DOI:10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2019.01.011

两类阿贝尔 Cayley 图上的完全状态转移

张爱仙，吉　喆

(西安理工大学 理学院，陕西 西安 710054)

摘要： 完全状态转移在量子信息传输以及量子计算中有重要的应用，本文利用有限阶阿贝尔群上的特征、等价类，有理数域上的 p-adic 赋值等理论，通过计算得出两类有限阶阿贝尔群 $G = Z_4 \oplus Z_8$，$G = Z_8 \oplus Z_8$ 上的 Cayley 图有完全状态转移。

关键词： Cayley 图；完全状态转移；特征；指数赋值

中图分类号： O236　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1006-4710(2019)01-0069-04

Perfect state transfer of two classes of abelian Cayley graphs

ZHANG Aixian，JI Zhe

(School of Sciences，Xi'an University of Technology，Xi'an 710054，China)

Abstract: The perfect state transfer(PST) is of great significance for its applications in quantum information transmission and quantum computation. In this paper, based on the theory of character and equivalent classes of the finite abelian group and that of the p-adic valuation on rational number filed, we obtain the fact that two classes of finite abelian groups $G = Z_4 \oplus Z_8$ and $G = Z_8 \oplus Z_8$ have the PST of Cayley graphs.

Key words: Cayley graph; perfect state transfer; character; exponential valuation

完全状态转移(以下简称 PST)对连续时间的量子步有重要影响，从而它在量子信息传输中有重要的应用。Bose 在[1]中引入了量子网络中 PST 的概念，它是有限群的模拟。在 2004－2005 年，Christandel 等[2]研究发现有两个顶点以及三个顶点的路，以及它们的笛卡尔幂在任意两个顶点之间有 PST。Bernasconi 等[3]得到有限个循环群 Z_2 的直积上的 gcd-图存在 PST。Godsil 在[4-6]中回顾总结了直到 2011 年 PST 以及几类图上周期的研究进展及结果，并分析了 PST 与代数组合，结合方案[7]等数学分支之间密切的关系。

此外，对距离正则图[7]，完全二分图[7]，Hadamard 可对角化图[8]等图上的 PST 和周期的研究取得了大量的研究成果。Basic[9]和 Cheung-Godsil 在[10]中给出了循环图上(群 G 是循环群)存在 PST 的刻画方式。谭莹莹，冯克勤[11]给出了任意有限阿贝尔群上连通简单 Cayley 图(简称为阿贝尔 Cayley 图)上存在 PST 的刻画方式。本文中的计算方法和计算技巧受到了文献[12]中有限域上特征和理论的启发。

令 $\Gamma = (V, E)$ 是连通简单图，其中 V, E 分别是 Γ 的顶点和边的集合，$n = |V| \geqslant 2$。$A = A(\Gamma) = (\alpha_{u,v})_{u,v \in V}$ 是 Γ 的邻接矩阵，定义如下：

$$\alpha_{u,v} = \begin{cases} 1, & 若(u,v) \in E \\ 0, & 否则 \end{cases} \tag{1}$$

由线性代数可知，A 是 $n \times n$ 对称矩阵，且 A 的特征值均为实数，Γ 的转移矩阵是以下方式定义的 $n \times n$ 的酉阵：

$$H(t) = H_\Gamma(t) = \exp(\mathrm{i}tA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}tA)^n}{n!} = (H_{u,v}(t)) \tag{2}$$

式中：$u, v \in V$，$t \in R$。

当 $u, v \in V$，$|H_{u,v}(t)| = 1$，则称 Γ 有在时刻 $t > 0$ 从 u 到 v 的完全状态转移(Perfect State Tranfer)，以下简称 PST。此时也称 Γ 在顶点 u 是周期的，周期为 t。

收稿日期： 2018-04-28

基金项目： 国家自然科学基金资助项目(11401468，11426172)；陕西省教育厅科研计划资助项目(2014JK1544)

作者简介： 张爱仙，女，讲师，博士，研究方向为代数数论、编码与密码学。E-mail：zhangaixian1008@126.com

1 预备知识

令 G 是有限阿贝尔群，$|G| = n \geqslant 2$，S 是 G 的子集，$|S| = d \geqslant 1$。Cayley 图 $\Gamma = \mathrm{Cay}(G,S)$ 定义如下：

$$V = G(\text{顶点的集合}) \tag{3}$$

$$E = \{(u,v): u,v \in G, u - v \in S\}(\text{边的集合}) \tag{4}$$

假设 $0 \notin S$，$-S = S$（即 Γ 是简单图），$G = \langle S \rangle$（Γ 是连通图）。Γ 的邻接矩阵 $A = A(\Gamma) = (\alpha_{g,h})_{g,h\in G}$，其中：

$$\alpha_{g,h} = \begin{cases} 1, & \text{若 } g - h \in S \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \tag{5}$$

令 $\hat{G}$ 是 G 的特征群。由矩阵论可知：

$$\alpha_\chi = \sum_{g\in S} \chi(g) \ (\chi \in \hat{G}) \tag{6}$$

是 A 的特征值，且 α_χ 为实数。

由有限阿贝尔群的结构定理可知，任意有限阶阿贝尔群 G 都可以分解为有限个循环群的直和，设：

$$G \cong Z_{n_1} \oplus Z_{n_2} \oplus \cdots \oplus Z_{n_r} \quad (n_i \geqslant 2) \tag{7}$$

其中 $Z_{n_i} = (Z/n_iZ, +)$。对每个 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_r) \in G$，其中 $x_i \in Z_{n_i}$，有：

$$\chi_x: G \to \langle \omega_e \rangle \tag{8}$$

$$g \to \chi_x(g) = \prod_{i=1}^{r} \omega_{n_i}^{x_i g_i}, (g = (g_1, g_2, \cdots, g_r) \in G) \tag{9}$$

是 G 的一个特征。其中 $e = \mathrm{lcm}(n_1, n_2, \cdots, n_r)$ 是 G 的指数，$\omega_m = \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{m}\mathrm{i}}$，这里 e 是自然底数。

引理 1[11] 令 $\Gamma = \mathrm{Cay}(G,S)$ 是阿贝尔简单 Cayley 图，$n = |G| \geqslant 3$。设 Γ 在顶点 (g,h) 之间有 PST，则：

1) Γ 是整图，即对任意 $x \in G$，$\alpha_{\chi_x} \in Z$。

2) 如果 $\alpha = g - h \neq 0$，则 α 的阶是 2。

现在假设 $g,h \in G$，$\alpha = g - h \neq 0$。由引理 1 可知，如果 Γ 在 g,h 之间有 PST，则对任意 $x \in G$，$\alpha_{\chi_x} = \sum_{g\in S} \chi_x(g) \in Z$，并且 α 的阶是 2。因此 $n = |G|$ 是偶数，且对 $x \in G$，$\chi_x(\alpha) = 1$ 或 -1。令 $G_\varepsilon = G_{\varepsilon,\alpha} = \{x \in G: \chi_x(\alpha) = (-1)^\varepsilon\}$，$\varepsilon \in \{0,1\}$，则 $G_0 = \{x \in G: \chi_x(\alpha) = 1\}$ 是 G 的子群，$G = G_0 \cup G_1$，且 $|G_0| = |G_1| = \dfrac{n}{2}$。

下面介绍 2-adic 指数赋值 v_2 的概念，v_2 是如下映射：

$$v_2: Q \to Z \cup \{\infty\} \tag{10}$$

对 $\beta = 2^l \dfrac{c}{b}$ $(l \in Z, b,c \in Z, 2 \nmid bc)$，$v_2(\beta) = l$。假设 $\infty + \infty = \infty \pm l = \infty$，并且 $\infty > l$，则对 $\beta, \beta' \in Q$ 有：

1) $v_2(\beta\beta') = v_2(\beta) + v_2(\beta')$，

2) $v_2(\beta + \beta') \geqslant \min(v_2(\beta), v_2(\beta'))$，并且当 $v_2(\beta) \neq v_2(\beta')$ 时，等号成立。

定理 1[11] 令 $\Gamma = \mathrm{Cay}(G,S)$ 是连通简单阿贝尔 Cayley 图，$n = |G| \geqslant 3$，$d = |S|$，则对 $g,h \in G$，$\alpha = g - h \neq 0$，Γ 在 g,h 之间有 PST 当且仅当下列三个条件成立：

1) Γ 是整图；

2) α 的阶是 2；

3) 对 $\forall x \in G_0$，$v_2(d - \alpha_{\chi_x}) \geqslant m + 1$；
对 $\forall x \in G_1$，$v_2(d - \alpha_{\chi_x}) = m$ $(m \geqslant 1)$。

2 两类有限阿贝尔 Cayley 图上的 PST

令 $e = \exp(G)$ 是 G 的指数，$K = Q(\omega_e)$ 是分圆域。当 $\chi \in \hat{G}$，$S \subseteq G$ 时，记 $\chi(S) = \sum_{g\in S} \chi(g)$，则对每个 $x \in G$，$\alpha_{\chi_x} = \chi_x(S)$ 属于 $Q(\omega_e)$ 的代数整数环 $Z[\omega_e]$，即 $\alpha_{\chi_x} \in Z[\omega_e]$。域扩张 K/Q 的 Galois 群为：

$$\mathrm{Gal}(K/Q) = \{\sigma_l : l \in Z_e^*\} \cong Z_e^* \tag{11}$$

其中 $Z_e^* = \{l \in Z_e : \gcd(l,e) = 1\}$，且 $\sigma_l(\omega_e) = \omega_e^l$。因此，$\Gamma = \mathrm{Cay}(G,S)$ 是整的 $\Leftrightarrow \alpha_{\chi_x} = \chi_x(S) \in Z$，对任意 $x \in G \Leftrightarrow \sigma_l(\chi(S)) = \chi(S)$，对任意 $\chi \in \hat{G}$，$l \in Z_e^*$。又有：

$$\sigma_l(\chi(S)) = \sigma_l\Big(\sum_{g\in S}\chi(g)\Big) = \sum_{g\in S}\sigma_l(\chi(g)) = \sum_{g\in S}\chi(g)^l = \sum_{g\in S}\chi(lg) = \chi(lS) \tag{12}$$

因此，Γ 是整图当且仅当 $\chi(S) = \chi(lS)$，对任意 $l \in Z_e^*$ 成立，其中 $lS = \{lg : g \in S\}$。则通过特征的正交关系，我们可得如下的引理。

引理 2[11] $\Gamma = \mathrm{Cay}(G,S)$ 是整图当且仅当对任意 $l \in Z_e^*$，$lS = S$ 成立。

定理 2[11] 令 G 是有限阿贝尔群，$S \subseteq G$，$e = \exp(G)$。Cayley 图 $\Gamma = \mathrm{Cay}(G,S)$ 是整的当且仅当 S 是一些 Z_e^*-等价类的并。

2.1 $G = Z_4 \oplus Z_8$ 上 Cayley 图存在 PST

令 $G = Z_4 \oplus Z_8$，$e = \mathrm{lcm}(4,8) = 8$，G 有 14 个 Z_8^*-等价类：$S_0 = \{(0,0)\}$，$S_1 = \{(2,0)\}$，$S_2 = \{(0,4)\}$，$S_3 = \{(2,4)\}$，$S_4 = \{(0,2),(0,6)\}$，$S_5 = \{(2,2),(2,6)\}$，$S_6 = \{(1,0),(3,0)\}$，$S_7 = \{(1,4),(3,4)\}$，$S_8 = \{(1,2),(3,6)\}$，$S_9 = \{(1,6),(3,2)\}$，$S_{10} = \{(0,1),(0,3),(0,5),(0,7)\}$，

$S_{11}=\{(1,1),(3,3),(1,5),(3,7)\}$, $S_{12}=\{(1,3),(3,1),(1,7),(3,5)\}$, $S_{13}=\{(2,1),(2,3),(2,5),(2,7)\}$。

设 S 是 G 的子集合,计算这些等价类上的特征,计算结果见表 1.

表 1 $G=Z_4\oplus Z_8$ 等价类上的特征
Tab. 1 Characters of equivalent classes of $G=Z_4\oplus Z_8$

G 的元	$\chi_j(S_1)$	$\chi_j(S_2)$	$\chi_j(S_3)$	$\chi_j(S_4)$	$\chi_j(S_5)$	$\chi_j(S_6)$	$\chi_j(S_7)$	$\chi_j(S_8)$	$\chi_j(S_9)$	$\chi_j(S_{10})$	$\chi_j(S_{11})$	$\chi_j(S_{12})$	$\chi_j(S_{13})$
$Z_0=(0,0)$	1	1	1	2	2	2	2	2	2	4	4	4	4
$Z_1=(2,0)$	1	1	1	2	2	−2	−2	−2	−2	4	−4	−4	4
$Z_2=(0,4)$	1	1	1	2	2	2	2	2	2	−4	−4	−4	−4
$Z_3=(2,4)$	1	1	1	2	2	−2	−2	−2	−2	−4	4	4	−4
$Z_4=(0,2)$	1	1	1	−2	−2	2	2	−2	−2	0	0	0	0
$Z_5=(2,2)$	1	1	1	−2	−2	−2	−2	2	2	0	0	0	0
$Z_6=(1,0)$	−1	1	−1	2	−2	0	0	0	0	4	0	0	−4
$Z_7=(1,4)$	−1	1	−1	2	−2	0	0	0	0	−4	0	0	4
$Z_8=(1,2)$	−1	1	−1	−2	2	0	0	0	0	0	−4	4	0
$Z_9=(1,6)$	−1	1	−1	−2	2	0	0	0	0	0	4	−4	0
$Z_{10}=(0,1)$	1	−1	−1	0	0	2	−2	0	0	0	0	0	0
$Z_{11}=(1,1)$	−1	−1	1	0	0	0	0	−2	2	0	0	0	0
$Z_{12}=(1,3)$	−1	−1	1	0	0	0	0	2	−2	0	0	0	0
$Z_{13}=(2,1)$	1	−1	−1	0	0	−2	2	0	0	0	0	0	0

其中 $\chi_j(S_i)=\chi_{Z_j}(S_i)=\sum_{g\in S_i}\chi_{Z_j}(g)$。

取 $\alpha=(0,4)$ 是 G 中的二阶元,很容易验证:

$$G_0=\{x=(x_1,x_2)\in G:\chi_x(\alpha)=1\}=\bigcup_{i=0}^{9}S_i \tag{13}$$

$$G_1=\{x=(x_1,x_2)\in G:\chi_x(\alpha)=-1\}=\bigcup_{i=10}^{13}S_i \tag{14}$$

取 S 为 $S_1,S_2,\cdots,S_{13}$ 中一些的并集, $S=S_I=\bigcup_{i\in I}S_i$, I 为 $(1,2,\cdots,13)$ 的子集合, $d=|S|=9$,很容易验证当 $S=S_4\cup S_{10}\cup S_{11}$ 时, $\langle S\rangle=G$。又:

$$((d-\chi_0(S)),(d-\chi_1(S)),\cdots,(d-\chi_9(S)))=(0,8,16,8,8,8,4,12,12,4) \tag{15}$$

$$((d-\chi_{10}(S)),(d-\chi_{11}(S)),(d-\chi_{12}(S)),(d-\chi_{13}(S)))=(10,10,10,10) \tag{16}$$

从而有:

$$v_2(d-\chi_j(S))=1,(10\leqslant j\leqslant 13) \tag{17}$$

$$v_2(d-\chi_j(S))\geqslant 2,(0\leqslant j\leqslant 9) \tag{18}$$

满足定理的条件,即 $\Gamma=\mathrm{Cay}(G,S)$ 中当 $g-h=\alpha$ 时,顶点 g 与 h 之间有 PST。

2.2 $G=Z_8\oplus Z_8$ 上 Cayley 图存在 PST

令 $G=Z_8\oplus Z_8$,则 G 有 22 个 Z_8^* - 等价类:
$S_0=\{(0,0)\}$, $S_1=\{(0,4)\}$, $S_2=\{(4,0)\}$, $S_3=\{(4,4)\}$, $S_4=\{(2,0),(6,0)\}$, $S_5=\{(0,2),(0,6)\}$, $S_6=\{(2,4),(6,4)\}$, $S_7=\{(4,2),(4,6)\}$, $S_8=\{(2,6),(6,2)\}$, $S_9=\{(2,2),(6,6)\}$, $S_{10}=\{(1,1),(3,3),(5,5),(7,7)\}$, $S_{11}=\{(1,3),(3,1),(5,7),(7,5)\}$, $S_{12}=\{(1,5),(3,7),(5,1),(7,3)\}$, $S_{13}=\{(1,7),(3,5),(5,3),(7,1)\}$, $S_{14}=\{(1,0),(3,0),(5,0),(7,0)\}$, $S_{15}=\{(1,2),(3,6),(5,2),(7,6)\}$, $S_{16}=\{(1,4),(3,4),(5,4),(7,4)\}$, $S_{17}=\{(1,6),(3,2),(5,6),(7,2)\}$, $S_{18}=\{(2,1),(6,3),(2,5),(6,7)\}$, $S_{19}=\{(2,3),(6,1),(2,7),(6,5)\}$, $S_{20}=\{(0,1),(0,3),(0,5),(0,7)\}$, $S_{21}=\{(4,1),(4,3),(4,5),(4,7)\}$。

取 $\alpha=(4,4)$ 是 G 中的二阶元,则:

$$G_0=\{x=(x_1,x_2)\in G:\chi_x(\alpha)=1\}=\bigcup_{i=0}^{13}S_i \tag{19}$$

$$G_1=\{x=(x_1,x_2)\in G:\chi_x(\alpha)=-1\}=\bigcup_{i=14}^{21}S_i \tag{20}$$

取 $S=S_8\cup S_{16}\cup S_{18}$, $|S|=10$,容易验证 $\langle S\rangle=G$。由表 2 可知:

$$v_2(d-\chi_y(S))=1,y\in G_1 \tag{21}$$

$$v_2(d-\chi_x(S))\geqslant 2,x\in G_0 \tag{22}$$

从而满足定理的条件,即 $\Gamma=\mathrm{Cay}(G,S)$ 中当 $g-h=\alpha$ 时,顶点 g 与 h 之间有 PST。

表2 $G=Z_8 \oplus Z_8$ 等价类上的特征(只列出部分)
Tab. 2 Characters of equivalent classes of $G=Z_8 \oplus Z_8$

G 的元	$\chi_j(S_8)$	$\chi_j(S_{16})$	$\chi_j(S_{18})$	$d-(\chi_j(S_8)+\chi_j(S_{16})+\chi_j(S_{18}))$
$z=x_1=(0,4)$	2	4	−4	8
$z=x_2=(4,0)$	2	−4	4	8
$z=x_3=(4,4)$	2	−4	−4	16
$z=x_4=(2,0)$	−2	0	−4	16
$z=x_5=(0,2)$	−2	4	0	8
$z=x_6=(2,4)$	−2	0	4	8
$z=x_7=(4,2)$	−2	−4	0	16
$z=x_8=(2,6)$	2	0	0	8
$z=x_9=(2,2)$	2	0	0	8
$z=x_{10}=(1,1)$	2	0	0	8
$z=x_{11}=(1,3)$	−2	0	0	12
$z=x_{12}=(1,5)$	2	0	0	8
$z=x_{13}=(1,7)$	−2	0	0	12
$z=y_{14}=(1,0)$	0	0	0	10
$z=y_{15}=(1,2)$	0	0	−4	14
$z=y_{16}=(1,4)$	0	0	0	10
$z=y_{17}=(1,6)$	0	0	4	6
$z=y_{18}=(2,1)$	0	0	0	10
$z=y_{19}=(2,3)$	0	0	0	10
$z=y_{20}=(0,1)$	0	−4	0	14
$z=y_{21}=(4,1)$	0	4	0	6

3 结论

本文利用有限阿贝尔群的结构定理,群上的特征,p-adic 指数赋值以及群上的等价类等抽象代数和代数数论的知识,综合定理1给出的结果,通过计算得出了 $Z_4 \oplus Z_8$,$Z_8 \oplus Z_8$ 上存在 PST。

参考文献:

[1] BOSE S. Quantum communication through an unmodulated spin chain[J]. Physical Review Letters,2003,91(20):207901.

[2] CHRISTANDL M,DATTA N,DORLAS T,et al. Perfect state transfer of arbitrary state in quantum spin networks[J]. Physical Review A,2005,71(3): 032312.

[3] BERNASCONI A,GODSIL C,SEVERINI S. Quantum networks on cubelike graphs[J]. Physical Review A,2008,78(5): 052320.

[4] GODSIL C. Periodic graphs[J]. The Electronic Journal of Combinatorics,2011,18(1):23.

[5] GODSIL C. State transfer on graphs[J]. Discrete Mathematics,2012,312(1):129-147.

[6] GODSIL C. When can perfect state transfer occur? [J]. Electronic Journal of Linear Algebra,2012,23:877-890.

[7] COUTINHO G,GODSIL C,GUO K,et al. Perfect state transfer on distance-regular graphs and association schemes[J]. Linear Algebra and its Applications,2015,478:108-130.

[8] JOHNSTON N,KIRKLAND S,PLOSKER S,et al. Perfect state transfer using Hadamard diagonalizable graphs[J]. Linear Algebra and its Applications,2017,531:373-398.

[9] BASIC M. Characterization of quantum circulant networks having perfect state transfer[J]. Quantum Information Process,2013,12(1):345-364.

[10] CHEUNG W,GODSIL C. Perfect state transfer in cubelike graphs[J]. Linear Algebra and its Applications,2011,435(10):2468-2474.

[11] TAN Yingying,FENG Keqin,CAO Xiwang. Perfect state transfer on abelian Cayley graphs[J/OL]. arXiv:1712.09260vl.

[12] 张爱仙,李江华,孙晓青.计算一类循环码的重要分布[J].西安理工大学学报,2015,31(2):180-182.
ZHANG Aixian, LI Jianghua, SUN Xiaoqing. The weight distribution of a class of cyclic codes[J]. Journal of Xi′an University of Technology, 2015, 31(2): 180-182.

(责任编辑 王绪迪)