

DOI: 10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2016.01.020

# 双局部行波斑图的形成与时空结构

齐 昕<sup>1</sup>, 宁利中<sup>2</sup>, 余 荔<sup>3</sup>, 刘嘉夫<sup>1</sup>(1. 重庆水利电力职业技术学院, 重庆 402160; 2. 西安理工大学 水利水电学院, 陕西 西安 710048;  
3. 广西电力工业勘察设计研究院, 广西 南宁 530023)

**摘要:** 在大长高比  $\Gamma=30$ , 弱分离比  $\psi=-0.20$  参数下, 通过二维流体力学基本方程组模拟了混合流体 Rayleigh-Benard 对流运动。通过变化相对瑞利数  $r$ , 在对流分叉曲线鞍结点处得到了双局部行波, 分析了双局部行波斑图的形成过程及时空结构, 讨论了其动力学特性。

**关键词:** 混合流体; Rayleigh-Benard 对流; 行波; 双局部行波; 时空结构

**中图分类号:** O357      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1006-4710(2016)01-0110-05

## The formation and spatio-temporal structure of doubly localized traveling wave pattern

QI Xin<sup>1</sup>, NING Lizhong<sup>2</sup>, YU Li<sup>3</sup>, LIU Jiafu<sup>1</sup>(1. Chongqing Water Resource and Electric Engineering College, Chongqing 402160, China;  
2. School of Water Resources and Hydroelectric Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China;  
3. Guangxi Electric Power Industry Investigation Design and Research Institute, Nanning 530023, China)

**Abstract:** Under the parameters of a large aspect ratio ( $\Gamma=30$ ), and a weak separation ratio  $\psi=-0.20$ , the hybrid fluid Rayleigh-Benard convection motion is simulated through the two-dimensional fluid mechanics basic equation system or group. The doubly localized traveling wave in the convection bifurcation saddle node is obtained through the variation in relative Rayleigh number  $r$ . The formation process of doubly localized traveling wave spot diagram and spatio-temporal structure are analyzed, whose dynamic behaviors are discussed in this paper.

**Key words:** hybrid fluid; Rayleigh-Benard convection; traveling wave; doubly localized traveling wave; spatio-temporal structure

自上世纪初以来,许多科学工作者把 Rayleigh-Benard 对流模型作为研究非线性热对流运动的典型模型之一。该模型是指在一个封闭的腔体内保持上部表面温度为常数,下表面受热,由上下不同的温度差,即可引发腔体内不同的对流运动<sup>[1]</sup>。

科学工作者们分别针对纯流体、混合流体进行了大量的实验和数值计算研究。通过试验发现,加热腔体底板,当相对瑞利数(反映上下温差的无量纲参数) $r$  达到某值时,液体由传导状态转变为对流运动状态。若分离比(表征流体非线性特性) $\psi>0$ ,对流系统出现定常对流运动,现象与纯流体( $\psi=0$ )对流时相同,对流振幅随  $r$  增大而增大,但其对流发生临界值  $r_1$  小于纯流体时的临界值  $r_0$ ,如图 1 所示。

若  $\psi<0$ ,系统将出现一种亚分叉,如图 1 中虚线段,对流呈现出多种形式。1986 年, Moses, Hein-

richs 等人在大长高比腔体,  $\psi \in (-0.15, -0.06)$  范围内,首次发现了局部行波对流斑图<sup>[2-3]</sup>,即对流集中在腔体的一侧局部区域,而其它区域无对流存在。

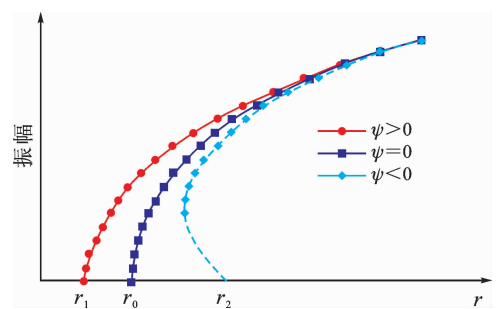


图 1 Rayleigh-Benard 对流分叉曲线图  
Fig. 1 Rayleigh-Benard convective bifurcation curve diagram

1993 年, Harada 等人通过矩形窄槽 ( $\Gamma=46$ ),

收稿日期: 2015-01-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10872164); 陕西省重点学科建设专项资金资助项目

作者简介: 齐昕, 女, 讲师, 研究方向为水力学、对流动力学。E-mail: qxiou@163.com

$\phi = -0.47$ 时,在对流分叉曲线鞍结点(图1中虚实线连接点)附近观察到了与以上局部行波不同的另一种行波,其对流集中在腔体的两侧局部区域,中间区域为传导状态,即双局部行波<sup>[4]</sup>。Kolodner 通过实验发现了局部行波与  $r$  的关系<sup>[5]</sup>。

在数值计算方面,一直以来,许多科研人员利用流体力学的基本方程组及流体力学的扰动方程组模拟出了多种在实验中观察到的对流斑图,并进行了理论分析<sup>[6-14]</sup>。文献[8,10,13-14]利用高精度差分格式再现了行波对流的某些现象。近来,对于局部对流的研究也获得了进展<sup>[15-20]</sup>。可是,这些理论探讨中发现双局部行波的较少,因此,本文将通过数值模拟,研究长高比  $\Gamma = 30$ ,分离比  $\phi = -2.0$  下,对流系统中双局部行波的形成过程及其特性。

## 1 物理数学模型

本次数值计算所用的模型为一个四周封闭的矩形腔体,腔体上部温度为定值,底部受热。当上下温差达到某个数值时,腔体内部将产生对流运动,对流斑图随温差变化而变化。用二维流体力学基本方程组来描述该运动<sup>[1]</sup>。

由布辛涅斯克(Boussinesq)近似假设,质量密度状态方程为<sup>[1,11]</sup>:

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0) - \beta(C - C_0)] \quad (1)$$

如果长度用流体层厚度  $d$ ,速度用  $\kappa/d$  ( $\kappa$  表示热扩散系数),时间用  $d^2/\kappa$  进行无因次化,则无因次流体力学基本方程组可表示为:

$$\nabla \cdot \mathbf{U}^* = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{U}^* \cdot \nabla) \mathbf{U}^* = Pr \nabla^2 \mathbf{U}^* - \nabla \left( \frac{p}{\rho_0} \right)^* + Ra Pr [T^* + C^*] e_z \quad (3)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + (\mathbf{U}^* \cdot \nabla) T^* = \nabla^2 T^* \quad (4)$$

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial t^*} = -(\mathbf{U}^* \cdot \nabla) \zeta^* + Le \nabla^2 \zeta^* - \phi \nabla^2 T^* \quad (5)$$

方程中,上标\*表示无因次化后的变量,其中,  $\mathbf{U}^*(u, 0, \omega)$  表示速度矢量场,  $\mathbf{U}^* = \frac{U - U_0}{\kappa/d}$ , 下标 0 表示传导状态下沿腔体高度相应物理量的平均值,一般指腔体高度二分之一处的数值;  $T$  表示温度场,  $T^* = \frac{T - T_0}{\Delta T}$ ;  $C$  表示浓度场,  $C^* = \frac{\beta(C - C_0)}{\alpha \Delta T}$ ;  $t^* = \frac{t}{d^2/\kappa}$ ,  $t$  是时间;普朗特数  $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$ ,  $\nu$  是运动粘性系数;  $p$  是压力,  $\left( \frac{p}{\rho_0} \right)^* = \frac{p d^2}{\rho_0 \kappa^2}$ ; 瑞利数  $Ra = \frac{\alpha g d^3}{\kappa \nu} \Delta T$ ,

$\alpha$  是热引起的体积膨胀系数,  $\Delta T$  为上下壁面的温度差; 路易斯数  $Le = \frac{D}{\kappa}$ ,  $D$  是浓度扩散系数; 浓度通量  $\zeta^* = C^* - \phi T^*$ ; 分离比  $\phi = -\frac{\beta \kappa_T}{\alpha T_0} = -\frac{\beta \gamma_2}{\alpha D} = -\frac{\beta}{\alpha} S_T C_0 (1 - C_0)$ ,  $\beta$  是浓度变化引起的体积膨胀系数,  $\kappa_T$  是与 Soret 效应有关的系数。

边界条件:速度在壁面上为 0,浓度通量在壁面上是不可穿透的。当  $x=0, x=\Gamma$  时,  $u = w = \frac{\partial \zeta^*}{\partial x} = 0$ ; 当  $z=0, z=1$  时,  $u = w = \frac{\partial \zeta^*}{\partial z} = 0$ 。

$u, w$  分别表示腔体中的水平流速和垂向流速。

由于温度在  $z=0$  和  $z=1$  处是等温的,温度在  $x=0$  和  $x=\Gamma$  处是绝热的,故:

当  $z=0$  时,  $T^* = 0.5$ ; 当  $z=1$  时,  $T^* = -0.5$ ;

当  $x=0, x=\Gamma$  时,  $\frac{\partial T^*}{\partial x} = 0$ 。

为了讨论方便,下面去掉变量中上标\*。

本次数值计算采用有限容积法对控制方程进行离散,方程中的对流项和扩散项采用乘方格式,具有二阶精度。计算中采用均匀交错网格系统。网格采用均匀网格,  $\Delta x = \Delta z = 1/20$  或者  $\Delta x = \Delta z = 1/30$ 。速度-压力耦合方程的求解采用 Simple 算法,采用 TDMA 法求解离散方程,时间步长为  $\Delta t = 0.001$ 。文献[21]验证了本文使用的计算软件的正确性与数值格式的合理性。当  $\phi = -0.40, Pr = 13.8, Le = 0.01, r = 1.95$  时,在上面两种不同密度的网格下控制物理量的数值模拟获得了一致的结果,从而验证了网格的疏密程度与数值模拟结果的无关性<sup>[12]</sup>。本文计算中采用  $\Delta x = \Delta z = 1/20$ 。计算中采用的流体参数为:  $Pr = 13.8, Le = 0.01, \phi = -0.20, \Gamma = 30$ 。

## 2 模拟结果及讨论

### 2.1 双局部行波的形成

在给定参数  $\Gamma = 30, \phi = -0.20$  时,首先对对流分叉曲线鞍结点进行了计算分析。通过变化  $r$  进行计算,在  $r$  较小时,始终未发现稳定的行波,直到逐渐增大  $r$  至 1.30 时,发现了不同于以往在对流分叉曲线鞍结点处出现的局部行波,而是在腔体内两侧区域存在对流运动,中间区域无对流,即双局部行波。

为了分析行波的形成过程,通常采用三个不同的特性参数来描述。

1) 垂向流速的最大值  $w_{\max}$ , 表示对流运动振幅

的大小,即行波波峰至波谷的高度的二分之一,用来特征腔体对流的速度场。

2) 努塞尔(Nusselt)数,反映对流传热强弱的无量纲数,表示通过流体层的全部垂向热通量。

Nusselt 数被定义为:

$$N = \frac{\int_0^r \frac{\partial T}{\partial Z} dx}{\Gamma \frac{\partial T_{\text{cond}}}{\partial Z}}$$

式中,  $\frac{\partial T_{\text{cond}}}{\partial Z}$  是一个常数,通常用  $N-1$  来特征温度场。

3) 混合参数  $M$ ,经常用来特征腔体中对流运动的浓度场。该参数经传导状态的数值约化后可由下式来描述,即  $M = \sqrt{\langle C^2 \rangle / C_{\text{cond}}^2}$ ,其中  $C$  表示对流的浓度场,  $C_{\text{cond}}$  表示传导状态下的浓度场,  $\langle \rangle$  表示物理量侧向平均值,  $\bar{\phantom{x}}$  表示物理量的垂直平均值。因此,可以通过研究  $w_{\text{max}}$ 、 $N-1$ 、 $M$  的变化来研究行波的形成过程。

$r=1.30$  时,随着时间  $t$  的增长矩形腔体内的最大垂直流速  $w_{\text{max}}$ 、Nusselt 数  $N-1$  和混合参数  $M$  等随着时间发生了一系列的变化,如图 2 所示。

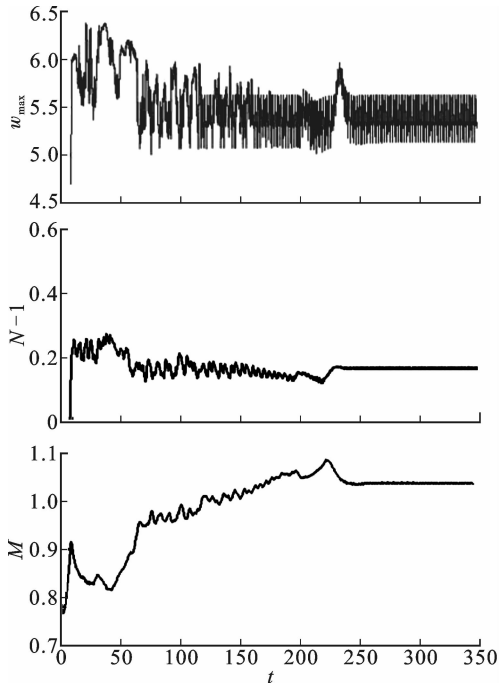


图 2  $r=1.30$  时腔体内对流参数随时间的变化  
Fig. 2 Convection parameters variation with time at  $r=1.30$

在对流发展的初期阶段,三个特征参数变化幅度较大,但随时间的不断推进,各参数逐渐趋于稳定。当时间发展到  $t=230$  以后,  $w_{\text{max}}$ 、 $N-1$  和  $M$

三个参数均稳定,因为局部行波对流是周期变化的,所以在一个数值范围内波动,不再突变,且各参数的变化规律相对应,腔体内的对流处于稳定状态,对流斑图的稳定性可由对流运动的特征参数变化来确定。

$r=1.30$  时腔体内二分之一高度处的温度场随时间的变化,如图 3 所示。其中纵向坐标轴  $t$  表示时间的变化,横向坐标轴  $x$  表示腔体长度,为 30 倍腔体高度。为了便于比较,每幅图所取的时间段均为 100。与图 2 相同,双局部行波的形成过程是经过一段较长的时间才达到稳定的。开始,整个腔体内出现瞬态的对流运动,既有向左的行波,又有向右的行波,形成控制整个腔体的对传波; $t=52$  之后,腔体左侧区域的行波逐渐稳定,对流区域为  $x=0\sim 8$  之间,右侧区域出现周期性的对流扰动,扰动强度忽大忽小,对流宽度也在逐渐减小,腔体中间区域无对流; $t=230$  之后,右侧区域的扰动改变方向,向左传播,与左侧区域行波方向相反,对流宽度保持稳定,双局部行波形成。

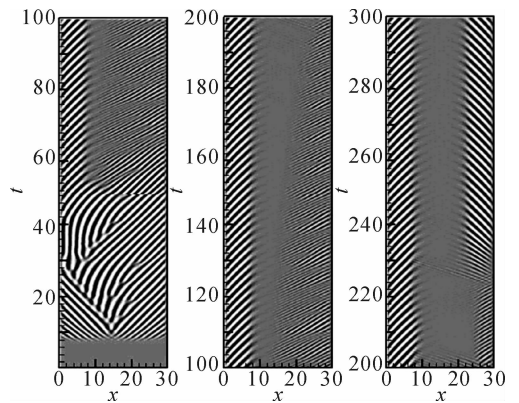


图 3  $r=1.30$  时腔体二分之一高度处的温度场随时间变化  
Fig. 3 The temperature field variation with time at  $r=1.30$  in the midheight of the cell

在以往的数值计算中,通过流体力学扰动方程组,在大长高比  $\Gamma=46$ ,强非线性  $\phi=-0.47$  下,沿对流分叉曲线,减小  $r$  观察到过双局部行波,本次计算首次通过流体力学基本方程组,在非线性  $\phi=-0.20$  下,通过逐步增大  $r$ ,观察到了双局部行波,而且由于非线性较弱,双局部行波出现的  $r$  范围很短,在  $r=1.30$  以后即转变成了其它类型稳定的行波,验证了  $r$  对对流的影响。

## 2.2 双局部行波的时空结构

$r=1.30$  时双局部行波稳定后,截取温度场在  $t=330.0\sim 332.7$  时段的变化情况如图 4 所示。图中纵向方向数值 0 至 1 表示腔体高度,一个矩形框代表一个时刻的行波运动情况,向上两个矩形框之间时间间隔为  $\Delta t=0.3$ 。由图可看出,腔体中出现

了与普通局部行波不同的对流形态,普通的局部行波对流只位于腔体的左侧部或者右侧部,而此时,对流运动同时出现在腔体的左右两侧,左侧对流区域在  $x=0\sim 8$  之间,右侧对流区域在  $x=22\sim 30$  之间,两组行波的对流区域宽度相同, $x=8\sim 22$  之间的区域内无对流滚动。传播方向上,左侧行波向右侧传播而右侧行波向左侧传播,即两组行波的传播方向是彼此相反的。

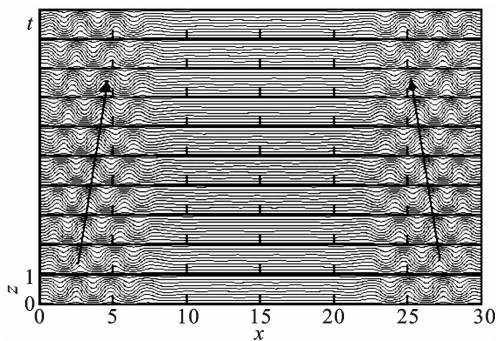


图4  $r=1.30$  时腔体内温度场随时间的变化 ( $t=330.0\sim 332.7$ )

Fig.4 The temperature field variation with time at  $r=1.30$  ( $t=330.0\sim 332.7$ )

图5是  $r=1.30$  时腔体高度二分之一处温度场、浓度场及垂直流速场随时间的变化。其中横向坐标轴表示腔体长度,纵向坐标轴表示时间的增长,

各条曲线的时间间隔为  $\Delta t=0.3$ 。浓度场、温度场和垂直速度场的行波走向变化规律大体一致,浓度场的对流区域左侧为  $x=0\sim 10$ ,右侧为  $x=20\sim 30$ ,温度场和垂直流速场的对流区域宽度要比浓度场的略小一些,这说明浓度场需要比较宽的调整区间从对流向传导过渡。

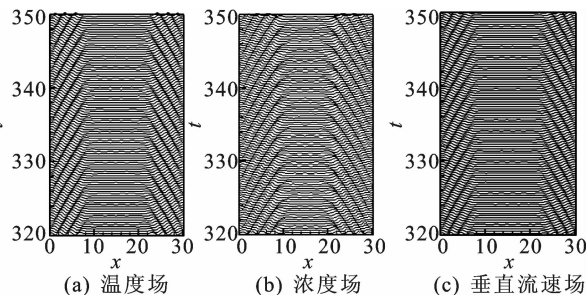


图5  $r=1.30$  时腔体二分之一高度处各场随时间的变化  
Fig.5 Convection parameters variation with time at  $r=1.30$  in the midheight of the cell

$r=1.30$  时,截取  $t=350$  时各物性参数在整个腔体空间内的分布情况,如图6所示。可以看出,腔体中间没有滚动的区域为传导区域。流线图中,各等流线圈以各滚动中心呈中心对称形式;压力场具有移位镜面对称性;Shadowgraph 强度、温度场、浓度场具有移位反对称性。

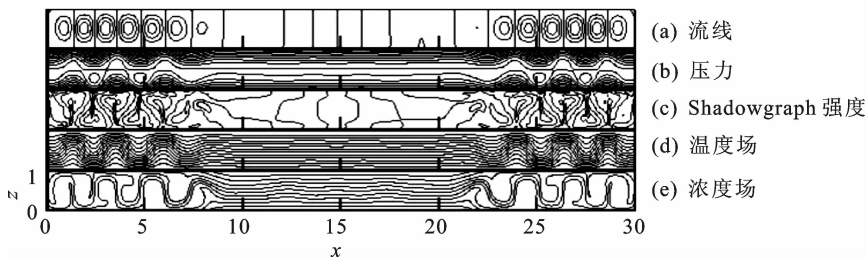


图6  $r=1.30$  双局部行波对流状态的空间结构 ( $t=350$ )

Fig.6 The spatial structure of doubly localized traveling wave at  $r=1.30$  ( $t=350$ )

### 3 结 语

本文首次基于二维流体力学基本方程组在大长高比  $\Gamma=30$ ,弱分离比  $\psi=-0.20$  下,观察到了稳定的双局部行波。通过特征参数的变化确认了行波的稳定性,讨论了双局部行波的出现与相对瑞利数  $r$  的关系。详细探讨了温度场、浓度场、垂直流速场中行波形态的区别,并再现了双局部行波的时空结构。

#### 参考文献:

[1] 宁利中,齐昕,王思怡,等. 小长高比腔体内的摆动行波[J]. 应用力学学报, 2010, 27(3): 538-542.  
NING Lizhong, QI Xin, WANG Siyi, et al. Undulation travelling wave in a small aspect rectangular cell[J]. Chi-

nese Journal of Applied Mechanics, 2010, 27(3): 538-542.  
[2] MOSES E, FINEBERG J, STEINBERG V V. Multistability and confined traveling-wave patterns in a convecting binary mixture[J]. Physical Review A, 1987, 35(6): 2757-2760.  
[3] HEINRICHS R, AHLERS G, CANNEL D S. Traveling waves and spatial variation in the convection of a binary mixture[J]. Physical Review A, 1987, 35(6): 2761-2764.  
[4] HARADA Y, MASUNO Y, SUGIHARA K. Convective motion in space and time; Defect mediated localized traveling waves[J]. Vistas in Astronomg, 1993, 37: 107-110.  
[5] KOLODNER P. Collisions between pulses of traveling-

- wave convection[J]. *Physical Review A*, 1991, 44(10): 6466-6479.
- [6] 郝建武, 宁利中, 王卓运, 等. 长矩形截面腔体内具有缺陷的对传行波斑图[J]. *力学季刊*, 2013, 34(1): 139-146.  
HAO Jianwu, NING Lizhong, WANG Zhuoyun, et al. Patterns of counter propagating wave with defects in a long rectangular cell[J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2013, 34(1): 139-146.
- [7] 齐昕, 宁利中, 刘嘉夫, 等. 极小长高比腔体内混合流体 Undulation 行波对流[J]. *力学季刊*, 2014, 35(2): 235-261.  
QI Xin, NING Lizhong, LIU Jiafu, et al. Undulation traveling wave convection in binary fluid mixtures in a small-aspect-ratio cell[J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2014, 35(2): 235-261.
- [8] 王涛, 田振夫, 葛永斌. 长腔体内混合流体行进波对流的高精度数值模拟[J]. *水动力学研究与进展: A 辑*, 2011, 26(1): 41-47.  
WANG Tao, TIAN Zhenfu, GE Yongbin. High accuracy numerical simulation of traveling wave convection in binary fluid mixture in large aspect ratio rectangular cell[J]. *Journal of Hydrodynamics*, 2011, 26(1): 41-47.
- [9] 宁利中, 王娜, 袁喆, 等. 分离比对混合流体 Rayleigh-Bénard 对流解的影响[J]. *物理学报*, 2014, 63(10): 104401.  
NING Lizhong, WANG Na, YUAN Zhe, et al. Influence of separation ratio on Rayleigh-Bénard convection solutions in a binary fluid mixture[J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, 63(10): 104401.
- [10] 赵秉新. 水平流作用下的混合流体行进波对流[J]. *水动力学研究与进展: A 辑*, 2012, 27(3): 264-273.  
ZHAO Bingxin. Traveling wave convection in binary fluid mixtures with lateral flow[J]. *Journal of Hydrodynamics*, 2012, 27(3): 264-273.
- [11] 宁利中, 袁喆, 郝建武, 等. 双流体 Rayleigh-Benard 对流中的局部行波[J]. *应用力学学报*, 2011, 28(6): 558-564.  
NING Lizhong, YUAN Zhe, HAO Jianwu, et al. Localized travelling wave of Rayleigh-Benard convection in a binary fluid mixture[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2011, 28(6): 558-564.
- [12] 宁利中, 齐昕, 王思怡, 等. 具有大负分离比的混合流体局部行进波对流[J]. *力学季刊*, 2010, 31(2): 194-200.  
NING Lizhong, QI Xin, WANG Siyi, et al. Localized travelling wave convection in binary fluid mixtures with a largely negative separation ratio[J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2010, 31(2): 194-200.
- [13] 王涛, 葛永斌. 微小扰动下中等长高比腔体内行进波对流的高精度数值模拟[J]. *合肥工业大学学报(自然科学版)*, 2012, 35(11): 1569-1573.  
WANG Tao, GE Yongbin. High accuracy numerical simulation of traveling wave convection in an intermediate-aspect-ratio rectangular cell with small perturbation[J]. *Journal of Hefei University of Technology (Natural Science)*, 2012, 35(11): 1569-1573.
- [14] 王涛, 葛永斌. 双局部行进波对流的高精度数值模拟[J]. *合肥工业大学学报(自然科学版)*, 2012, 35(6): 842-847.  
WANG Tao, GE Yongbin. High accuracy numerical simulation of doubly localized traveling wave convection[J]. *Journal of Hefei University of Technology (Natural Science)*, 2012, 35(6): 842-847.
- [15] TARAUT A V, SMORODIN B L, LÜCKE M. Collisions of localized convection structures in binary fluid mixtures[J]. *New Journal of Physics*, 2012, 14(9): 93055-93077.
- [16] MERCADER I, BATISTE O, ALONSO A, et al. Convection in periodic and bounded domains[J]. *Fluid Dynamics Research*, 2010, 42(2): 025505.
- [17] MERCADER I, BATISTE O, ALONSO A, et al. Convection, anticonvection and multiconvection in binary fluid convection[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2011, 667: 586-606
- [18] MA Y-P, BURKE J, KNOBLOCH E. Defect-mediated snaking: A new growth mechanism for localized structures[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2010, 239(19): 1867-1883.
- [19] WATANABE T, LIMA M, NISHIURA Y. Spontaneous formation of travelling localized structures and their asymptotic behaviours in binary fluid convection[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2012, 712: 219-243.
- [20] 王卓运, 宁利中, 王娜, 等. 基于振幅方程组的行波对流的数值模拟[J]. *西安理工大学学报*, 2014, 30(2): 163-169.  
WANG Zhuoyun, NING Lizhong, WANG Na, et al. Numerical simulation of traveling wave convection based on amplitude equations[J]. *Journal of Xi'an University of Technology*, 2014, 30(2): 163-169.
- [21] PATANKAR S V. *Computation of heat transfer and fluid flow*[R]. University of Minnesota, Minneapolis, USA, 1982.