DOI：10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2016.01.18

一类双时滞食饵-捕食者模型的 Hopf 分支

高杏杏，胡志兴，廖福成

（北京科技大学 数理学院，北京 100083）

摘要：研究了一类具有双时滞及比率依赖功能性反应函数的食饵-捕食者模型。运用稳定性理论，分析了唯一的正平衡点在不同时滞状况下的稳定性，探讨了 Hopf 分支的存在性，最后通过数值模拟验证了结论。

关键词：双时滞；食饵-捕食者模型；比率依赖；Hopf 分支

中图分类号：O175　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1006-4710(2016)01-0100-06

Hopf bifurcation in a predator-prey model with double time delays

GAO Xingxing, HU Zhixing, LIAO Fucheng

(School of Mathematics and Physics, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

Abstract: This study focuses on a predator-prey model with double time delays and ratio-dependent functional response. The stability theory is used to analyze the stability in the unique equilibrium in different time-delay conditions and explore the existence of the Hopf bifurcation. And the numerical simulation is conducted to justify the conclusions in the end.

Key words: double time delays; predator-prey model; ratio-dependent; Hopf bifurcation

食饵-捕食者模型是种群动力学中的重要分支，对其进行研究具有很大的实际意义。由于在自然界中，捕食关系受时滞的影响很大，因此，我们在相应的模型中也应充分考虑时滞的作用，如文献[1]～[2]。此外，近年来，越来越多的生物学研究表明，具有比率依赖的功能性反应函数往往更符合自然界中的实际情况。所谓比率依赖，即反应函数不仅与食饵的数量有关，还与捕食者的数量有关。在大多数情况下，尤其是捕食者必须寻找共享或竞争的食物时，更为合适的捕食率应是食饵与捕食者种群密度比值的函数，即依赖于比率的功能反应函数[3]，如文献[3]～[5]均采用了具有比率依赖的功能反应函数，关于比率依赖的进一步阐述可参见文献[6]。另外，文献[7]～[8]均在基本的 Leslie-Gower 模型基础上进行研究，认为捕食者的种群密度采取 logistic 形式增长，而最大环境容纳量与食饵的种群密度成比例。此外，本文也参考了文献[9]关于周期解的描述。

在文献[1]中，研究了一类无量纲化后的 Leslie-Gower 模型：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}=N(t-\tau)[1-N(t-\tau)]-\dfrac{N(t-\tau)P(t)}{N(t-\tau)+\alpha P(t)} \\ \dfrac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}=\beta P(t-\tau)\left[\delta-\dfrac{P(t-\tau)}{N(t-\tau)}\right] \end{cases} \tag{1}$$

式中，$N(t)$、$P(t)$ 分别表示 t 时刻食饵与捕食者的种群密度，α、β、δ 均为正常数，τ 为食饵与捕食者的时滞。

一方面，我们将功能反应函数变为具有 Holling-III 型比率依赖的反应函数；另一方面，考虑到 τ 的含义不同，即建立双时滞更为合理，因此，可建立如下模型：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=r_1u(t-\tau_1)\left[1-\dfrac{u(t-\tau_1)}{K}\right]-\dfrac{au^2(t-\tau_1)v(t)}{u^2(t-\tau_1)+bv^2(t)} \\ \dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=r_2v(t-\tau_2)\left[1-\dfrac{v(t-\tau_2)}{cu(t-\tau_2)}\right] \end{cases} \tag{2}$$

式中，$u(t)$、$v(t)$ 分别表示 t 时刻的食饵与捕食者的种群密度；r_1、r_2 分别为食饵与捕食者的内禀增长

收稿日期：2015-06-15

基金项目：国家自然科学基金资助项目(11471034,61174209)；北京科技大学冶金工程研究院基础研究基金资助项目(YJ2012－001)

作者简介：高杏杏，女，硕士生，研究方向为生物数学。E-mail：gxx1021@126.com

通讯作者：胡志兴，男，教授，博士，研究方向为生物数学。E-mail：huzhixing@ustb.edu.cn

率；K 为食饵生长的环境最大容纳量；c 为捕食者的环境最大容纳量与食饵种群密度的比例系数；a、b 均为功能性反应函数中的系数；τ_1、τ_2 分别表示食饵自身增长的负反馈时滞和捕食者的成熟时滞；r_1、r_2、a、b、c 均为正常数。

做以下变换，对式(2)进行无量纲化：

$$\bar{u}=\frac{u}{K},\ \bar{v}=v,\ \bar{t}=r_1 t,\ \overline{\tau_1}=r_1\tau_1,\ \overline{\tau_2}=r_1\tau_2,$$

$$h=\frac{b}{K^2},\ m=\frac{a}{Kr_1},\ q=cK,\ r=\frac{r_2}{r_1 cK}$$

为表述方便，依然以 u、v、t、τ_1、τ_2 分别来代替 $\bar{u}$、$\bar{v}$、$\bar{t}$、$\overline{\tau_1}$、$\overline{\tau_2}$，可得模型：

$$\begin{cases}\dfrac{du(t)}{dt}=u(t-\tau_1)[1-u(t-\tau_1)]-\dfrac{mu^2(t-\tau_1)v(t)}{u^2(t-\tau_1)+hv^2(t)}\\ \dfrac{dv(t)}{dt}=rv(t-\tau_2)\left[q-\dfrac{v(t-\tau_2)}{u(t-\tau_2)}\right]\end{cases}\tag{3}$$

式中，m、h、r、q 均为正常数。

1 正平衡点的稳定性及 Hopf 分支的存在性

考虑到模型的生态学意义，我们主要研究正平衡点 E^* 的稳定性状况。

容易计算，若满足式(4)：

$$mq<1+hq^2\tag{4}$$

则式(3)存在唯一的正平衡点 $E^*(u^*,v^*)$，其中 $u^*=1-\dfrac{mq}{1+hq^2}$，$v^*=qu^*$。

进一步计算，得到式(3)在 $E^*(u^*,v^*)$处的线性近似方程：

$$\begin{cases}\dfrac{du(t)}{dt}=A_1u(t-\tau_1)+A_2v(t)\\ \dfrac{dv(t)}{dt}=A_3u(t-\tau_2)+A_4v(t-\tau_2)\end{cases}\tag{5}$$

其中：

$$A_1=-1+\frac{2mq}{(1+hq^2)^2},\ A_2=\frac{m(hq^2-1)}{(1+hq^2)^2},$$

$$A_3=rq^2,\ A_4=-rq$$

则式(5)的特征方程为：

$$\lambda^2-(A_1e^{-\lambda\tau_1}+A_4e^{-\lambda\tau_2})\lambda+A_1A_4e^{-\lambda(\tau_1+\tau_2)}-A_2A_3e^{-\lambda\tau_2}=0\tag{6}$$

其中 λ 为特征值。

情形 1　当 $\tau_1=\tau_2=0$ 时，特征方程式(6)可化为：

$$\lambda^2-(A_1+A_4)\lambda+A_1A_4-A_2A_3=0$$

其中

$$A_1+A_4=-1-rq+\frac{2mq}{(1+hq^2)^2}$$

$$A_1A_4-A_2A_3=\frac{rq}{1+hq^2}(1+2hq^2+h^2q^4-mq-mhq^3)$$

因此，若满足式(4)及

$$-1-rq+\frac{2mq}{(1+hq^2)^2}<0\tag{7}$$

$$1+2hq^2+h^2q^4-mq-mhq^3>0\tag{8}$$

则 $A_1+A_4<0$ 且 $A_1A_4-A_2A_3>0$，即特征方程的两根均具有负实部，故模型在 E^* 渐近稳定。

情形 2　当 $\tau_1>0$，$\tau_2=0$ 时，特征方程式(6)可化为：

$$\lambda^2-A_1e^{-\lambda\tau_1}\lambda+A_1A_4e^{-\lambda\tau_1}=0\tag{9}$$

令 $\lambda=i\omega_1$ ($\omega_1>0$)是该方程的根，分离实部与虚部可得：

$$\begin{cases}A_1A_4\cos\omega_1\tau_1-A_1\omega_1\sin\omega_1\tau_1=\omega_1^2\\ A_1\omega_1\cos\omega_1\tau_1+A_1A_4\sin\omega_1\tau_1=0\end{cases}\tag{10}$$

两边分别平方后相加可得：

$$\omega_1^4-A_1^2\omega_1^2-A_1^2A_4^2=0$$

显然，该式有唯一正根 ω_{10}，并满足：

$$\omega_{10}^2=\frac{A_1^2+\sqrt{A_1^2+4A_1^2A_4^2}}{2}$$

化简式(10)可得：

$$\tau_{1k}=\frac{1}{\omega_{10}}\left\{\arctan\frac{-\omega_{10}}{A_4}+k\pi\right\},k=0,1,2,\cdots$$

取 $\tau_{1k}=\tau_{10}$，验证横截条件。令式(9)对 τ_1 求导，则：

$$2\lambda\frac{d\lambda}{d\tau_1}+e^{-\lambda\tau_1}\left(-A_1\frac{d\lambda}{d\tau_1}\right)+(A_1A_4-A_1\lambda)e^{-\lambda\tau_1}\left(-\frac{d\lambda}{d\tau_1}\tau_1-\lambda\right)=0$$

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau_1}\right)^{-1}=\frac{2\lambda-A_1e^{-\lambda\tau_1}}{\lambda(A_1A_4-A_1\lambda)e^{-\lambda\tau_1}}-\frac{\tau_1}{\lambda}$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau_1}\right)^{-1}\Bigg|_{\tau_1=\tau_{10}}=\mathrm{Re}\left[\frac{2\lambda-A_1e^{-\lambda\tau_1}}{\lambda(A_1A_4-A_1\lambda)e^{-\lambda\tau_1}}\right]\Bigg|_{\tau_1=\tau_{10}}=$$

$$\frac{A_1{}^2\omega_{10}^2+2A_1{}^2A_4{}^2}{A_1{}^2\omega_{10}^4+A_1{}^2A_4{}^2\omega_{10}^2}=\frac{\omega_{10}^2+2A_4{}^2}{\omega_{10}^4+A_4{}^2\omega_{10}^2}>0$$

定理 1　当 $\tau_1>0$，$\tau_2=0$ 并满足式(4)、式(7)、式(8)时，若 $\tau_1\in[0,\tau_{10})$，则模型在 E^* 处局部渐近稳定；若 $\tau_1>\tau_{10}$，则模型在 E^* 处不稳定。模型在 $\tau_1=\tau_{10}$处出现 Hopf 分支。

情形 3　当 $\tau_2>0$，$\tau_1=0$ 时，特征方程式(6)可化为：

$$\lambda^2-A_1\lambda+e^{-\lambda\tau_2}(A_1A_4-A_2A_3-A_4\lambda)=0\tag{11}$$

令 $\lambda=i\omega_2$ ($\omega_2>0$)是该方程的根，分离实部与虚部可得：

$$\begin{cases}(A_1A_4-A_2A_3)\cos\omega_2\tau_2-A_4\omega_2\sin\omega_2\tau_2=\omega_2^2\\ (A_1A_4-A_2A_3)\sin\omega_2\tau_2+A_4\omega_2\cos\omega_2\tau_2=-A_1\omega_2\end{cases}\tag{12}$$

两边分别平方后相加可得：

$$\omega_2^4+(A_1^2-A_4^2)\omega_2^2-(A_1A_4-A_2A_3)^2=0$$

显然,该式有唯一正根 ω_{20},并满足:

$$\omega_{20}^2=\frac{(A_1^2-A_4^2)+\sqrt{(A_1^2-A_4^2)^2+4(A_1A_4-A_2A_3)^2}}{2}$$

化简式(12)可得:

$$\tau_{2k}=\frac{1}{\omega_{20}}\left\{\arccos\frac{-A_2A_3\omega_{20}^2}{(A_1A_4-A_2A_3)^2+A_4^2\omega_{20}^2}+2k\pi\right\}$$
$$k=0,1,2,\cdots$$

取 $\tau_{2k}=\tau_{20}$。验证横截条件。令式(11)对 τ_2 求导,则:

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau_2}\right)^{-1}=\frac{2\lambda-A_1-A_4e^{-\lambda\tau_2}}{\lambda(A_1A_4-A_2A_3-A_4\lambda)e^{-\lambda\tau_2}}-\frac{\tau_2}{\lambda}$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau_2}\right)^{-1}\Bigg|_{\tau_2=\tau_{20}}=$$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{2\lambda-A_1-A_4e^{-\lambda\tau_2}}{\lambda(A_1A_4-A_2A_3-A_4\lambda)e^{-\lambda\tau_2}}\right]\Bigg|_{\tau_2=\tau_{20}}=$$

$$\frac{\omega_{20}^4+(A_1A_4-A_2A_3)^2}{A_4^2\omega_{20}^4+(A_1A_4-A_2A_3)^2\omega_{20}^2}>0$$

定理 2 当 $\tau_2>0,\tau_1=0$ 并满足式(4)、式(7)、式(8)时,若 $\tau_2\in[0,\tau_{20})$,则模型在 E^* 处局部渐近稳定;若 $\tau_2>\tau_{20}$,则模型在 E^* 处不稳定。模型在 $\tau_2=\tau_{20}$ 处出现 Hopf 分支。

情形 4 当 $\tau_1=\tau_2=\tau>0$ 时,特征方程式(6)可化为:

$$\lambda^2-e^{-\lambda\tau}[\lambda(A_1+A_4)+A_2A_3]+A_1A_4e^{-2\lambda\tau}=0$$

两边同时乘以 $e^{\lambda\tau}$,即:

$$\lambda^2e^{\lambda\tau}-(A_1+A_4)\lambda-A_2A_3+A_1A_4e^{-\lambda\tau}=0 \quad (13)$$

令 $\lambda=i\omega(\omega>0)$是该方程的根,分离实部与虚部可得:

$$\begin{cases}(A_1A_4-\omega^2)\cos\omega\tau=A_2A_3\\(A_1A_4+\omega^2)\sin\omega\tau=-(A_1+A_4)\omega\end{cases} \quad (14)$$

两边分别平方后相加可得:

$$\omega^8+a'\omega^6+b'\omega^4+c'\omega^2+d'=0 \quad (15)$$

其中:

$$a'=-(A_1+A_4)^2,\ b'=2(A_1+A_4)^2A_1A_4-2A_1^2A_4^2-A_2^2A_3^2,$$
$$c'=-[2A_1A_2^2A_3^2A_4+(A_1+A_4)^2A_1^2A_4^2],$$
$$d'=A_1^2A_4^2(A_1^2A_4^2-A_2^2A_3^2)$$

为方便计算,令 $u=\omega^2$,则式(15)可进一步化简为:

$$u^4+a'u^3+b'u^2+c'u+d'=0 \quad (16)$$

若满足:

$$mq(1+hq^2)<1+2hq^2+h^2q^4<mq(3-hq^2) \quad (17)$$

则 $A_1A_4+A_2A_3<0,A_1A_4-A_2A_3>0$,得到 $d'<0$,故式(16)显然至少有一个正根,为不失一般性,不妨设式(16)有 4 个正根 $u_i(i=1、2、3、4)$,$\omega_i=\sqrt{u_i}$。则:

$$\tau_i^{(k)}=\frac{1}{\omega_i}\left\{\arccos\frac{A_2A_3}{A_1A_4-\omega_i^2}+2k\pi\right\},k=0,1,2,\cdots$$

令 $\min\tau_i^{(0)}=\tau_i^0=\tau_0$,相应的 $\omega_{i0}=\omega_0$,$i=1、2、3、4$。

下面来验证横截条件。对式(13)两边关于 τ 求导,得:

$$2\lambda\frac{d\lambda}{d\tau}e^{\lambda\tau}+\lambda^2e^{\lambda\tau}(\frac{d\lambda}{d\tau}\tau+\lambda)-(A_1+A_4)\frac{d\lambda}{d\tau}+$$
$$A_1A_4e^{-\lambda\tau}(-\frac{d\lambda}{d\tau}\tau-\lambda)=0$$

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}=\frac{2\lambda e^{\lambda\tau}-(A_1+A_4)}{\lambda(A_1A_4e^{-\lambda\tau}-\lambda^2e^{\lambda\tau})}-\frac{\tau}{\lambda}$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\Bigg|_{\tau=\tau_0}=$$

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{2\lambda e^{\lambda\tau}-(A_1+A_4)}{\lambda(A_1A_4e^{-\lambda\tau}-\lambda^2e^{\lambda\tau})}\right\}\Bigg|_{\tau=\tau_0}=$$

$$\frac{-wn+2f\omega_0\cos\omega_0\tau_0}{w^2+f^2}$$

其中:

$$w=\omega_0(A_1A_4-\omega_0^2)\sin\omega_0\tau_0$$
$$f=\omega_0(A_1A_4+\omega_0^2)\cos\omega_0\tau_0$$
$$n=A_1+A_4-2\omega_0\sin\omega_0\tau_0$$

因此,若满足式(18):

$$-wn+2f\omega_0\cos\omega_0\tau_0\neq0 \quad (18)$$

则有 $\mathrm{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\Big|_{\tau=\tau_0}\neq0$。

定理 3 当 $\tau_1=\tau_2=\tau\neq0$ 并满足式(4)、式(7)、式(8)、式(17)、式(18)时,若 $\tau\in[0,\tau_0)$,则模型在 E^* 处局部渐近稳定;若 $\tau>\tau_0$,则模型在 E^* 处不稳定。模型在 $\tau=\tau_0$ 处出现 Hopf 分支。

情形 5 当 $\tau_1>0,\tau_2>0,\tau_1\neq\tau_2$ 时,考虑 τ_1 在稳定的区间,τ_2 为参数。为不失一般性,在情形 2 中考虑式(3)。特征方程式(6)可化为:

$$\lambda^2-A_1\lambda e^{-\lambda\tau_1}-e^{-\lambda\tau_2}(A_4\lambda+A_2A_3)+$$
$$A_1A_4e^{-\lambda(\tau_1+\tau_2)}=0 \quad (19)$$

令 $\lambda=i\omega_2(\omega_2>0)$是该方程的根,分离实部与虚部可得:

$$\begin{cases}-g\sin\omega_2\tau_2+H\cos\omega_2\tau_2=\omega_2^2+A_1\omega_2\sin\omega_2\tau_1\\g\cos\omega_2\tau_2+H\sin\omega_2\tau_2=A_1\omega_2\cos\omega_2\tau_1\end{cases} \quad (20)$$

其中:

$$g=A_4\omega_2+A_1A_4\sin\omega_2\tau_1,H=A_2A_3-A_1A_4\cos\omega_2\tau_1$$

两边分别平方后相加可得:

$$f_1(\omega_2)+2f_2(\omega_2)\sin\omega_2\tau_1+$$
$$2A_1A_2A_3A_4\cos\omega_2\tau_1=0 \quad (21)$$

其中:

$$f_1(\omega_2)=\omega_2^4+(A_1^2-A_4^2)\omega_2^2-(A_1^2A_4^2+A_2^2A_3^2)$$

$$f_2(\omega_2)=A_1\omega_2^3-A_1A_4^2\omega_2$$

令：

$$G(\omega_2)=f_1(\omega_2)+2f_2(\omega_2)\sin\omega_2\tau_1+2A_1A_2A_3A_4\cos\omega_2\tau_1$$

显然，若满足式(22)：

$$2A_1A_2A_3A_4-(A_1^2A_4^2+A_2^2A_3^2)<0 \tag{22}$$

则 $G(0)<0$，$\lim\limits_{\omega_2\to+\infty}G(\omega_2)\to+\infty$，即式(21)至少有有限正根 $\omega_{21},\omega_{22},\cdots,\omega_{2j}$。对每一固定的 $\omega_{2i}(i=1,2,\cdots,j)$，由式(20)可求出相应的 $\tau_{2i}^{(k)}$（见式(23)）。

令 $\tau^*=\min\{\tau_{2i}^{(k)}\}$，相应的 $\omega_{2i}=\omega^*$。

验证横截条件。令式(19)对 τ_2 求导，可得式(24)。

$$\tau_{2i}^{(k)}=\frac{1}{\omega_{2i}}\left\{\arccos\frac{(\omega_{2i}^2+A_1\omega_{2i}\sin\omega_{2i}\tau_1)H+(A_1\omega_{2i}\cos\omega_{2i}\tau_1)g}{g^2+H^2}+2k\pi\right\},k=0,1,2,\cdots \tag{23}$$

$$2\lambda\frac{d\lambda}{d\tau_2}-A_1\left(\frac{d\lambda}{d\tau_2}e^{-\lambda\tau_1}-\lambda\tau_1\frac{d\lambda}{d\tau_2}e^{-\lambda\tau_1}\right)-\left[A_4\frac{d\lambda}{d\tau_2}e^{-\lambda\tau_2}-(A_4\lambda+A_2A_3)e^{-\lambda\tau_2}\left(\frac{d\lambda}{d\tau_2}\tau_2+\lambda\right)\right]+A_1A_4e^{-\lambda(\tau_1+\tau_2)}\left[-\frac{d\lambda}{d\tau_2}(\tau_1+\tau_2)-\lambda\right]=0 \tag{24}$$

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau_2}\right)^{-1}=\frac{2\lambda-A_1e^{-\lambda\tau_1}-A_4e^{-\lambda\tau_2}+\tau_1[A_1\lambda e^{-\lambda\tau_1}-A_1A_4e^{-\lambda(\tau_1+\tau_2)}]}{\lambda[A_1A_4e^{-\lambda(\tau_1+\tau_2)}-e^{-\lambda\tau_2}(A_4\lambda+A_2A_3)]}-\frac{\tau_2}{\lambda} \tag{25}$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau_2}\right)^{-1}\Bigg|_{\tau_2=\tau^*}=\mathrm{Re}\left\{\frac{2\lambda-A_1e^{-\lambda\tau_1}-A_4e^{-\lambda\tau_2}+\tau_1[A_1\lambda e^{-\lambda\tau_1}-A_1A_4e^{-\lambda(\tau_1+\tau_2)}]}{\lambda[A_1A_4e^{-\lambda(\tau_1+\tau_2)}-e^{-\lambda\tau_2}(A_4\lambda+A_2A_3)]}\right\}\Bigg|_{\tau_2=\tau^*}=\frac{Px+Qy}{\omega^*(x^2+y^2)} \tag{26}$$

其中：

$$x=A_1A_4\sin\omega^*(\tau_1+\tau^*)+A_4\omega^*\cos\omega^*\tau^*-A_2A_3\sin\omega^*\tau^*$$

$$y=A_1A_4\cos\omega^*(\tau_1+\tau^*)-A_2A_3\cos\omega^*\tau^*-A_4\omega^*\sin\omega^*\tau^*$$

$$P=A_1\tau_1[\omega^*\sin\omega^*\tau_1-A_4\cos\omega^*(\tau_1+\tau^*)]-A_1\cos\omega^*\tau_1-A_4\cos\omega^*\tau^*$$

$$Q=A_1\tau_1[\omega^*\cos\omega^*\tau_1+A_4\sin\omega^*(\tau_1+\tau^*)]+2\omega^*+A_1\sin\omega^*\tau_1+A_4\sin\omega^*\tau^*$$

因此，若满足式(27)：

$$Px+Qy\neq0 \tag{27}$$

则

$$\mathrm{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau_2}\right)^{-1}\Bigg|_{\tau_2=\tau^*}\neq0$$

定理 4　当 $\tau_1>0,\tau_2>0,\tau_1\neq\tau_2$ 并满足条件式(4)、式(7)、式(8)、式(22)、式(27)时，固定 $\tau_1\in[0,\tau_{10})$，若 $\tau_2\in[0,\tau^*)$，则模型在 E^* 处局部渐近稳定；若 $\tau_2>\tau^*$，则模型在 E^* 处不稳定。模型在 $\tau_2=\tau^*$ 处出现 Hopf 分支。

2　数值模拟

在本节，利用 MATLAB 对以上各种不同的时滞情况进行了数值模拟，并验证了相应定理。

情形 2　$\tau_1>0,\tau_2=0$。取 $m=1,q=1,h=3,r=0.3$。满足定理 1 的条件，计算可得临界值 $\tau_{10}=1.3644$。图 1 和图 2 分别为 $\tau_1<\tau_{10}$ 和 $\tau_1>\tau_{10}$ 时，解的相图。

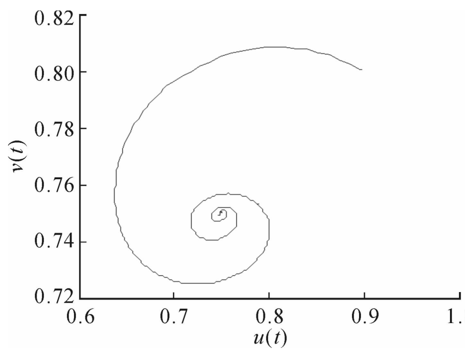

图 1　$\tau_1=1.3<\tau_{10}$ 时模型在 E^* 处稳定

Fig. 1　E^* is stable when $\tau_1=1.3<\tau_{10}$

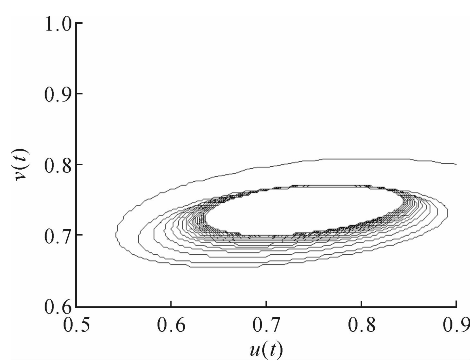

图 2　$\tau_1=1.9>\tau_{10}$ 时模型在 E^* 处经历 Hopf 分支

Fig. 2　E^* undergoes Hopf bifurcation when $\tau_1=1.9>\tau_{10}$

情形 3　$\tau_2>0,\tau_1=0$。取 $m=1,q=1,h=3,r=0.3$。满足定理 2 的条件，计算可得临界值 $\tau_{20}=6.1930$。图 3 和图 4 分别为 $\tau_2<\tau_{20}$ 和 $\tau_2>\tau_{20}$ 时解的相图。

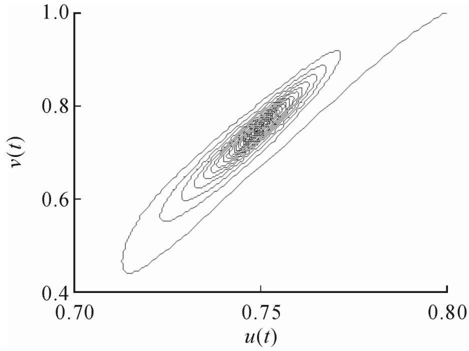

图3 $\tau_2=6.0<\tau_{20}$ 时模型在 E^* 处稳定

Fig. 3 E^* is stable when $\tau_2=6.0<\tau_{20}$

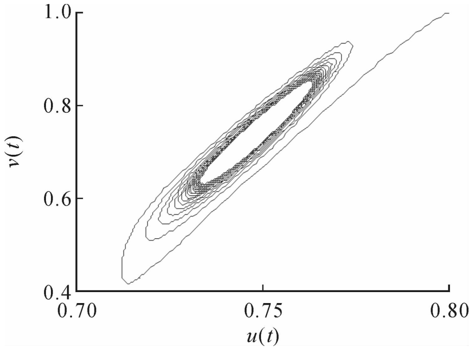

图4 $\tau_1=6.3>\tau_{20}$ 时模型在 E^* 处经历 Hopf 分支

Fig. 4 E^* undergoes Hopf bifurcation when $\tau_1=6.3>\tau_{20}$

情形4 $\tau_1=\tau_2=\tau>0$。取 $m=0.5$，$q=1$，$h=0.05$，$r=0.1$。满足定理3的条件,计算可得临界值 $\tau_0=2.7801$。图5和图6分别为 $\tau<\tau_0$ 和 $\tau>\tau_0$ 时解的相图。

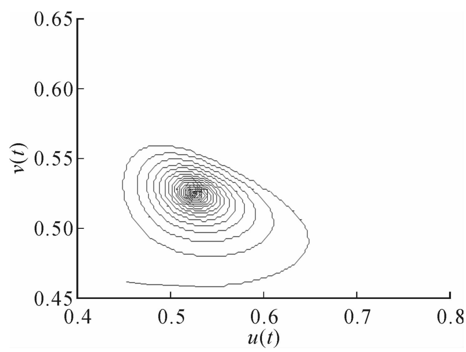

图5 $\tau=2.7<\tau_0$ 时模型在 E^* 处稳定

Fig. 5 E^* is stable when $\tau=2.7<\tau_0$,

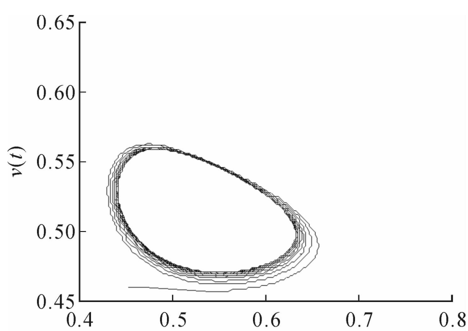

图6 $\tau=2.9>\tau_0$ 时模型在 E^* 处经历 Hopf 分支

Fig. 6 E^* undergoes Hopf bifurcation when $\tau=2.9>\tau_0$

情形5 当 $\tau_1>0,\tau_2>0,\tau_1\neq\tau_2$。取 $m=1$，$q=1$，$h=3$，$r=0.3$，$\tau_1=0.5\in[0,\tau_{10})$。满足定理4的条件,计算可得临界值 $\tau^*=5.9811$。图7和图8分别为 $\tau<\tau^*$ 和 $\tau>\tau^*$ 时解的相图。

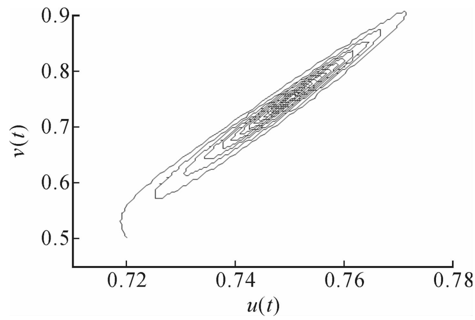

图7 $\tau=5.9<\tau^*$ 时模型在 E^* 处稳定

Fig. 7 E^* is stable when $\tau=5.9<\tau^*$

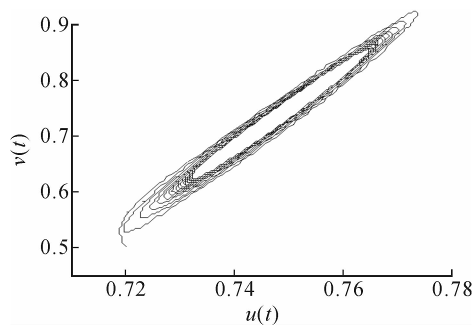

图8 $\tau=6.3>\tau^*$ 时模型在 E^* 处经历 Hopf 分支

Fig. 8 E^* undergoes Hopf bifurcation when $\tau=6.3>\tau^*$

3 结 论

本文研究了一类具有双时滞的食饵-捕食者模型。与原有的单时滞模型相比,它区分食饵与捕食者的成熟时滞,即建立双时滞,这显然更合理;此外,本文采用了比率依赖型功能反应函数,即反应函数不仅与食饵的数量有关,也与捕食者的数量有关,这更符合自然界的实际情况。通过以上分析,首先得到了模型存在的唯一正平衡点;其次讨论了它在不同时滞情况下的稳定性状况,得到了其产生 Hopf 分支的条件;最后进行了数值模拟,验证了文中的各个定理。研究表明:时滞的变化对于种群的生长具有很大影响,一旦超越临界时滞,模型就会经历 Hopf 分支,产生周期解。文章最终将有助于我们更好地理解自然界中的捕食关系,研究种群的实际生长情况。

参考文献:

[1] CANAN Ç. Stability and Hopf bifurcation in a delayed ratio dependent Holling-Tanner type model[J]. Applied

Mathematics and Computation, 2015, 255: 228-237.

[2] ZHANG Zizhen, YANG Huizhong, FU Ming. Hopf bifurcation in a predator-prey system with Holling type III functional response and time delays[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2014, 44(1): 337-356.

[3] 唐秋林，吴美云. 基于比率依赖的 Leslie 捕食扩散模型的 Turing 不稳定性[J]. 安徽大学学报(自然科学版), 2010, 34(5): 5-10.

TANG Qiulin, WU Meiyun. Turing instability in a ratio-dependent Leslie predator-prey model with diffusion [J]. Journal of Anhui University (Natural Sciences), 2010, 34(5): 5-10.

[4] PALLAV J P, PRASHANTA K M, KAUSHIK K L. A delayed ratio-dependent predator-prey model of interacting populations with Holling type III functional response[J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 76(1): 201-220.

[5] 郑宗剑. 双时滞比率依赖 Holling-Ⅳ和 Leslie 型捕食-食饵系统的 Hopf 分支[J]. 北华大学学报, 2015, 16(1): 9-16.

ZHENG Zongjian. Hopf bifurcation of ratio-dependent Holling IV and Leslie type predator-prey system with two delays[J]. Journal of Beihua University, 2015, 16 (1): 9-16.

[6] ABRAMS P A, GINZBURG L R. The nature of predation: prey dependent, ratio dependent or neither[J]. Trends in Ecology & Evolution, 2000, 15(8): 337-341.

[7] YANG Wensheng. Global asymptotical stability and persistent property for a diffusive predator-prey system with modified Leslie-Gower functional response [J]. Nonlinear Analysis, 2013, 14(3): 1323-1330.

[8] SHARMA S, SAMANTA G P. A Leslie-Gower predator-prey model with disease in prey incorporating a prey refuge[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2015, 70: 69-84.

[9] 刘凯丽，窦家维. 一类脉冲 L-V 系统的周期解和全局渐近性质[J]. 西安理工大学学报, 2012, 28(2): 235-239.

LIU Kaili, DOU Jiawei. The periodic solutions and globally asymptotic properties of L-V system with impulsive effects[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2012,28(2): 235-239.

（责任编辑　周　蓓）

（上接第 99 页）

[5] 刘永胜，成来飞，张立同，等. 熔炼铀和铀合金用涂层研究进展[J]. 稀有金属材料与工程, 2005, 34(11): 10-13.

LIU Yongsheng, CHENG Laifei, ZHANG Litong, et al. Progress on coating for metal uranium and its alloys melting [J]. Rare metal Materials and engineering, 2005, 34(11): 10-13.

[6] DELACOURT C, WURM C, LAFFONT L, et al. Electrochemical and electrical properties of Nb-and/or C-containing $LiFePO_4$ composites[J]. Solid State Ionics, 2006, 177(3/4): 333-341.

[7] AURBACH D, GAMOLSKY K, MARKOVSKY B, et al. The study of surface phenomena related to electrochemical lithium intercalation into Li_xMO_y host materials (M=Ni, Mn)[J]. Journal of the Electrochemical Society, 2000, 147(4): 1322-1331.

[8] HONG S A, KIM S J, LEE B G, et al. Carbon coating on lithium iron phosphate ($LiFePO_4$): comparison between continuous supercritical hydrothermal method and solid-state method[J]. Chemical Engineering Journal, 2012, 198-199: 318-326.

[9] KIM J K, CHOI J W, CHAUHAN G S, et al. Enhancement of electrochemical performance of lithium iron phosphate by controlled sol-gel synthesis [J]. Electrochimica Acta, 2008, 53(28):8258-8264.

[10] 曹小卫，张俊喜，颜立成，等. 用不同碳源对 $LiFePO_4$ 的碳包覆改性[J]. 材料研究学报, 2009, 23(4): 369-374.

CAO Xiaowei, ZHANG Junxi, YAN Licheng, et al. On the modification of carbon-coated $LiFePO_4$ materials by different carbon sources[J]. Chinese Journal of Materials Research, 2009, 23(4): 369-374.

[11] LIU H, CAO Q, FU L J, et al. Doping effects of zinc on $LiFePO_4$ cathode material for lithium ion batteries [J]. Electrochemistry Communications, 2006, 8(10): 1553-1557.

[12] 杨蓉，邓坤发，王黎晴，等. 水热法合成掺杂氮多孔碳及其超级电容特性[J]. 西安理工大学学报, 2015, 31 (2): 132-137.

YANG Rong, DENG Kunfa, WANG Liqing, et al. Hydrothermal synthesis and supercapacitive properties of nitrogen-doped porous carbon[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2015, 31(2): 132-137.

[13] 戎葆华. 以 Fe_2O_3 为原料通过碳热还原制备 $LiFePO_4$/C 正极材料的研究[D]. 南京：南京大学, 2013.

RONG Baohua. Synthesis of $LiFePO_4$/C cathode materials by carbothermal method using Fe_2O_3 as raw material[D]. Nanjing: Nanjing University, 2013.

（责任编辑　周　蓓）