave functions expansion method and multiple scattering methods are used to obtain the scattering fields around the nanosized cylindrical holes induced by P-wave. The surface effects upon the dynamic stress concentration of hole surrounding is analyzed. The results indicate that the dynamic stress concentration around nanosized cylindrical holes is closely related not only to the surface effects but to the distance among the holes as well.

Key words: Surface effect; scattering of elastic waves; multiple scattering; dynamic stress concentration factor

Mow 和 Pao^[1]详细的研究了在无限大弹性介质中不同形状的单夹杂和孔洞周围的弹性波散射问题。近年来, 随着复合材料的发展, 越来越多的人对弹性波的多重散射问题更感兴趣。通过不同局部坐标系统之间的相互转换, 人们研究了波在双夹杂附近的多重散射问题^[2-3], 波在一列圆柱孔周围的反射和传播问题^[4], 声波和电磁波在有随机排列的圆柱孔附近的多重散射问题^[5], Wang 和 Sudak^[6]研究了波在一组有界面缺陷的圆柱孔周围的多重散射问题。

纳米材料的物理、光学和力学等特性都不同于宏观材料^[7], 随着比表面积的增大, 表面能对纳米材料的力学行为的影响很大^[8-9]。Gurtin 和 Murdoch^[10]、Gurtin 等^[11]以连续介质力学为基础建立了表面弹性理论的模型, 此理论和原子仿真结果吻

合的很好^[12]。因此, 以表面弹性理论为基础, 分析并研究了很多纳米尺度的力学问题^[13-16]。Wang 等^[13]得到了平面压缩波引起的单纳米圆柱孔洞周围的弹性解, Ru 等^[14]研究了无限大平面上 P 波和 SV 波在纳米圆柱夹杂附近的散射问题; Wang^[15]和 Zhang 等^[16]研究了一对和一系列纳米夹杂周围平面压缩波的散射问题。这些研究都表明了表面效应对波的散射现象有很大影响,

本文研究了由平面弹性压缩波(P波)所诱发的以正四边形方式排列的一组纳米圆柱孔洞周围波的多重散射问题。

1 基本方程

本文将表面看成无厚度的不同于基体材料的二

收稿日期: 2015-01-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11302166)。

作者简介: 汝艳, 女, 博士, 讲师, 研究方向为纳米材料及纳米构件的动力学行为。E-mail: ruyan@xaut.edu.cn。

维膜,并且无滑移的与基体粘接,由于表面应力的存在,经典弹性理论已不再适用。

在纳米尺度,基于表面弹性理论来研究波的散射问题^[10-11],表面应力 $\sigma_{\alpha\beta}^{\text{sur}}$ 和表面能密度 Γ 的关系如下所示^[11]:

$$\sigma_{\alpha\beta}^{\text{sur}} = \Gamma \delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}} \quad (1)$$

其中,下标中相同符号满足求和约定。 $\delta_{\alpha\beta}$ 为 Kronecker 符号,当 $\alpha = \beta$ 时, $\delta_{\alpha\beta} = 1$; 当 $\alpha \neq \beta$ 时, $\delta_{\alpha\beta} = 0$; $\varepsilon_{\alpha\beta}$ 为表面应变。

不考虑表面残余应力,表面应力和表面应变之间的关系为^[11]:

$$\sigma_{\alpha\beta}^{\text{sur}} = 2\mu^{\text{sur}} \varepsilon_{\alpha\beta} + \lambda^{\text{sur}} \varepsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \quad (2)$$

其中 μ^{sur} 和 λ^{sur} 均为表面常数。

假设表面和基体材料理想粘接并且没有滑移,那么表面处的平衡方程为^[16]:

$$f_\alpha + \sigma_{\beta\alpha,\beta}^{\text{sur}} = 0 \quad (3)$$

$$\sigma_{ij} \mathbf{n}_i n_j = \sigma_{\alpha\beta}^{\text{sur}} \kappa_{\alpha\beta} \quad (4)$$

其中, f_α 是外力 $f_i = \sigma_{ij} n_j$ 在 x_α 方向的分量, \mathbf{n}_i 是表面的法向量, $\kappa_{\alpha\beta}$ 是表面的曲率。希腊字母取 1、2、3,拉丁字母取 1、2。下标中的逗号表示求导。

在基体处,平衡方程与本构方程和经典弹性理论中的一致:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (5)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (6)$$

其中, ρ 是基体材料的密度, t 是时间, μ 和 ν 分别为剪切模量和泊松比。 σ_{ij} 和 ε_{ij} 分别为基体处的应力和应变。应变张量和位移分量的关系如下所示:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (7)$$

2 由 P 波诱发的纳米孔洞周围弹性波的多重散射

如图 1 所示,在无限大弹性介质中(弹性常数和密度分别为 λ , μ 和 ρ),有 $N+1$ ($N \rightarrow \infty$) 个半径为 a 的纳米圆柱孔洞以正四边形方式排列,这种排列方式的特点是孔洞的半径为 a ,排列在正方形顶点的孔洞和排列在这个正方形中心的孔洞间的距离为 $2b$ (图 2)。以中间孔洞的中心为圆心建立全局坐标系 (r_0, θ_0) ,以第 j 个孔洞的中心为圆心建立局部坐标系 (r_j, θ_j) ($j = 1, 2, \dots, N$)。圆柱孔洞的轴线与坐标 z 轴平行。

假设一组简谐平面弹性 P 波沿着图 1 所示方向传播(沿 x 轴正向)。在局部坐标系 (r_0, θ_0) 下,入射 P 波可用 Bessel 函数表示成如下形式:

$$\varphi^{(i)} = \varphi_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n J_n(\alpha r_0) e^{in\theta_0} e^{-i\omega t} \quad (8)$$

其中, φ_0 为入射波的振幅, $J_n(x)$ 是第一类 n 阶

Bessel 函数, $\alpha = \omega/c_p$ 是 P 波的波数, $c_p = \sqrt{2\mu(1-\nu)(1-2\nu)^{-1}\rho^{-1}}$ 是 P 波波速, ω 是圆频率, i 是虚数单位。

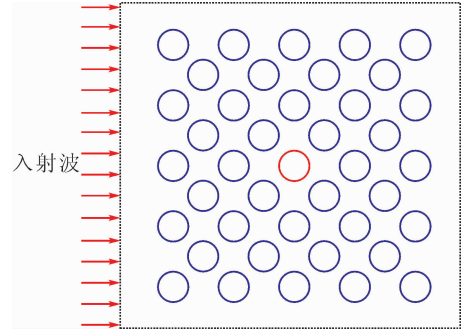


图 1 弹性波在有一组以正四边形方式排列的纳米圆柱孔洞的无限大平面中的散射示意图

Fig. 1 The diffraction of plane elastic waves by cylindrical holes arranged as quadrangular shape

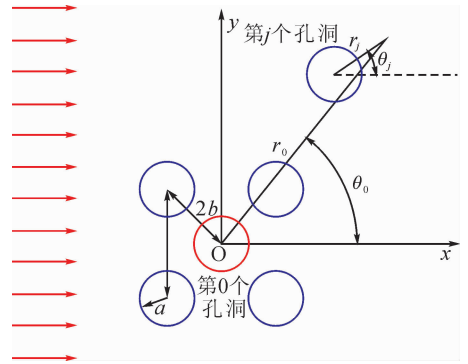


图 2 孔洞尺寸以及坐标系统示意图

Fig. 2 Dimensions and coordinate system for formulating the problem

当入射波传播并碰撞到孔洞的表面时,将会有 P 波和 SV 波被反射出来,第 j' 个(此时, $j' = 0, 1, 2, \dots, N$)孔洞表面反射出来的波可以用位移势函数表示为:

$$\varphi^{(r)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nj'} H_n^{(1)}(\alpha r_{j'}) e^{in\theta_{j'}} e^{-i\omega t} \quad (9)$$

$$\psi^{(r)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{nj'} H_n^{(1)}(\beta r_{j'}) e^{in\theta_{j'}} e^{-i\omega t}$$

其中, $H_n^{(1)}(x)$ 是第一类 n 阶 Hankel 函数, $\beta = \omega/c_s$ 是 SV 波的波数, $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ 是 SV 波的波速, $A_{nj'}$ 和 $B_{nj'}$ 是两组未知系数,需根据边界条件来求解。孔洞周围的全波为入射波与反射波之和^[1]:

$$\varphi = \varphi^{(i)} + \sum_{j'=0}^N \varphi^{(r)} \quad (10)$$

$$\psi = \sum_{j'=0}^N \psi^{(r)}$$

根据 Graf Addition Theorem^[2-3],两个局部坐标系 (r_l, θ_l) 和 (r_k, θ_k) 之间的转换关系为:

$$\begin{aligned}
 H_n^{(1)}(\alpha r_l) e^{in\theta_l} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_{n+m}^{(1)}(\alpha r_{l,k}) J_m(\alpha r_k) e^{i(m+n)\theta_{l,k}} e^{in\pi} e^{-im\theta_k} \\
 H_n^{(1)}(\beta r_l) e^{in\theta_l} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_{n+m}^{(1)}(\beta r_{l,k}) J_m(\beta r_k) e^{i(m+n)\theta_{l,k}} e^{in\pi} e^{-im\theta_k}
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

这样就得到了在全局坐标系下,任意孔洞周围的全波表达式。

在基体处,经典弹性理论仍然适用。因此在圆柱坐标系下,各位移分量可以用两个势函数 φ 和 ψ 表示如下:

$$\begin{aligned}
 u_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\
 u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r}
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

圆柱坐标系下,几何方程可以写为:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\
 \epsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\
 \epsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

因此,本构方程可以写为:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= 2\mu\epsilon_{rr} + \lambda(\epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta}) \\
 \sigma_{\theta\theta} &= 2\mu\epsilon_{\theta\theta} + \lambda(\epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta}) \\
 \sigma_{r\theta} &= 2\mu\epsilon_{r\theta}
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

在孔洞的表面,应变 $\epsilon_{\theta\theta}$ 和应力的关系为:

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{2\mu} [(1-\nu)\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}]
 \tag{15}$$

通过(2)式,可得表面应力 $\sigma_{\theta\theta}^{sur}$ 如下:

$$\sigma_{\theta\theta}^{sur} = (2\mu^{sur} + \lambda^{sur})\epsilon_{\theta\theta}
 \tag{16}$$

通过(3)式和(4)式,我们得到了孔洞表面处的边界条件:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= \frac{\sigma_{\theta\theta}^{sur}}{a} \\
 \sigma_{r\theta} &= -\frac{1}{a} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{sur}}{\partial \theta}
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

将式(15)代入式(16)再代入式(17),边界条件可写成:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= s[(1-\nu)\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}] \\
 \sigma_{r\theta} &= -s(1-\nu) \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \nu \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta}
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

其中 $s = \frac{2\mu^{sur} + \lambda^{sur}}{2\mu a}$, 是纳米尺度衡量表面效应的一个无量纲参数,可以看出 s 和孔洞的半径 a 成反比关系。对于宏观孔洞,半径 a 的值很大,那么 $s \ll 1$, 因此表面效应可以被忽略;但是当孔洞的尺寸缩小到纳米尺度时, s 的作用就非常显著,表面效应必须被考虑。

因为每个孔洞周围的弹性波散射现象都相同,为了方便研究,本文只讨论最中间孔洞周围的弹性波的散射。运用 Graf addition theorem 理论(式(11)),由式(10),(12)~(14),我们得到了在全局坐标系下中间孔洞周围的应力表达式。根据孔洞处的边界条件(式(18)),就能求出两组未知系数 $A_{nj'}$ 和 $B_{nj'}$ 。这样,就得到了由 P 波诱发的一组以正四边形方式排列的纳米圆柱孔洞周围的应力场。

3 结果和讨论

为了检验表面效应对弹性波散射的影响,本文将讨论表面效应对 P 波诱发的纳米圆柱孔洞周围动应力集中的影响。

定义动应力集中因子($DSCF_p$)为:

$$DSCF_p = \left| \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\sigma_0} \right|
 \tag{19}$$

其中, $\sigma_{\theta\theta}$ 为沿中间孔洞分布的周向应力, $\sigma_0 = \mu\beta^2\varphi_0$ 为 P 波在其传播方向上的应力强度。计算中取 $\nu = 0.26$ 。

考虑了表面效应的影响后, $DSCF_p$ 不但和入射波的波数 α 有关,而且和泊松比 ν 、孔洞间的距离 $2b$ 以及表面弹性参数 s 有关。当入射波以很低的频率入射 $\alpha \rightarrow 0$, 并且保持 σ_p 为一个不变的常数,当 $s = 0.0$ 时,该问题就退化成远场双向加载的静态问题^[1]: $\sigma_x = \sigma_0, \sigma_y = \sigma_0\nu/(1-\nu)$ 。由图 3 可知,当入射波以低频 $\alpha a = 10^{-3}$ 入射,并且 $s = 0.0$ 时,该问题的理论解与相应静态问题的数值解吻合的比较好。

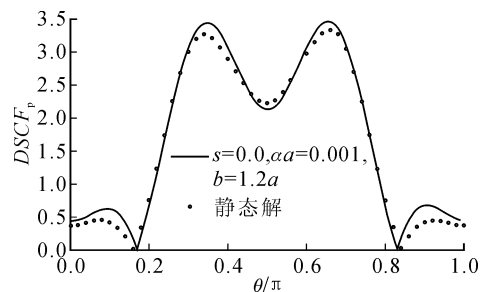


图 3 $\alpha a = 0.001, s = 0.0, b = 1.2a$ 时理论解与静态数值解的比较
Fig. 3 Comparisons of the present numerical results for the $DSCF_p$ induced by very low frequency incident P-wave with the static solutions

1) 入射波以低频入射($\alpha a = 0.001$)

在这种情况下,入射波的波长远大于孔洞的半径($\lambda = 2000\pi a$)。当孔洞之间的距离保持不变 $b = 1.2a$,图 4 表示了对于不同的 s ,孔周动应力集中因子的分布。 $DSCF_p$ 的最大值出现在 $\theta = 0.3\pi$ 和 $\theta = 0.7\pi$,随着 s 值的增大,动应力集中因子几乎

在整个区域内都是逐渐减小的。

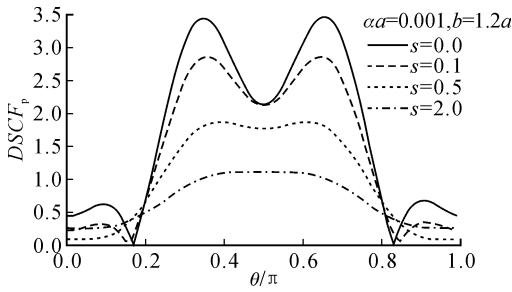


图4 $\alpha a = 0.001, b = 1.2a$ 时,表面效应对动应力集中因子的影响

Fig. 4 Surface effect on the distribution of $DSCF_p$ along the middle hole for $\alpha a = 0.001$ and $b = 1.2a$

当 $s = 0.0$ 时,对于不同的孔间距离,孔洞周围的动应力集中因子的分布如图 5 所示。孔间距离越大,孔洞间的相互影响越小。当孔间距离大于 $10a$ 时,孔洞之间的相互影响就可以忽略,并且 $DSCF_p$ 的分布和无限大平面中一个纳米圆柱孔洞周围的 $DSCF_p$ 分布基本相同。还可以看出,随着孔洞之间距离的增大,动应力集中因子在区间 $0.25\pi < \theta < 0.4\pi$ 和 $0.55\pi < \theta < 0.7\pi$ 逐渐减小。

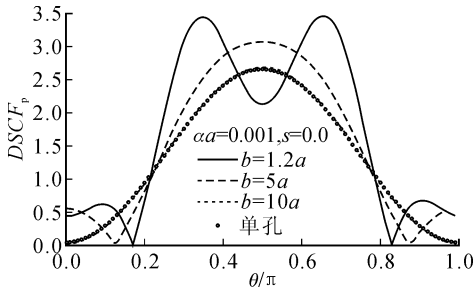


图5 $\alpha a = 0.001, s = 0.0$ 时,孔间距离对动应力集中因子的影响

Fig. 5 Distribution of $DSCF_p$ along the middle hole for different separation of b for $\alpha a = 0.001$ and $s = 0.0$

2) 入射波以高频入射 ($\alpha a = \frac{\pi}{2}$)

此时入射波的波长与孔洞半径相差不多 ($\lambda = 4a$)。图 6 显示了当孔洞间保持一定的距离,对不同的 s 值,孔洞周围的动应力集中因子的分布。从图中可以清楚的看出入射波和反射波之间的干涉现象,并且不考虑表面效应时干涉现象较明显 ($s = 0.0$),随着 s 值的增大干涉现象越来越不明显(当 $s = 2.0$ 时,基本可以忽略)。

图 7 显示了对于不同的孔间距离和一个给定的表面弹性常数 ($s = 0.0$),动应力集中因子沿着孔周的变化情况。干涉现象依然很明显。当孔间距离比较近时,孔间的相互影响很大;当孔和孔之间的距离一定大的时候 ($b > 20a$),孔间的相互影响就可

以忽略,并且 $DSCF_p$ 的分布和无限大平面中一个纳米圆柱孔洞周围的 $DSCF_p$ 的分布基本相同。

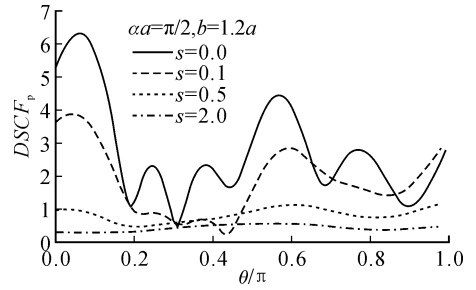


图6 $\alpha a = \pi/2, b = 1.2a$ 时,表面效应对动应力集中因子的影响

Fig. 6 Surface effect on the distribution of $DSCF_p$ along the middle hole for $\alpha a = \pi/2$ and $b = 1.2a$

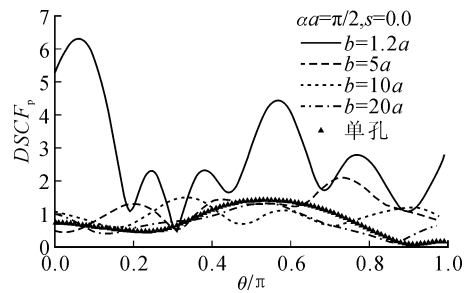


图7 $\alpha a = \pi/2, s = 0.0$ 时,孔间距离对动应力集中因子的影响

Fig. 7 Distribution of $DSCF_p$ along the middle hole for different separation of b for $\alpha a = \pi/2$ and $s = 0.0$

4 结论

本文讨论了表面效应对 P 波诱发的阵列纳米圆柱孔洞周围弹性波多重弹射的影响。运用位移势函数法和波函数展开法,我们得到了孔洞周围的应力分布。当孔洞的尺寸缩小到纳米尺度,表面效应对孔周应力分布的影响将不能忽略。结果表明,表面效应不但减弱了孔周的动应力集中现象,而且还减弱了入射波和反射波之间的干涉现象。

动应力集中因子不仅受表面效应的影响,孔洞之间的距离对其影响也很大。不论入射波以低频还是以高频入射,当孔间距比较小的时候,孔洞间相互影响比较大。随着孔洞之间距离的增大(增大到某一值时),孔洞间的相互影响就可以被忽略。

参考文献:

[1] Pao Y H, Mow C C. Diffractions of elastic waves and dynamic stress concentrations[M]. New York: The Rand Corporation, 1973.