

DOI:10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2019.01.003

随从力作用下薄膜的非线性自由振动特性研究

邵明月¹, 武吉梅^{1,2}, 应戌狄¹, 王 砚³, 卢 瑶²

(1. 西安理工大学 机械与精密仪器工程学院, 陕西 西安 710048; 2. 西安理工大学 印刷包装与数字媒体学院, 陕西 西安 710048; 3. 西安理工大学 土木建筑工程学院, 陕西 西安 710048)

摘要: 本文研究了切向均布随从力作用下运动印刷薄膜的非线性振动特性。基于 Von Karman 薄板理论推导出轴向运动薄膜非线性振动方程, 应用 Galerkin 方法对振动偏微分方程组进行离散, 利用数值法对微分方程进行求解, 得到薄膜非线性振动的频率表达式。分析了不同初始条件下, 随从力和无量纲运动速度对薄膜振动复频率的影响。该研究可为印刷机的设计、制造以及印刷机的稳定性提供理论指导。

关键词: 非线性振动; 随从力; 运动薄膜; Von Karman 薄板理论

中图分类号: O322

文献标志码: A

文章编号: 1006-4710(2019)01-0017-06

Nonlinear free vibration characteristics of membrane subjected to follower force

SHAO Mingyue¹, WU Jimei^{1,2}, YING Shudi¹, WANG Yan³, LU Yao²

(1. School of Mechanical and Precision Instrument Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China; 2. School of Printing, Packaging Engineering and Digital Media Technology, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China; 3. School of Civil Engineering and Architecture, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

Abstract: The nonlinear vibration characteristics of moving membrane subjected to follower force were investigated. Based on the Von Karman plate theory, the nonlinear vibration equation of motion of the axially moving membrane is deduced. The differential equation was divided by the Galerkin method, with the differential equation solved by the numerical method. The frequency expression of the nonlinear vibration was obtained. The effects of follower force and dimensionless velocity on the complex frequency of nonlinear vibration of moving membrane under different initial conditions were analyzed. The study provides a theoretical guidance for the design, manufacture and improvement of the stability of the press.

Key words: nonlinear vibration; follower force; moving membrane; Von Karman plate theory

作用于系统的非保守力随结构的变形而变化, 一般称其为随从力(follower force)或伴生力^[1], 其作用机理与分布阻力有一定的相似性。非保守系统的动力学分析在工程中有着广泛的应用, 如运动的薄膜、飞行器等受到的空气阻力都属于非保守力。在印刷过程中, 受到空气阻力的影响, 薄膜的振动会出现更为复杂的动态特性, 从而严重影响印刷品的

套印精度。本文以运动薄膜为研究对象, 将空气阻力模化为随从力, 对随从力作用下的薄膜的非线性动力学特性及其稳定性进行研究, 为印刷机的设计、制造以及印刷机的稳定性提供理论指导和依据。

对于随从力作用下的系统运动稳定性研究, 国内外学者已经做了大量的工作。Higuchi 和 Dowell^[2]研究了受到切向随从力的柔性矩形板的动

收稿日期: 2018-02-12

基金项目: 陕西省自然科学基金资助项目(2018JM5023, 2018JM1028, 2018JM5119); 西安理工大学博士学位论文创新基金资助项目(310-252071702)

作者简介: 邵明月, 女, 博士生, 研究方向为机械结构动力学。E-mail: shaomingyue_xaut@163.com

通讯作者: 武吉梅, 女, 教授, 博导, 博士, 研究方向为机械结构动力学及印刷设备动态特性与仿真。E-mail: wujimei@xaut.edu.cn

态稳定性,结果表明阻尼和板的长宽比对稳定性有很大影响。Choo 和 Kim^[3]采用多尺度法研究了四个自由边受脉冲随从力作用下的各向同性和非对称层合板的动力稳定性。Alidoost 和 Rezaeepazhand^[4]研究了受集中随从力作用下的分层组合梁的振动、屈曲和颤振不稳定性问题。Robinson 和 Adali^[5,6]应用微分求积法研究了切向均匀分布力和三角分布切向随从力下粘弹性矩形板的动力稳定性问题。Lad 和 Kartik^[7]研究了随从力作用下轴向运动弦线的横向振动特性,分析了随从力和粘性耗散对系统特征结构的影响。Karimi-nobandegani 等^[8]应用有限元法研究了裂纹对分布随从力作用下旋转非均匀梁的颤振不稳定性影响。李清禄等^[9]研究了由陶瓷和金属两种材料组成的功能梯度材料(FGM)圆板在非保守随从力作用下的稳定性问题。Wang 等^[10]应用无网格 Galerkin 方法研究了随从力作用的粘弹性压电层合板的稳定性。Guo 等^[11]采用微分求积法研究了均匀分布的切向随从力作用下热弹性耦合矩形板的动力特性和稳定性。

近年来,已有人对运动矩形纸带非线性振动特性及稳定性进行研究。Marynowski^[12]将运动薄膜简化成梁模型,并采用 Galerkin 法和 4 阶龙格库塔法研究了二维轴向运动薄膜的非线性振动特性。Soares 和 Gonçalves^[13]应用有限元法研究了拉伸超弹性薄膜的非线性振动和稳定性问题。Liu 等^[14]采用数值分析法研究了预应力矩形正交各向异性薄膜结构在冲击载荷作用下的非线性振动响应。王砚等^[15]采用微分求积法研究了非均匀张力作用下薄膜的张力变化系数、长宽比和运动速度对薄膜动力特性及稳定性的影响。Li 等^[16]研究了冲击载荷下的各向异性薄膜结构的非线性振动响应,并进行了可靠性分析。

综上,鲜见对随从力作用下运动薄膜非线性振动的研究。本文以印刷运动薄膜为研究对象,研究随从力作用下的薄膜的非线性振动特性。基于 Von Karman 薄板理论建立薄膜的横向振动方程,应用 Galerkin 方法对振动偏微分方程组进行离散,利用数值法分析随从力和无量纲速度对薄膜非线性振动特性的影响。

1 纸带的非线性振动方程

图 1 为受切向均匀随从力作用的印刷运动薄膜的力学模型^[17],随从力大小为 q_0 ,薄膜的运动方向为 x 方向,其运动速度为 v ;薄膜的宽度方向为 y 方向;横向振动的位移方向为 z 方向。设薄膜横向振

动位移为 $\bar{w}(x, y, \bar{t})$, \bar{t} 为时间, T_x 和 T_y 为其在边界上受到的单位长度拉力值, a 为薄膜的长度, b 为薄膜的宽度,薄膜的密度为 ρ 。

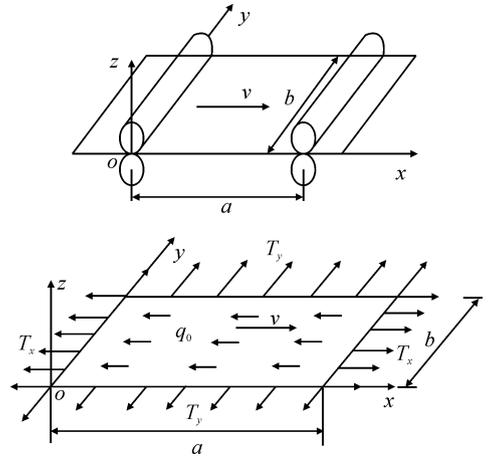


图 1 随从力下运动纸带力学模型

Fig. 1 The mechanical model for the axially moving web subjected to follower force

平衡微分方程为:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 N_x 、 N_y 、 N_{xy} 、 N_{yx} 是薄膜单位长度所受的张力值。

弹性曲面微分方程为:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} + 2v \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial \bar{t}} + v^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} - \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + (a-x)q_0 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

式中, φ 为内力函数。

由中面内力及挠度所表示的系统相容方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 N_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_y}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 N_y}{\partial y^2} - \\ 2(1+\mu) \frac{\partial^2 N_{xy}}{\partial x \partial y} = Eh \left[\left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

式中, μ 为泊松比; E 为弹性模量; h 为薄膜厚度。

薄膜力用内力函数 φ 可表示成:

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (4)$$

由于薄膜单元的各个平衡微分方程相互之间是独立的,所以可认为:

$$N_x = T_x \quad N_y = T_y \quad N_{xy} = 0 \quad (5)$$

根据 Von Karman 大挠度薄板理论^[18]得到随从力作用下运动薄膜的非线性振动方程组为:

$$\begin{cases} \rho(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2}) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \\ (a-x)q_0 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = Eh[(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2}] \end{cases} \quad (6)$$

对式(6)引入下列无量纲量:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{a}, \eta = \frac{y}{b}, \delta = \frac{\bar{w}}{h}, t = \bar{t} \sqrt{\frac{Eh^3}{\rho a^4}}, c = v \sqrt{\frac{\rho a^2}{Eh^3}}, \\ r &= \frac{a}{b}, f = \frac{\varphi}{Eh^3}, Q = \frac{a^3 q_0}{Eh^3} \end{aligned} \quad (7)$$

则式(6)可化为无量纲形式:

$$\begin{cases} (\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial^2 \delta}{\partial \xi \partial t} + c^2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial \xi^2}) - r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \delta}{\partial \xi^2} - \\ r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \delta}{\partial \eta^2} + (1-\xi)Q \frac{\partial^2 \delta}{\partial \xi^2} = 0 \\ \frac{\partial^4 f}{\partial \xi^4} + r^4 \frac{\partial^4 f}{\partial \eta^4} = r^2 (\frac{\partial^2 \delta}{\partial \xi \partial \eta})^2 - r^2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \delta}{\partial \eta^2} \end{cases} \quad (8)$$

对于上述大挠度振动的基本方程,其边界条件为:

$$\begin{cases} \delta(0, \eta) = 0 \\ \delta(1, \eta) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \delta(\xi, 0) = 0 \\ \delta(\xi, 1) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

2 系统状态方程

采用分离变量法和 Galerkin 法对式(8)进行离散,令:

$$w(\xi, \eta, t) = W(\xi, \eta)q(t) \quad (11)$$

$$f(\xi, \eta, t) = F(\xi, \eta)q^2(t) \quad (12)$$

式中, $q(t)$ 为时间变量。

取满足边界条件的位移函数为:

$$W(\xi, \eta) = \sin \pi \xi \sin \pi \eta \quad (13)$$

将式(13)代入式(8)中,得到

$$\frac{\partial^4 F}{\partial \xi^4} + r^4 \frac{\partial^4 F}{\partial \eta^4} = \frac{r^2 \pi^4}{2} (\cos 2\pi \xi + \cos 2\pi \eta) \quad (14)$$

求解式(14),得出:

$$F(\xi, \eta) = \frac{r^2}{32} \cos 2\pi \xi + \frac{1}{32r^2} \cos 2\pi \eta \quad (15)$$

由 Galerkin 法得:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \left[W \frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{\partial q(t)}{\partial t} + c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} q(t) - \right. \\ \left. r^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} q^3(t) - r^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} q^3(t) + \right. \end{aligned}$$

$$\left. (1-\xi)Q \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} q(t) \right] W d\xi d\eta = 0 \quad (16)$$

因此运动薄膜非线性振动的系统状态方程为:

$$M\ddot{q} + P\dot{q} + Aq - Dq^3 = 0 \quad (17)$$

其中

$$M = \int_0^1 \int_0^1 \sin^2 \pi \xi \sin^2 \pi \eta d\xi d\eta = \frac{1}{4}$$

$$P = 2c\pi \int_0^1 \int_0^1 \cos \pi \xi \sin^2 \pi \eta \sin \pi \xi d\xi d\eta = 0$$

$$A = -\pi^2 c^2 \int_0^1 \int_0^1 \sin^2 \pi \xi \sin^2 \pi \eta d\xi d\eta -$$

$$\pi^2 \int_0^1 \int_0^1 Q(1-\xi) \sin^2 \pi \xi \sin^2 \pi \eta d\xi d\eta = -\frac{\pi^2 c^2}{4} - \frac{\pi^2 Q}{8}$$

$$D = r^2 \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\pi^4}{8r^2} \cos 2\pi \eta \sin^2 \pi \xi \sin^2 \pi \eta + \right. \\ \left. \frac{r^2 \pi^4}{8} \cos 2\pi \xi \sin^2 \pi \xi \sin^2 \pi \eta \right) d\xi d\eta = -\frac{\pi^4}{64} (1+r^4) \quad (18)$$

则有:

$$\ddot{q} + \lambda_1 q - \lambda_2 q^3 = 0 \quad (19)$$

其中:

$$\lambda_1 = -\left(\pi^2 c^2 + \frac{\pi^2 Q}{2} \right), \quad \lambda_2 = -\frac{\pi^4 (1+r^4)}{16} \quad (20)$$

3 数值法求解

对式(19)首次积分得:

$$(\dot{q})^2 + \lambda_1 q^2 - \frac{\lambda_2}{2} q^4 = G \quad (21)$$

对于不同的 G 值,代表相平面上不同的曲线, G 值由初始运动条件确定。设初始位移 $q|_{t=0} = L$, 初速度 $\frac{dq}{dt}|_{t=0} = 0$ 。

令:

$$\epsilon = \frac{q}{L}, \quad m^2 = \frac{\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 L^2}{\frac{1}{2}\lambda_2 L^2} \quad (22)$$

可以得:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \sqrt{\frac{\lambda_2 L^2}{2}} \sqrt{(1-\epsilon^2)(m^2-\epsilon^2)} \quad (23)$$

设 $n^2 = \frac{1}{m^2}$, 对式(23)进行积分,可以得到随从力下运动薄膜的非线性振动周期:

$$\begin{aligned} T &= 4\sqrt{\frac{2}{\lambda_2 L^2 m^2}} \int_0^1 \frac{d\epsilon}{\sqrt{(1-\epsilon^2)(1-n^2\epsilon^2)}} = \\ &4\sqrt{\frac{2}{\lambda_2 L^2 m^2}} Z(n) \end{aligned} \quad (24)$$

其中 $Z(n)$ 为第一类完全椭圆积分, 由此可得随力下运动薄膜非线性振动的频率为:

$$\omega = \frac{\pi}{2} \sqrt{\lambda_1 - \frac{1}{2} \lambda_2 L^2} \cdot \frac{1}{Z(n)} \quad (25)$$

其中:

$$Z(n) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 n^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 n^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 n^6 + \dots \right\} \quad (26)$$

可得:

$$\omega = \frac{\sqrt{\lambda_1 - \frac{1}{2} \lambda_2 L^2}}{\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 n^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 n^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 n^6 + \dots \right]} \quad (27)$$

其中:

$$n^2 = \frac{\frac{1}{2} \lambda_2 L^2}{\lambda_1 - \frac{1}{2} \lambda_2 L^2} = \frac{-\pi^4 (1+r^4) L^2}{-(32\pi^2 c^2 + 16\pi^2 Q) + \pi^4 (1+r^4) L^2} \quad (28)$$

4 结果及分析

4.1 非线性振动频率与随力的关系

图 2 为初始运动条件 $L=1$ 和无量纲速度 $c=0.5$, 长宽比 r 分别取 0.5、1、2 时, 轴向运动薄膜非线性振动复频率 ω 与随力 Q 之间的变化曲线。

令薄膜的长宽比 r 不变, 由图 2 可知: 当随力 $Q=0$ 时, 无量纲复频率 ω 是一个实数; 随着随力 Q 的逐渐增大, 复频率 ω 的实部逐渐减小, 而虚部始终为零, 说明运动薄膜进行的大挠度振动很小; 当随力 Q 继续增大到 0.13, 且长宽比 $r=0.5$ 时, 模态频率 ω 的实部减小至零, 当随力为 0.195 时, 虚部开始由零逐渐增大, 此时薄膜开始发散失稳。

因此, 比较不同长宽比 r 的运动薄膜, 可以明显看出, 长宽比 r 越小, 随力 Q 越大时, 薄膜越容易产生振动发散失稳现象。

图 3 为初始运动条件 $L=0$ 和无量纲速度 $c=0.5$, 长宽比 r 分别取 0.5、1、2 时, 轴向运动薄膜非线性振动复频率 ω 的实部和虚部与随力 Q 之间的变化曲线。

由图 3 可知: 随着随力的逐渐增大, 薄膜非线性振动的无量纲复频率 ω 实部始终为零 (即频率 ω 为纯虚数), 而虚部始终为定值。由此说明薄膜始终是发散失稳的, 随力的变化不影响系统发散失稳的快慢, 且该现象与薄膜的长宽比无关。

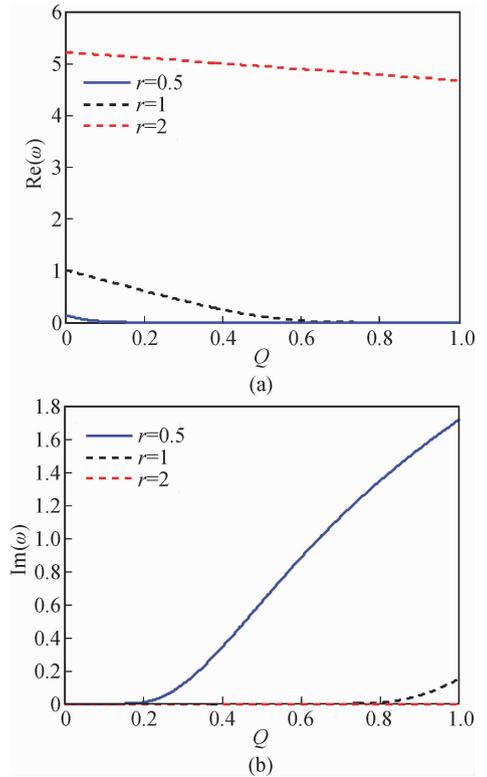


图 2 $L=1$ 时无量纲非线性振动复频率 ω 与随力 Q 的变化曲线

Fig. 2 The relationship between dimensionless complex frequency and follower force when $L=1$

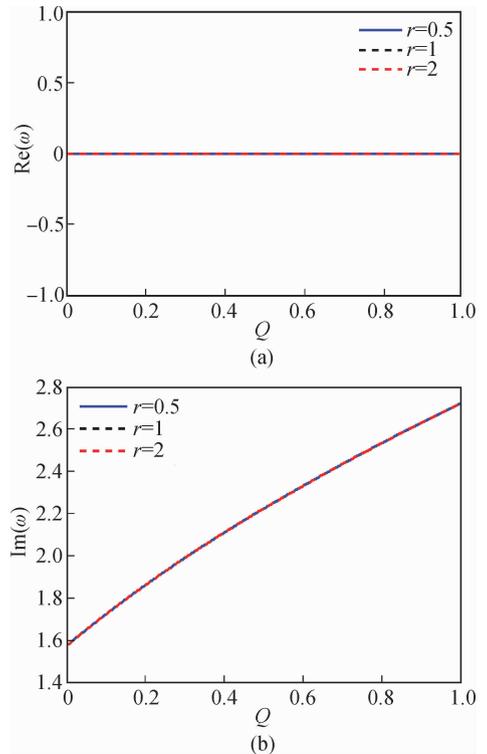


图 3 $L=0$ 时无量纲复频率 ω 与随力 Q 的变化曲线
Fig. 3 The relationship between dimensionless complex frequency and follower force when $L=0$

4.2 非线性振动频率与速度的关系

图4为初始运动条件 $L=1$ 和长宽比 $r=1$, 随动力 Q 分别取 0、0.5、1 时, 轴向运动薄膜非线性振动复频率 ω 随运动速度变化的关系曲线。

令薄膜的随动力 Q 不变, 由图4可知: 当无量纲速度 $c=0$ 时, 无量纲复频率 ω 是一个实数; 随着无量纲速度 c 的逐渐增大, 复频率 ω 的实部逐渐减小, 而虚部始终为零, 说明运动薄膜进行的大挠度振动很小; 若速度 c 继续增大到某个值时, 模态频率 ω 的实部减小至零, 而虚部开始由零逐渐增大, 此时薄膜开始发散失稳。

因此, 比较不同随动力 Q 的运动薄膜, 可以明显看出, 随动力 Q 越小, 薄膜振动失稳的临界速度越大, 也就是说, 减小薄膜的随动力 Q 可提高薄膜振动失稳的临界速度, 使失稳的临界速度高于薄膜的工作速度, 能够有效地保证薄膜工作在稳定的状态。

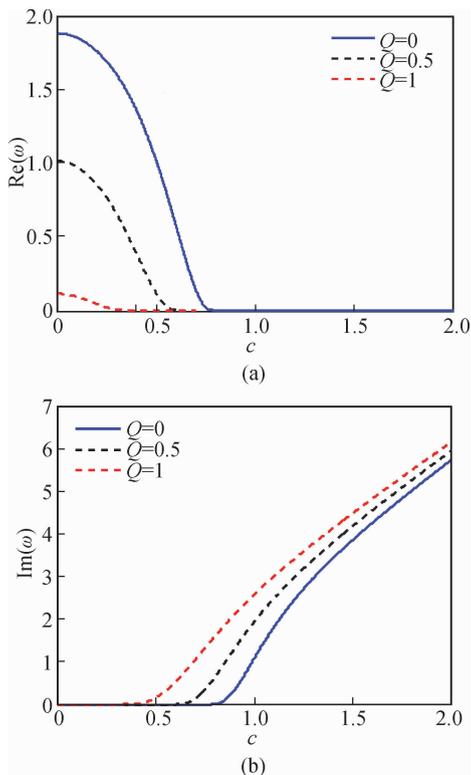


图4 $L=1$ 时无量纲复频率 ω 与无量纲速度 c 的变化曲线
Fig. 4 The relationship between dimensionless complex frequency and dimensionless velocity when $L=1$

图5给出的是初始运动条件 $L=0$, 长宽比 $r=1$, 随动力 Q 分别取 0、0.5、1 时, 轴向运动薄膜非线性振动复频率 ω 的实部和虚部随运动速度变化的关系曲线。由图5可知: 随着运动薄膜无量纲速度的逐渐增大, 薄膜非线性振动的无量纲复频率 ω 实部始终为零(即频率 ω 为纯虚数), 而虚部由零开始增大。

由此说明薄膜始终处于发散失稳的状态, 速度越大, 发散失稳越快, 且该现象与薄膜的随动力无关。

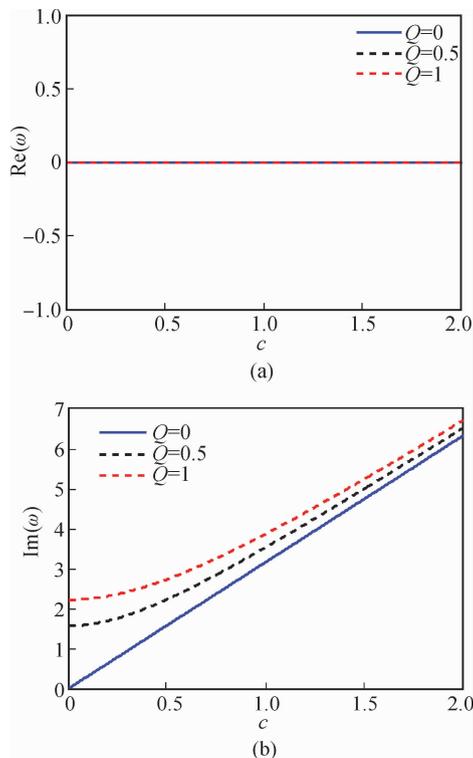


图5 $L=0$ 时无量纲复频率 ω 随无量纲速度 c 的变化曲线
Fig. 5 The relationship between dimensionless complex frequency and the dimensionless velocity when $L=0$

5 结论

1) 薄膜的非线性振动对初始运动条件有敏感依赖性, 运动条件不同, 薄膜的非线性振动特性有显著差别。

2) 初始运动条件 $L=1$ 和无量纲速度 $c=0.5$, 长宽比 r 越小, 薄膜随动力越大时, 薄膜越容易产生振动发散失稳现象。适当增加薄膜的长宽比, 减小随动力, 可有效避免大挠度非线性振动的产生。

3) 当初始运动条件 $L=0$ 和无量纲速度 $c=0.5$ 时, 薄膜始终处于大挠度振动状态, 随动力的变化不影响系统发散失稳的快慢, 且该现象与薄膜的长宽比无关。

4) 初始运动条件 $L=1$ 和长宽比 $r=1$ 时, 减小薄膜的随动力 Q 可提高薄膜振动失稳的临界速度, 使失稳的临界速度高于薄膜的工作速度, 能够有效地保证薄膜工作在稳定的状态。

5) 初始运动条件为 $L=0$, 长宽比为 $r=1$ 时, 薄膜始终处于发散失稳的状态, 速度越大, 发散失稳越快, 减小薄膜无量纲运动速度 c , 可以有效避免大挠度非线性振动现象的产生。

参考文献:

- [1] 赵凤群, 王忠民. 随从力作用下功能梯度矩形板的非线性振动[J]. 振动与冲击, 2011, 30(3):53-59.
ZHAO Fengqun, WANG Zhongmin. Nonlinear vibration of functionally graded thick rectangular plates subjected to follower forces[J]. Journal of Vibration and Shock, 2011, 30(3):53-59.
- [2] HIGUCHI K, DOWELL E H. Effect of structural damping on flutter of plates with a follower force[J]. Aiaa Journal, 1992, 30(3):820-825.
- [3] CHOO Y S, KIM J H. Dynamic stability of rectangular plates subjected to pulsating follower forces[J]. Aiaa Journal, 2012, 38(2):353-361.
- [4] ALIDOOST H, REZAEPAZHAND J. Instability of a delaminated composite beam subjected to a concentrated follower force[J]. Thin-Walled Structures, 2017, 120:191-202.
- [5] ROBINSON M T A, ADALI S. Nonconservative stability of viscoelastic plates subject to triangularly distributed follower loads[J]. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2017, 55(3):1015-1027.
- [6] ROBINSON M T A, ADALI S. Nonconservative stability of viscoelastic rectangular plates with free edges under uniformly distributed follower force[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2016, 107:150-159.
- [7] LAD P, KARTIK V. Stability transitions of an axially moving string subjected to a distributed follower force [J]. Proceedings of the Royal Society A, 2018, 474(2213):20170779.
- [8] KARIMI-NOBANDEGANI A, FAZELZADEH S A, GHAVANLOO E. Flutter instability of cracked rotating non-uniform beams subjected to distributed follower force[J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2018, 18(1):1850001.
- [9] 李清禄, 栾玮获, 李世荣. 功能梯度材料圆板在随从力作用下的稳定性[J]. 玻璃钢/复合材料, 2016,(10):5-10.
LI Qinglu, LUAN Weidi, LI Shirong. The stability of FGM circular plates subjected to follower force[J]. Fiber Reinforced Plastics/Composites, 2016,(10):5-10.
- [10] WANG Y, WANG Z M, ZU L. Stability of viscoelastic rectangular plate with a piezoelectric layer subjected to follower force[J]. Archive of Applied Mechanics, 2013, 83(4):495-507.
- [11] GUO X X, WANG Z M, WANG Y. Dynamic stability of thermoelastic coupling moving plate subjected to follower force[J]. Applied Acoustics, 2011, 72(2-3):100-107.
- [12] MARYNOWSKI K. Non-linear vibrations of the axially moving paper web[J]. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2008, 46(3):565-580.
- [13] SOARES R M, GONÇALVES P B. Nonlinear vibrations and instabilities of a stretched hyperelastic annular membrane [J]. International Journal of Solids and Structures, 2012, 49(3-4):514-526.
- [14] LIU C J, ZHENG Z L, YANG X Y. Analytical and numerical studies on the nonlinear dynamic response of orthotropic membranes under impact load[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2016, 15(4):657-672.
- [15] 王砚, 聂子恒, 武吉梅, 等. 非均匀张力作用下运动薄膜的稳定性研究[J]. 西安理工大学学报, 2016, 32(1):58-62.
WANG Yan, NIE Ziheng, WU Jimei, et al. The study of stability of the moving membrane under non-uniform tension[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2016, 32(1):58-62.
- [16] LI D, ZHENG Z L, TIAN Y, et al. Stochastic nonlinear vibration and reliability of orthotropic membrane structure under impact load[J]. Thin-Walled Structures, 2017, 119:247-255.
- [17] 赵凤群, 王忠民. 运动矩形薄膜的非线性振动分析[J]. 机械科学与技术, 2010, 29(6):768-771.
ZHAO Fengqun, WANG Zhongmin. Nonlinear vibration analysis of a moving rectangular membrane[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2010, 29(6):768-771.
- [18] 徐芝伦. 弹性力学(下) [M]. 第4版. 北京:高等教育出版社, 2006:142-144.

(责任编辑 周 蓓)