文章编号：1006-4710(2015)04-0464-04

具有线性代数约束的微分代数系统的 Adomian 分解解法

冯再勇[1,2]，陈宁[2]

(1. 南京铁道职业技术学院 社科部，江苏 南京 210031；
2. 南京林业大学 机械电子工程学院，江苏 南京 210037)

摘要： 在回顾 Adomian 分解方法解微分方程的基础上，分析了利用 Adomian 分解方法解微分代数系统的主要困难。针对具有线性代数约束的微分代数系统给出了确定其代数变量解的便利方法，基于这种方法能够得到系统级数形式的精确解。最后举例验证了该方法的有效性和实用性。

关键词： 微分代数系统；线性代数约束；Adomian 分解；级数解

中图分类号： O29　　**文献标志码：** A

The solution to differential-algebraic system with linear algebraic constraints by Adomian decomposition method

FENG Zaiyong[1,2], CHEN Ning[2]

(1. Department of Social Science, Nanjing Institute of Railway Technology, Nanjing 210031, China;
2. College of Mechanical and Electronic Engineering, Nanjing Forestry University, Nanjing 210037, China)

Abstract: Based on reviewing the Adomian decomposition method in decomposing the differential system, this paper analyzes the main difficulties by means of the Adomian decomposition method to decompose differential-algebraic system. Also, with an aim at the differential-algebraic system with the linear constraints, the paper gives the convenient method to determine its algebraic variable solution, on the basis of which, the series accurate solution to the system can be obtained. Finally, the examples are listed to test the effectiveness and practicity of this method.

Key words: differential-algebraic system; linear constraints; Adomian decomposition; series solution

微分代数系统一般具有 $F(t,y,y')=0$ 的形式，系统同时包含微分方程以及代数方程（这部分方程中不出现导数项）作为约束，可以更真实地刻画工程应用问题。因此微分代数系统在解决科学及工程问题，特别是在多体系统动力学等方面有很多有效的研究和应用[1-5]。微分代数系统的求解对其应用具有重要的实际意义。目前微分代数系统的解法主要有数值解法[6-7]，此外文献[8]研究了微分代数系统的微分变换解法，得到了级数形式的近似解析解。另一方面，自 Adomian G 提出解非线性方程的 Adomian 分解方法以来，Adomian 分解方法在解微分方程方面取得了很大的成功[9-10]。Adomian 分解方法能够得到级数形式的解析解，而且收敛快、计算简单，具有类似于泰勒级数展开的直观意义等优点。因此本文讨论利用 Adomian 分解方法求形如式(1)的微分代数系统的级数解。

$$\begin{cases} y_i'(t)=f_i(t,y_1,y_2,\cdots,y_n) & i=1,2,3,\cdots,l \\ L_j(y_1,y_2,\cdots,y_n)=0 & j=l+1,l+2,\cdots,n \\ y_i(0)=c_i & i=1,2,3,\cdots,l \end{cases} \tag{1}$$

式中代数约束 L_j 为线性函数，变量 $y_i(t)$ 称为微分变量，$y_j(t)$ 称为代数变量，并假设 $y_i'(t)=f_i(t,$

收稿日期： 2015-06-29

基金项目： 国家自然科学基金资助项目(11272159)。

作者简介： 冯再勇，男，讲师，博士生，研究方向为应用数学。E-mail：77403497@qq.com。

通讯作者： 陈宁，男，教授，博士，博导，研究方向为分数阶理论及其在车辆工程中的应用。E-mail：chenning@njfu.com.cn。

$y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 和 $L_j(y_1, y_2, \cdots, y_n) = 0$ 满足相容性。

本文首先回顾求解微分方程的 Adomian 分解方法，然后探讨求解微分代数系统的 Adomian 分解方法，最后给出相关算例并得到结论。

1 解微分方程的 Adomian 分解方法

首先回顾求解系统微分方程部分，也就是方程(1)中 $y_i'(t) = f_i(t, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 的 Adomian 分解方法。对方程 $y_i'(t) = f_i(t, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 两边同时运用积分算子 $If(t) = \int_0^t f(t)\mathrm{d}t$，则有：

$$y_i(t) = y_i(0) + I[f_i(t, y_1, y_2, \cdots, y_n)] \quad (2)$$
$$i = 1, 2, 3, \cdots, l$$

由 Adomian 分解可知，解 $y_i(t)$ 可以表示为级数形式：

$$y_i(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} y_{im}(t) \quad (3)$$

$f_i(t, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 则可分解为一列 Adomian 多项式的和：

$$f_i(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) = \sum_{m=0}^{+\infty} A_{im} \quad (4)$$
$$i = 1, 2, 3, \cdots, l$$

A_{im} 依赖于 $(y_{10}, \cdots, y_{1m}; y_{20}, \cdots, y_{2m}; y_{n0}, \cdots, y_{nm})$。引入参数 λ，则 A_{im} 可按如下方式确定：

$$A_{im} = \frac{1}{m!}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\lambda^m} \times \left[f_i\left(t, \sum_{m=0}^{\infty} y_{1m}\lambda^m, \sum_{m=0}^{\infty} y_{2m}\lambda^m, \cdots, \sum_{m=0}^{\infty} y_{nm}\lambda^m\right)\right]_{\lambda=0} \quad (5)$$

式中 $y_j(t) = \sum_{m=0}^{\infty} y_{jm}\lambda^m$ 是 $y_j(t)$ 的级数形式($j = l+1, \cdots, n$)。

由式(2)、(3)、(4)得到：

$$y_i(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} y_{im}(t) = y_{i0}(t) + I\sum_{m=0}^{\infty} A_{im}$$
$$i = 1, 2, 3, \cdots, l$$

于是结合式(5)不难得到以下递推公式：

$$\begin{cases} y_{i0}(t) = c_i \\ A_{im} = \left[\dfrac{1}{m!}\dfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\lambda^m} f_i\left(t, \sum\limits_{m=0}^{\infty} y_{1m}\lambda^m, \sum\limits_{m=0}^{\infty} y_{2m}\lambda^m, \cdots, \sum\limits_{m=0}^{\infty} y_{nm}\lambda^m\right)\right]_{\lambda=0} \\ y_{i(m+1)}(t) = IA_{im} \end{cases} \quad (6)$$

式中，$m = 0, 1, 2, \cdots$；$i = 1, 2, \cdots, l$。

文献[11-13]证明了该方法的收敛性。

实际计算中，常常取 $y_i(t)$ 的前 K 项和作为近似解，即 $\widetilde{y_{iK}}(t) = \sum_{m=0}^{K-1} y_{im}(t)$。对其取极限，有：

$$\lim_{K\to\infty} \widetilde{y_{iK}}(t) = \lim_{K\to\infty}\sum_{m=0}^{K-1} y_{im}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} y_{im}(t) = y_i(t) \quad (7)$$

2 确定代数变量的方法

由于微分代数系统在微分方程 $y_i'(t) = f_i(t, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 的基础上增加了代数约束 $L_j(y_1, y_2, \cdots, y_n) = 0$，因此用 Adomian 方法求解微分代数系统的难点在于如何处理其代数约束部分 $L_j(y_1, y_2, \cdots, y_n) = 0$。一种直接的想法是联立代数约束方程组，解出 $y_j(t)(j = l+1, \cdots, n;\ m = 1, 2, \cdots)$，然后代入微分部分，从而将系统转化为仅含微分约束的纯微分系统，利用 Adomian 方法求解。这种方法有其可行之处，同时也存在不足。不足之处在于求解得到 $y_j(t)$，将其代入微分部分后，确定 Adomian 多项式的复杂度会增加。因为在 $f_i(t, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 中若 $y_j(t)(j = l+1, \cdots, n)$ 和 $y_i(t)(i = 1, \cdots, l)$ 是相互独立的变量，求导确定 Adomian 多项式相对简单。然而解出 $y_j(t) = \varphi_j(y_1, \cdots, y_l)$ 后，$f_i(t, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 变为以下形式的复合函数：

$$f_i(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) = f_i(t, y_1, \cdots, y_l, \varphi_1(y_1, \cdots, y_l), \varphi_2(y_1, \cdots, y_l), \cdots, \varphi_{n-l}(y_1, \cdots, y_l))$$

这样即使在线性代数约束的情况下，确定 Adomian 多项式时求复合函数的导数特别是求其高阶导数的过程会变得复杂得多，从而计算复杂度显著增加。

事实上，代数变量初值的确定相对容易。由于 $y_{i0}(t) = y_i(0)(i = 1, 2, \cdots, n)$ 满足代数约束 $L_j(y_1, y_2, \cdots, y_n) = 0$，于是不难由该式用初值 $y_i(0)(i = 1, \cdots, l)$ 算出 $y_j(0)(j = l+1, \cdots, n)$，直接令 $y_{j0}(t) = y_j(0)(j = l+1, \cdots, n)$。从而 A_{i0} 得以确定，利用递推公式(6)，进一步得到 $y_{i1}(t), i = 1, \cdots, l$。

由于代数约束部分没有微分算子，不能通过积分进行递推，故 $y_{jm}(t)(j = l+1, \cdots, n;\ m = 1, 2, \cdots)$ 的确定比较困难。为了既能利用代数约束得到 $y_{jm}(t)$，又不增加计算 Adomian 多项式的复杂度，至少在线性代数约束这一简单情况下能得到理想的解，自然想到能否将各个变量之间的代数约束关系转化为变量级数解中各相应分量之间的关系。不难证明，当代数约束为线性时，这种线性关系是可以保持的。即有如下定理。

定理 1 设微分代数系统(1)中各变量具有如下级数形式解：

$$y_k(t)=\sum_{m=0}^{+\infty}y_{km}(t)\quad k=1,2,\cdots,n$$

则变量 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 满足线性约束(8)的充分条件是:对任意 $m=0,1,2,\cdots$,都满足式(9)。

$$L_j(y_1,y_2,\cdots,y_n)=0\quad(j=l+1,l+2,\cdots,n)\tag{8}$$

$$L_j(y_{1m},y_{2m},\cdots,y_{nm})=0\quad(j=l+1,l+2,\cdots,n)\tag{9}$$

证明:约束 $L_j(y_1,y_2,\cdots,y_n)=0,j=l+1,\cdots,n$ 为线性,可以设为:

$$L_j(y_1,y_2,\cdots,y_n)=a_{j1}y_1+a_{j2}y_2+\cdots+a_{jn}y_n=0$$
$$j=l+1,l+2,\cdots,n\tag{10}$$

将 $y_k(t)=\sum_{m=0}^{+\infty}y_{km}(t),k=1,2,\cdots,n$ 代入式(10),对于任意 $j=l+1,l+2,\cdots,n$,有:

$$a_{j1}y_1+a_{j2}y_2+\cdots+a_{jn}y_n=0\Leftrightarrow$$
$$a_{j1}\sum_{m=0}^{+\infty}y_{1m}(t)+a_{j2}\sum_{m=0}^{+\infty}y_{2m}(t)+\cdots+a_{jn}\sum_{m=0}^{+\infty}y_{nm}(t)=0\tag{11}$$

上式中的级数都是收敛级数[11-13],设它们的收敛半径分别为 $R_1,\cdots,R_n$,记 $R=\min\{R_1,\cdots,R_n\}$,则当 $t\in(-R,R)$ 时,式(11)可整理为如下等价形式:

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{jk}y_{km}(t)=\sum_{m=0}^{+\infty}[a_{j1}y_{1m}(t)+a_{j2}y_{2m}(t)+\cdots+a_{jn}y_{nm}(t)]=\sum_{m=0}^{+\infty}L_j(y_{1m},y_{2m},\cdots,y_{nm})=0\tag{12}$$

于是,若对任意 $m=0,1,2,\cdots$ 都有 $L_j(y_{1m},y_{2m},\cdots,y_{nm})=0,j=l+1,\cdots,n$,则式(12)显然成立,由于式(10)、(11)、(12)等价,故式(10)也成立,从而 $L_j(y_1,y_2,\cdots,y_n)=0,j=l+1,l+2,\cdots,n$。

证毕。

由定理1可知,对任意 $m=0,1,2,\cdots,L_j(y_{1m},y_{2m},\cdots,y_{nm})=0,j=l+1,l+2,\cdots,n$ 可以保证各变量满足线性约束 $L_j(y_1,y_2,\cdots,y_n)=0,j=l+1,l+2,\cdots,n$。于是可以利用式(9)解出 $y_{jm}(t),j=l+1,\cdots,n$。据此得到 A_{im},进而完成式(6)的递推计算,最终得到整个系统的解。

3 举 例

下面通过几个具有线性代数约束的微分代数系统的例子说明上述方法的有效性和实用性。

例1 微分代数系统:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_1(t)}{\mathrm{d}t}=2y_2^2(t)\\ 2y_1(t)+y_2(t)=0\end{cases}\qquad y_1(0)=1$$

易知这个微分代数系统的精确解为:$y_1(t)=\dfrac{1}{1-8t},y_2(t)=\dfrac{-2}{1-8t}$。运用上述方法,由式(5)计算微分部分的 Adomian 多项式如下:

$$A_{10}=2y_{20}^2$$
$$A_{11}=4y_{20}y_{21}$$
$$A_{12}=2y_{21}^2+4y_{20}y_{22}$$
$$A_{13}=4y_{21}y_{22}+4y_{20}y_{23}$$

没有关于 $y_2(t)$ 的微分约束,故无须计算 A_{2m},$m=0,1,\cdots$。

由第2部分的分析过程结合式(6)、定理1可知:

$$y_{10}(t)=y_1(0)=1,\ y_{20}(t)=-2,$$
$$A_{10}=2y_{20}^2=8,\ y_{11}=\int_0^t A_{10}\mathrm{d}t=8t,y_{21}=-16t;$$
$$A_{11}=4y_{20}y_{21}=128t,$$
$$y_{12}=\int_0^t A_{11}\mathrm{d}t=64t^2,\ y_{22}=-128t^2,$$
$$A_{12}=2y_{21}^2+4y_{20}y_{22}=1536t^2,$$
$$y_{13}=\int_0^t A_{12}\mathrm{d}t=512t^3,\ y_{23}=-1024t^3;$$
$$A_{13}=4y_{21}y_{22}+4y_{20}y_{23}=16384t^3,$$
$$y_{14}=\int_0^t A_{13}\mathrm{d}t=4096t^4,\ y_{24}=-8192t^4.$$

于是,得到两个解的5级近似:

$$y_1(t)\doteq 1+8t+64t^2+512t^3+4096t^4=\sum_{n=0}^{4}8^nt^n$$
$$y_2(t)\doteq -2-16t-128t^2-1024t^3-8192t^4=\sum_{n=0}^{4}-2\times 8^nt^n$$

事实上,这两个5级近似正是精确解 $y_1(t)=\dfrac{1}{1-8t}$、$y_2(t)=\dfrac{-2}{1-8t}$ 的 Taylor 展开式的前五项。这说明上述方法求解微分代数系统是正确有效的。

此外,总结 $y_1(t)$、$y_2(t)$ 中各项的规律,可将求和项拓展为无穷,则得到系统的精确级数解:

$$\begin{cases}y_1(t)=\sum_{n=0}^{\infty}8^nt^n\\ y_2(t)=\sum_{n=0}^{\infty}-2\times 8^nt^n\end{cases}$$

例2 微分代数系统:

$$\begin{cases}y'_2(t)=ty_1(t)\\ y_1(t)+ky_2(t)=0\end{cases}\qquad y_2(0)=-\frac{1}{k}$$

系统 $y_{20}(t) = y_2(0) = -\frac{1}{k}$，$y_{10}(t) = y_1(0) = 1$，于是有：

$$A_{20} = ty_{10},\ A_{21} = ty_{11},\ A_{22} = ty_{12},\ A_{23} = ty_{13},$$

$$y_{21} = \int_0^t A_{20}\,\mathrm{d}t = \int_0^t t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2,\ y_{11} = -\frac{k}{2}t^2;$$

$$y_{22} = \int_0^t A_{21}\,\mathrm{d}t = -\frac{k}{2}\int_0^t t^3\,\mathrm{d}t = -\frac{k}{8}t^4,$$

$$y_{12} = \frac{k^2}{8}t^4;$$

$$y_{23} = \int_0^t A_{22}\,\mathrm{d}t = \frac{k^2}{8}\int_0^t t^5\,\mathrm{d}t = \frac{k^2}{48}t^6,$$

$$y_{13} = -\frac{k^3}{48}t^6;$$

$$y_{24} = \int_0^t A_{23}\,\mathrm{d}t = -\frac{k^3}{48}\int_0^t t^7\,\mathrm{d}t = -\frac{k^3}{384}t^8,$$

$$y_{14} = \frac{k^4}{384}t^8.$$

观察以上各个分量，不难得到解的规律：

$$y_{2m} = (-k)^{(m-1)}\frac{t^{2m}}{2^m m!}$$

$$y_{1m} = (-k)^m\frac{t^{2m}}{2^m m!}$$

$$m = 1,2,\cdots$$

由于规定 $0! = 1$，于是系统解可以写为如下包含 y_{10}、y_{20} 的级数形式：

$$\begin{cases} y_1(t) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} y_{1m} = \sum\limits_{m=0}^{\infty}(-k)^m\dfrac{t^{2m}}{2^m m!} \\ y_2(t) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} y_{2m} = \sum\limits_{m=0}^{\infty}(-k)^{(m-1)}\dfrac{t^{2m}}{2^m m!} \end{cases}$$

此解也不再是近似解，而是微分代数系统的精确级数解，正确性可直接由 $y_2(t)$ 求导验证。

4 结 语

针对微分代数系统(1)，本文提出了一种基于 Adomian 分解的求级数解方法。该方法的计算过程既避免了复合函数求高阶导数的复杂运算，又能有效利用系统的线性代数约束，确定解的各个分量，最终得到系统解。算例说明该方法方便有效，并且能够根据级数解的规律得到系统精确解的级数表示。另一方面，如何将这种方法进行适当推广，比如推广到代数约束为非线性，值得进行深入研究。

参考文献：

[1] Negrut D, Rampalli R, Ottarsson G, et al. On an implementation of the Hilber-Hughes-Taylor Method in the context of index 3 differential -algebraic equations of multibody dynamics[J]. Journal of Computational & Nonlinear Dynamics, 2006,2(1):73-85.

[2] Berger T, Trenn S. Kalman controllability decom-positions for differential-algebraic systems [J]. Systems & Control Letters, 2014,71(3):54-61.

[3] Lacoursiere C. Regularized, stabilized, variational methods for multibodies[C]//The 48th Scandinavian conference on simulation and modeling (SIMS 2007). Swedish: Linköping University Electronic Press, 2007: 30-31.

[4] 熊革，郑绿洲. 线性时变微分代数系统的稳定性[J]. 数学物理学报，2003,23(3):280-286.
Xiong Ge, Zheng Lüzhou. On the stability of linear time-change differential-algebraic system[J]. Acta Mathematiea Scientia, 2003,23(3):280-286.

[5] 张秀华，张庆灵. 微分代数系统的无源性[J]. 控制理论与应用，2005,22(5):834-836.
Zhang Xiuhua, Zhang Qingling. Passivity for differential-algebraic systems [J]. Control Theory & Applications, 2005,22(5):834-836.

[6] Brenan K E, Campbell S L, Petzold L R. Numerical solution of initial-value problems in differential algebraic equations[J]. American Mathematical Monthly, 1989,6: 519-533.

[7] Ascher U M, Petzold L R. Computer methods for ordinary differential equations and differential -algebraic equations[J]. Siam Review, 1998,2:400-401.

[8] Ayaz F. Applications of differential transform method to differential-algebraic equations[J]. Applied Mathematics & Computation, 2004,152(3):649-657.

[9] Adomian G, Rach R. Inversion of nonlinear stochastic operators[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1983,91(1):39-46.

[10] Adomian G. Nonlinear stochastic operator equations [M]. San Diego: Academic Press, 1986.

[11] Abdelrazec A, Pelinovsky D E. Convergence of the Adomian decomposition method for initial - value problems[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2011,27(4):749-766.

[12] Cherruault Y. Convergence of Adomian's method [J]. Kybernetes, 1989,18:31-38.

[13] Abbaoui K, Cherruault Y. Convergence of Adomian's method applied to differential equations[J]. Computers & Mathematics with Applications, 1994,28(5): 103-109.

（责任编辑　王卫勋，王绪迪）