

DOI:10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2019.01.013

考虑时变啮合刚度的船用高速斜齿轮动力学特性分析

文建爽, 杜进辅, 刘 凯, 王峥嵘

(西安理工大学 机械与精密仪器工程学院, 陕西 西安 710048)

摘要: 为了研究时变啮合刚度对船用斜齿轮传动系统动力学特性的影响,以某船用高速斜齿轮副为研究对象,首先建立了考虑时变啮合刚度的斜齿轮弯-扭-轴耦合动力学模型,并采用改进的基于承载接触分析(Loaded Tooth Contact Analysis, LTCA)的时变啮合刚度计算方法,计算并拟合出时变啮合刚度曲线;然后分析了特定时变啮合刚度激励条件下转速升高对系统振动情况的影响,以及9 000 r/min和12 000 r/min时不同时变啮合刚度激励下的系统振动特性。分析结果表明,时变啮合刚度激励下,在非共振区转速变化对系统振动特性的影响不显著。齿轮副平均啮合刚度值增大会使振动幅值减小,但共振转速会发生改变,即系统固有频率会发生改变,另外时变啮合刚度波动幅值增大会使振动加剧但不改变系统固有频率。本文研究可为高速斜齿轮传动的设计和工程应用提供一定的参考依据。

关键词: 时变啮合刚度; 高速; 斜齿轮; 承载接触分析; 动力学

中图分类号: TH132.4

文献标志码: A

文章编号: 1006-4710(2019)01-0080-06

Analysis of dynamic characteristics of high speed helical gear for ship considering time-varying meshing stiffness

WEN Jianshuang, DU Jinfu, LIU Kai, WANG Zhengrong

(School of Mechanical and Precision Instrument Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

Abstract: In order to study the effect of time-varying meshing stiffness on the dynamics characteristics of marine helical gear transmission system, a marine high-speed helical gear pair is taken as the research object. Firstly, the bending-torsion-shaft coupling dynamics model of helical gear is established, with the method based on the loaded tooth contact analysis (LTCA) is used to calculate and fit the time-varying meshing stiffness curve. Secondly, the influence of the rotation speed on the vibration of the system is analyzed under the condition of specific time-varying meshing stiffness excitation. And then, the vibration characteristics of the system is also analyzed under different time-varying meshing stiffnesses at 9 000 rpm and 12 000 rpm. The results show that the influence of the rotational speed variation in the non-resonant zone on the vibration characteristics of the system is insignificant under the condition of time-varying meshing stiffness. The increase of the mean meshing stiffness of gears will reduce the amplitude of vibration, but the resonance speed will change. That is, the natural frequency of the system will change. In addition, the increase of amplitude of time-varying meshing stiffness will aggravate vibration, and it will not change the natural frequency of the system. This study could provide a reference for the design and engineering application of high speed helical gear transmission.

Key words: time-varying meshing stiffness; high speed; helical gear; loaded tooth contact analysis; dynamics

斜齿轮由于承载能力大、传动平稳、易于加工和调整等优点,在航空、船舶、汽车和工业减速器等领

收稿日期: 2018-02-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51705419,61701397);陕西省自然科学基金基础研究计划资助项目(2017JQ5048)

作者简介: 文建爽,男,硕士生,研究方向为齿轮传动系统动力学。E-mail:1058305624@qq.com

通讯作者: 杜进辅,男,工学博士,讲师,研究方向为螺旋锥齿轮先进设计及制造技术、齿轮传动系统动力学。E-mail: dujinfu@xaut.edu.cn

域中获得了广泛应用,其动态啮合性能对机械设备整机可靠性、稳定性和振动噪声等特性影响显著。因此,斜齿轮传动的动力学特性一直是国内外学者的研究热点^[1-3]。早期研究中,一般以平均啮合刚度代替时变啮合刚度^[4];后来,随着改进的材料力学法^[5]以及基于 LTCA^[6]的时变啮合刚度计算方法的提出,学者们开始关注时变啮合刚度对齿轮传动动态性能的影响^[7-9]。朱增宝、朱如鹏等^[10]建立了采用双齿联轴器的人字齿行星传动系统动力学模型,从动载特性方面分析了时变啮合刚度对人字齿振动特性的影响;张柳等^[11]从时域和频域方面着重分析了时变啮合刚度和齿距误差对斜齿轮振动特性的影响;王燕等^[12]在系统振动微分方程的平衡位置处对其进行线性化处理,并利用多尺度法获得了系统振动稳定的边界条件,进而分析了时变啮合刚度对斜齿轮系统振动稳定性的影响。

但上述研究大都针对中低转速条件,所获得的结论是否适合高转速情况尚待验证。随着现代工业的高速发展,高速重载齿轮传动的需求也日益增多,对齿轮传动高转速、大载荷、高寿命等方面的要求也日益严格,许多工业领域的齿轮往往工作在过共振区,如直升机、舰船及电动汽车等领域的部分斜齿轮传动其转速已达到 10 000 rpm 以上。可见,研究高转速条件下斜齿轮传动的动力学特性具有重要意义。

为此,本文以某船用高速斜齿轮传动系统为研究对象,建立了 6 自由度弯-扭-轴耦合动力学模型,基于 LTCA 获得时变啮合刚度曲线,研究转速变化对系统振动特性的影响,并通过分析不同时变啮合刚度激励下,齿轮副啮合线方向振动加速度的时、频域结果,研究时变啮合刚度的均值和波动幅值对系统振动的影响,以期获得具有理论意义和实际应用价值的成果,为高速斜齿轮传动的设计和应用提供参考依据。

1 斜齿轮副弯-扭-轴动力学模型

采用集中质量法建立 6 自由度斜齿轮传动的弯-扭-轴耦合动力学模型^[13],见图 1。该系统的广义位移矩阵可表示为:

$$\{\delta\} = \{y_1, z_1, \theta_1, y_2, z_2, \theta_2\}^T \quad (1)$$

式中: y_i 、 z_i 、 θ_i ($i = 1, 2$) 分别表示主、从动斜齿轮中心在径向、轴向振动位移及转角位移。根据牛顿第二定律列出图 1 所示动力学模型的微分方程组见式(2)。

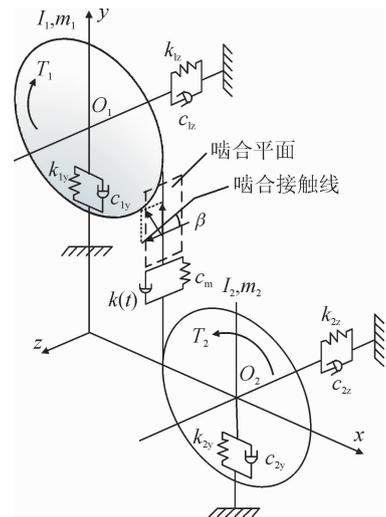


图 1 斜齿轮弯-扭-轴动力学模型

Fig. 1 Bend-torsion-shaft dynamic model of helical gear

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + c_{1y} \dot{y}_1 + k_{1y} y_1 = -F_y \\ m_1 \ddot{z}_1 + c_{1z} \dot{z}_1 + k_{1z} z_1 = -F_z \\ I_1 \ddot{\theta}_1 = -F_y R_{b1} + T_1 \\ m_2 \ddot{y}_2 + c_{2y} \dot{y}_2 + k_{2y} y_2 = F_y \\ m_2 \ddot{z}_2 + c_{2z} \dot{z}_2 + k_{2z} z_2 = F_z \\ I_2 \ddot{\theta}_2 = F_y R_{b2} - T_2 \end{cases} \quad (2)$$

基于力、位移分解,将该系统中切向动态啮合力与轴向动态啮合力以参数形式表达如下:

$$\begin{cases} F_y = \cos\beta \{ c_m [\cos\beta (\dot{y}_1 - \dot{y}_2 + R_{b1} \dot{\theta}_1 - R_{b2} \dot{\theta}_2) + \sin\beta (\dot{z}_1 - \dot{z}_2)] + k(t) [\cos\beta (y_1 - y_2 + R_{b1} \theta_1 - R_{b2} \theta_2) + \sin\beta (z_1 - z_2)] \} \\ F_z = \sin\beta \{ c_m [\cos\beta (\dot{y}_1 - \dot{y}_2 + R_{b1} \dot{\theta}_1 - R_{b2} \dot{\theta}_2) + \sin\beta (\dot{z}_1 - \dot{z}_2)] + k(t) [\cos\beta (y_1 - y_2 + R_{b1} \theta_1 - R_{b2} \theta_2) + \sin\beta (z_1 - z_2)] \} \end{cases} \quad (3)$$

式中: m_1 、 m_2 分别为主、从动轮质量; R_{b1} 、 R_{b2} 分别为主、从动轮基圆半径; β 为斜齿轮螺旋角; α 为压力角; T_1 、 T_2 分别为主、从动轮转矩; y_1 、 y_2 分别为主、从动轮中心在 y 方向的振动位移; z_1 、 z_2 分别为主、从动轮中心在 z 方向的振动位移; θ_1 、 θ_2 分别为主、从动轮的扭转振动位移; k_{1y} 、 k_{2y} 分别为主、从动轮在 y 方向的等效支承刚度; k_{1z} 、 k_{2z} 分别为主、从动轮在 z 方向的等效支承刚度; c_{1y} 、 c_{2y} 分别为主、从动轮在 y 方向的等效支承阻尼; c_{1z} 、 c_{2z} 分别为主、从动轮在 z 方向的等效支承阻尼; $k(t)$ 为齿轮时变啮合刚度; c_m 为啮合阻尼,其计算公式如下:

$$c_m = 2\xi \sqrt{\frac{k_m I_1 I_2}{I_1 R_{b2}^2 + I_2 R_{b1}^2}} \quad (4)$$

式中, ξ 为阻尼比, 本文取 0.1。

为了消除齿轮刚体转角位移对后续分析的影响, 引入相对转角位移 q 将转角位移转化为线位移, 其表达式为:

$$q = R_{b1}\theta_1 - R_{b2}\theta_2 \quad (5)$$

将式(5)代入式(2)中, 扭转振动方程可化简为:

$$m_e \ddot{q} + F_y = \frac{T_1}{R_{b1}} \quad (6)$$

式中, m_e 为齿轮副的等效扭转质量:

$$m_e = \frac{I_1 I_2}{I_1 R_{b2}^2 + I_2 R_{b1}^2} \quad (7)$$

2 时变啮合刚度的计算

本文采用基于 LTCA 的方法计算齿轮副时变啮合刚度, 该方法以将齿轮几何分析和力学分析有机地结合在一起的 LTCA 为基础, 可以得到齿轮副在修形和误差条件下的啮合刚度曲线。啮合刚度 $k(t)$ 的计算式如下:

$$k(t) = \frac{P}{Z} \quad (8)$$

式中: P 为力或力矩; Z 为线位移或角位移变形。

通过 LTCA 可获得齿面载荷分布 P 和在当前接触位置载荷 P 作用下的线位移传动误差 Z 。 Z 主要由几何传动误差、轮齿弯曲变形和齿面接触变形引起。

几何传动误差与载荷 P 大小无关, 由齿面设计和加工决定。当齿轮副材料、几何参数及啮合位置一定时, 轮齿弯曲变形和接触变形由载荷 P 决定, 可以根据美国格里森公司的计算方法得到^[14]。各组成部分与载荷 P 的关系如下:

$$\begin{cases} \delta_1(P) = c_1 \\ \delta_2(P) = c_2 P \\ \delta_3(P) = c_3 \sqrt[3]{P^2} \end{cases} \quad (9)$$

式中: c_1, c_2, c_3 为常数; $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ 分别表示几何传动误差、轮齿弯曲变形和接触变形。

将一个啮合周期进行 n 等分, $Z_k(P)$ 表示第 k ($k = 1, 2, \dots, n$) 个啮合位置在名义载荷 P 作用下的承载变形, 可由轮齿 LTCA 程序得到^[15]。

综上所述, 可以得到第 k 个啮合位置在名义载荷 P 作用下的承载变形:

$$Z_k(P) = c_1 + c_2 + c_3 \sqrt[3]{P^2} \quad (10)$$

用待定系数法, 进行三次不同载荷下的运算, 便可确定系数 c_1, c_2, c_3 , 得到齿轮副不同啮合位置的

载荷与变形的函数关系式。通过这个关系式, 可以确定任意载荷下该位置的啮合刚度, 对每一个啮合位置均进行上述运算, 即可得到齿轮副整个啮合周期各啮合位置的啮合刚度, 进而得到齿轮副的啮合刚度曲线。

3 算例

表 1 为某船用高速斜齿轮副参数, 其三维模型见图 2。

表 1 齿轮副基本参数

参数	主动轮	从动轮
齿数 z	17	44
齿轮旋向	左旋	右旋
法面模数 m_n/mm		6
法向压力角 $\alpha/(\circ)$		20
螺旋角 $\beta/(\circ)$		24.43
转矩 $T/(\text{N}\cdot\text{m})$	193.2	500
弹性模量 E/GPa		210
左端轴承支承刚度 $/(N/m)$	9.93×10^8	1.32×10^9
右端轴承支承刚度 $/(N/m)$	6.27×10^8	1.21×10^9



图 2 某斜齿轮三维模型

Fig. 2 3D model of a helical gear

根据前文方法, 得到其在 $500 \text{ N}\cdot\text{m}$ 负载下的时变啮合刚度曲线见图 3。

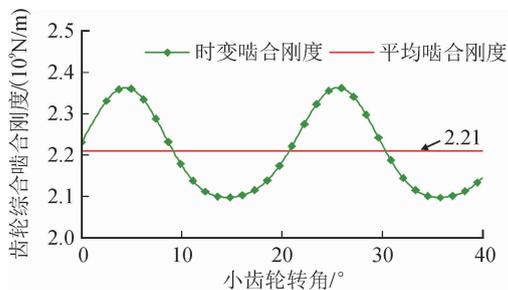


图 3 齿轮综合啮合刚度曲线

Fig. 3 Gear comprehensive meshing stiffness curve

以斜齿轮副端面啮合线方向的相对振动加速度 a 作为主要指标考查系统振动程度,其表达式为:

$$a = \cos\beta(\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 + R_{b1}\ddot{\theta}_1 - R_{b2}\ddot{\theta}_2) + \sin\beta(\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2) \quad (11)$$

将求解动力学模型得到的各方向振动加速度按照式(11)合成,并求出其均方根值。接着依次求出各转速下的相对振动加速度均方根值,绘制如图4所示的时变啮合刚度激励下的齿轮端面啮合线方向振动-转速图。

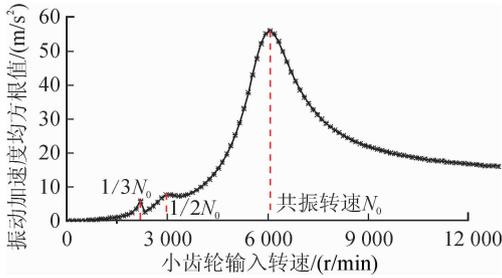


图4 齿轮啮合线方向振动-转速图

Fig. 4 Gear vibration-rotation speed diagram of meshing direction

图4可以看出,在时变啮合刚度曲线激励不变的情况下,不同转速下系统振动程度不同;除去共振峰外的加速度均方根值并未随转速升高而明显升高。这是由于时变啮合刚度作为一种参数激励,其本身的均值及幅值与转速无关。也即,只考虑时变啮合刚度激励情况下,远离共振转速时,转速升高对系统振动特性的影响不显著。在 $1/3$ 和 $1/2$ 共振转速 N_0 处,发生了明显的超谐波共振。

为了研究齿轮平均啮合刚度对系统振动的影响,基于图2所示时变啮合刚度,取0.6倍、0.8倍、1.0倍、1.2倍、1.4倍五种不同平均啮合刚度(幅值不变,见图5)作为系统激励。求得系统啮合线方向振动加速度情况,见图6。

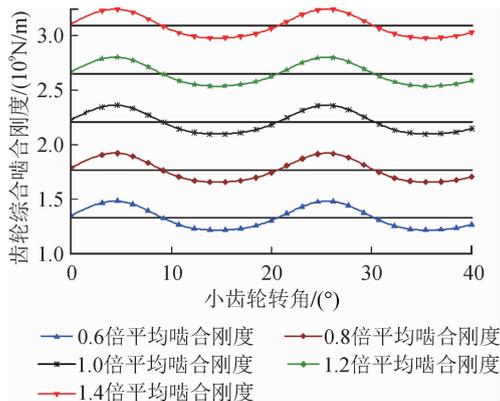


图5 不同平均刚度值的啮合刚度曲线

Fig. 5 Meshing stiffness curve of different means of stiffness

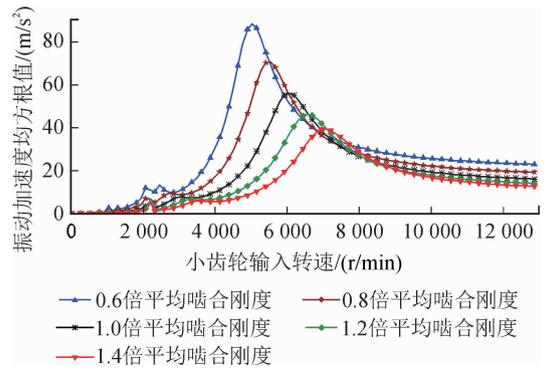


图6 不同平均啮合刚度下的振动-转速图

Fig. 6 Vibration-rotation speed diagram of the different means of stiffness

图6中,在齿轮时变啮合刚度幅值不变的情况下,除去共振峰值外,齿轮相对振动加速度均方根值随着齿轮平均啮合刚度的升高而降低,且系统固有频率发生了改变,齿轮副共振转速随齿轮平均啮合刚度的增大而增大。进一步分析得,平均啮合刚度减小使系统振动加速度均方根值相对于转速的变化率变大,这导致齿轮转速达到共振转速附近时齿轮振动系统稳定性变差。

图7~8分别为转速9000 r/min、12000 r/min时5种不同平均啮合刚度下啮合线方向振动时域图。

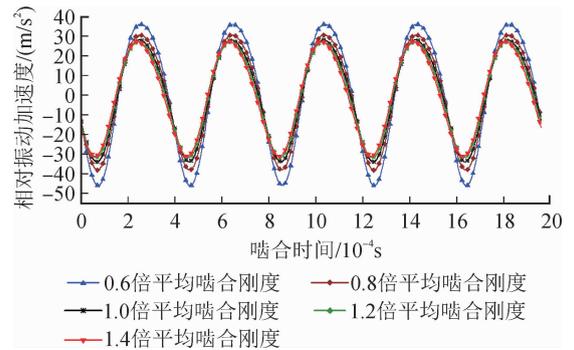


图7 9000 r/min时不同平均刚度下啮合线方向振动时域图
Fig. 7 Time domain diagram of meshing direction vibration under different means of stiffness at 9000 r/min

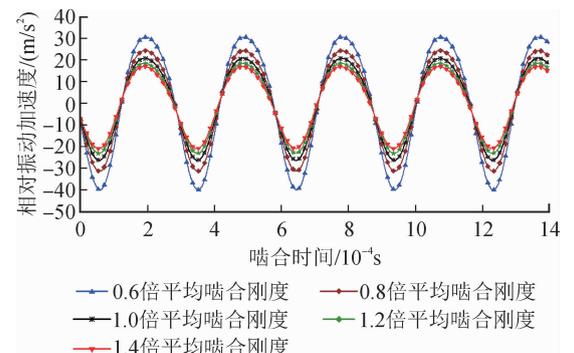


图8 12000 r/min时不同平均刚度下啮合线方向振动时域图
Fig. 8 Time domain diagram of meshing direction vibration under different means of stiffness at 12000 r/min

图 9~10 为频域图。

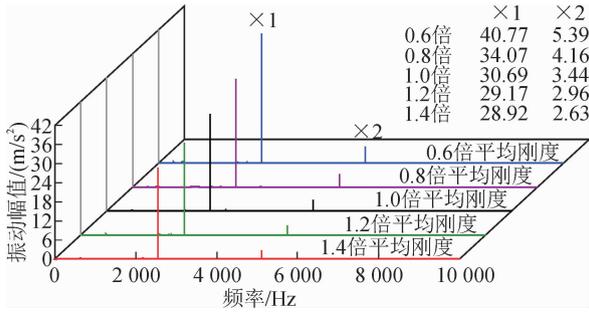


图 9 9 000 r/min 时不同平均刚度下啮合线方向振动频域图
Fig. 9 Frequency domain diagram of meshing direction vibration under different stiffness means at 9 000 r/min

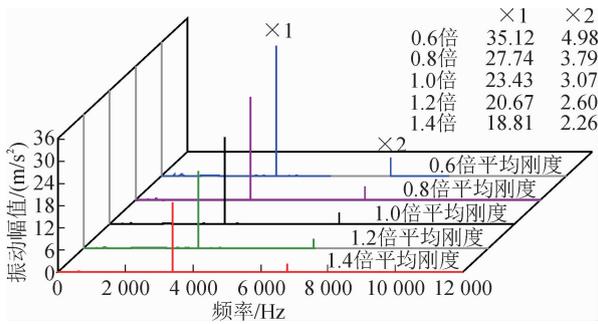


图 10 12 000 r/min 不同平均刚度下啮合线方向振动频域图
Fig. 10 Frequency domain diagram of meshing direction vibration under different stiffness means at 12 000 r/min

由图 7~10 可得,平均啮合刚度越大,齿轮振动幅值越大,与图 6 得到的结论一致。

时变啮合刚度的幅值波动大小是影响齿轮系统振动响应的重要因素。为了研究时变啮合刚度对齿轮系统振动响应的影响,基于图 2 所示时变啮合刚度,取 0.6 倍、0.8 倍、1.0 倍、1.2 倍、1.4 倍五种不同幅值(平均啮合刚度值和周期保持不变,见图 11),作为系统激励输入动力学模型。求得系统啮合线方向振动加速度情况,见图 12。

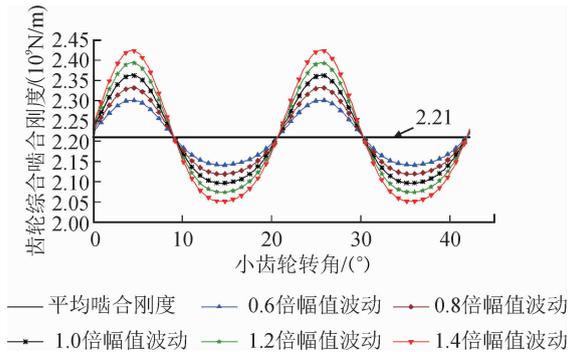


图 11 不同幅值的啮合刚度曲线

Fig. 11 Meshing stiffness curves of different amplitudes

由图 12 得,在齿轮平均啮合刚度不变的情况

下,啮合刚度的幅值越大齿轮端面啮合线方向振动均方根值越大;且啮合刚度的幅值波动变化并未造成共振转速发生变化;时变啮合刚度幅值增大会使振动加速度均方根值相对于转速的变化率变大,如前所述,这会导致齿轮转速达到共振转速附近时系统稳定性变差。

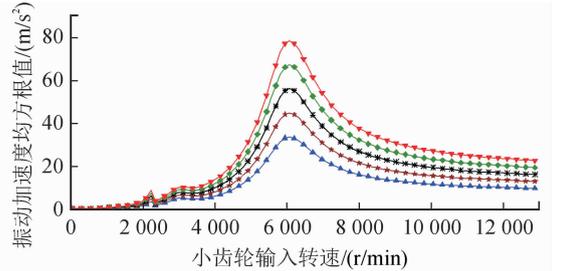


图 12 不同啮合刚度幅值下的振动-转速图
Fig. 12 Vibration-rotation speed diagram under different amplitudes of meshing stiffness

图 13~14 分别为转速 9 000 r/min、12 000 r/min 时 5 种不同时变啮合刚度幅值下啮合线方向振动时域图,其频域图见图 15~16。由图 13~16 可得,啮合刚度幅值越大,齿轮振动幅值越大。与分析图 12 得到的结论一致。

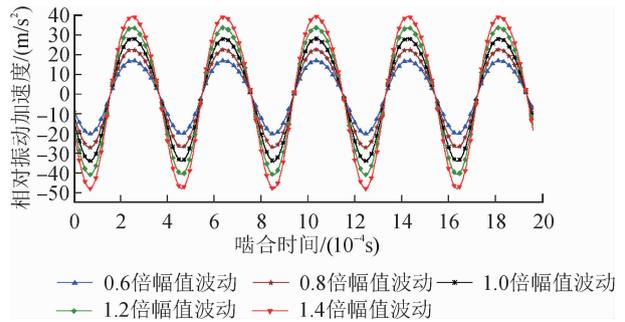


图 13 9 000 r/min 时不同幅值波动下啮合线方向振动时域图
Fig. 13 Time domain diagram of meshing direction vibration under different amplitudes of meshing stiffness at 9 000 r/min

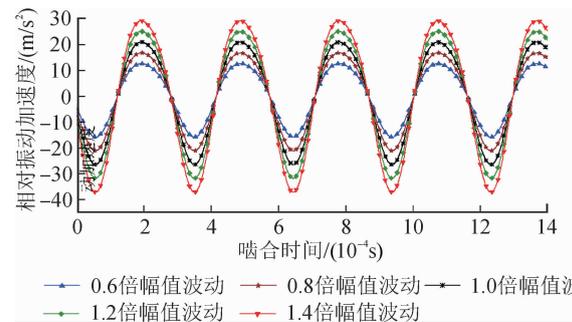


图 14 12 000 r/min 时不同幅值波动下啮合线方向振动时域图
Fig. 14 Time domain diagram of meshing direction vibration under different amplitudes of meshing stiffness at 12 000 r/min

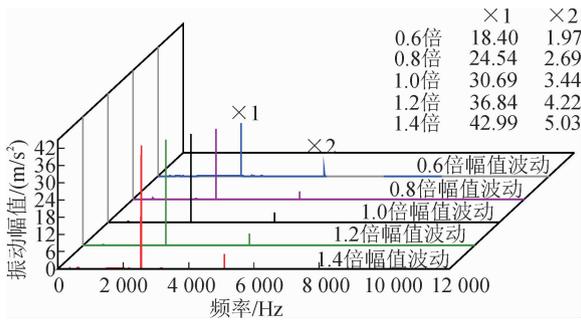


图 15 9 000 r/min 时不同幅值波动下啮合线方向振动频域图
Fig. 15 Frequency domain diagram of meshing direction vibration under different amplitudes of meshing stiffness at 9 000 r/min

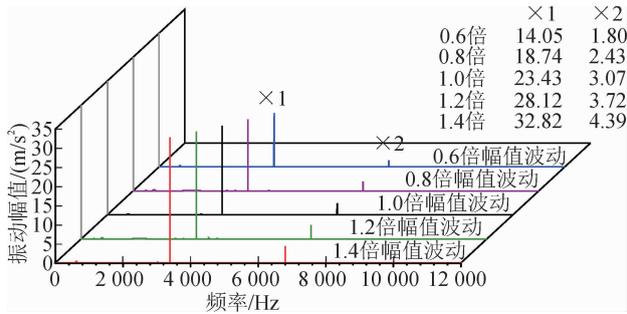


图 16 12 000 r/min 不同幅值波动下啮合线方向振动频域图
Fig. 16 Frequency domain diagram of meshing direction vibration under different amplitudes of meshing stiffness at 12 000 r/min

4 结 论

本文以某船用高速斜齿轮传动系统为研究对象,建立了考虑时变啮合刚度的斜齿轮弯-扭-轴耦合动力学模型,基于 LTCA 计算了齿轮副的时变啮合刚度,并研究了转速和齿轮副时变啮合刚度的变化对系统动力学特性的影响。所得结论如下。

1) 时变啮合刚度激励下,远离共振转速时,转速变化对系统振动特性的影响不显著。

2) 在 $1/3$ 和 $1/2$ 共振转速 N_0 处,发生了明显的超谐波共振。

3) 齿轮副平均啮合刚度值增大会使系统振动幅值减小,但共振转速会发生改变,即系统固有频率会发生改变,齿轮平均啮合刚度越大,系统的共振转速也越大。

4) 时变啮合刚度波动幅值增大会使振动加剧,但不改变系统固有频率。

参考文献:

[1] 任红军,张昊,于晓光,等. 五平行轴压缩机齿轮系统非线性动力学特性研究[J]. 机械工程学报,2017,53(23): 39-45.

REN Hongjun, ZHANG Hao, YU Xiaoguang, et al. Nonlinear dynamics of the gear system in five shaft integrally geared centrifugal compressor[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(23): 39-45.

[2] FAKHFAKH H, BRUYÈRE J, VELEX P, et al. A torsional model of multi-stage gears influence of external excitations and tooth shape modifications[J]. Mechanics & Industry, 2016, 17(4): 413.

[3] 武慧杰,杨建伟,王富民. 时变速度和阻尼激励下地铁齿轮传动系统的动力学响应分析[J]. 机械传动,2016,40(10): 114-121.

WU Huijie, YANG Jianwei, WANG Fumin. Dynamics response analysis of subway gear transmission system with the excitation of time variable speed and damping [J]. Journal of Mechanical Transmission, 2016, 40(10): 114-121.

[4] Johnson D C. Modes and frequencies of shafts coupled by straight spur gears[J]. Journal of Mechanical Engineering Science, 1962, 4(3): 241-250.

[5] 常乐浩,贺朝霞,刘岚,等. 一种确定斜齿轮传递误差和啮合刚度的快速有效方法[J]. 振动与冲击,2017,36(6): 157-162.

CHANG Lehao, HE Zhaoxia, LIU Lan, et al. Express method for determining the transmission error and mesh stiffness of helical gears[J]. Journal of Vibration and Shock, 2017, 36(6): 157-162.

[6] Du Jinfu, Fang Zongde, Dong Hao. Time-varying mesh stiffness of gear pair based on loaded tooth contact analysis[C]//2012 Third International Conference on Digital Manufacturing and Automation. IEEE, 2012: 979-982.

[7] MBAREK A, HAMMAMI A, RINCON A F D, et al. Effect of load and meshing stiffness variation on modal properties of planetary gear [J]. Applied Acoustics, 2017, in press.

[8] 刘宝山,杜群贵,文奇. 考虑安装误差的斜齿轮啮合刚度计算与分析[J]. 机械传动,2017,41(3):33-37.

LIU Baoshan, DU Qungui, WEN Qi. Calculation and analysis of meshing stiffness of helical gear considering installation error[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2017, 41(3): 33-37.

[9] 林何,王三民,董金城. 内、外啮合刚度激励下人字齿行星齿轮传动振动特性[J]. 西北工业大学学报,2016,34(5): 893-899.

LIN He, WANG Sanmin, DONG Jincheng. Vibration characteristics of herringbone planetary gear train with internal and external meshing stiffness excitation [J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2016, 34(5): 893-899.

- pling between damage mechanics and peridynamics: a route for objective simulation of material degradation up to complete failure[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2016, 94:453-472.
- [6] SILLING S A, COX J. Hierarchical multiscale method development for peridynamics[R]. SAND2014-18565. USA: Sandia National Laboratories, 2014.
- [7] LITTLEWOOD D. Roadmap for peridynamic software implementation[R]. SAND2015-9013. USA: Sandia National Laboratories, 2015.
- [8] 刘波, 李宁. 圆形压力隧洞衬砌与围岩荷载分担比研究[J]. *西安理工大学学报*, 2012, 28(4):379-384.
LIU Bo, LI Ning. Research on lining and surrounding rock load sharing ratio of circular pressure tunnel [J]. *Journal of Xi'an University of Technology*, 2012, 28(4):379-384.
- [9] HU Y L, MADENCI E. Peridynamics for fatigue life and residual strength prediction of composite laminates [J]. *Composite Structures*, 2017, 160:169-184.
- [10] 王睿, 党发宁, 李明亮. 基于概率统计法的隧道围岩变形稳定时间及二衬施作时机研究[J]. *西安理工大学学报*, 2017, 33(2):204-210.
WANG Rui, DANG FANING, LI Mingliang. Research on deformation stability time and secondary lining laying time of tunnel surrounding rock based on probability statistics method [J]. *Journal of Xi'an University of Technology*, 2017, 33(2): 204-210.
- [11] 刘学增, 张鹏, 周敏. 纵向裂缝对隧道衬砌承载力的影响分析[J]. *岩石力学与工程学报*, 2012, 31(10):2096-2102.
LIU Xuezheng, ZHANG Peng, ZHOU Min. Analysis of effect of longitudinal cracks on bearing capacity of tunnel lining [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2012, 31(10):2096-2102.
- [12] MASHIMO H, ISAGO N, YOSHINAGA S, et al. Experimental investigation on load-carrying capacity of concrete tunnel lining[C]//AITES-ITA World Tunnel Congress, 2002.

(责任编辑 王绪迪)

(上接第85页)

- [10] 朱增宝, 朱如鹏, 李应生, 等. 啮合刚度对人字齿行星传动系统动态载荷特性的影响研究[J]. *兵工学报*, 2013, 34(6): 732-738.
ZHU Zengbao, ZHU Rupeng, LI Yingsheng, et al. Impact of mesh stiffness on dynamic load characteristics of herringbone planet train [J]. *Acta Armamentarii*, 2013, 34(6): 732-738.
- [11] 张柳, 吴训成, 须俊健, 等. 含时变啮合刚度和齿距误差的斜齿轮动力学分析[J]. *机械传动*, 2016, 40(6): 149-154.
ZHANG Liu, WU Xuncheng, XU Junjian, et al. Dynamics analysis of helical gear with time-varying stiffness and tooth pitch error [J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2016, 40(6): 149-154.
- [12] 王燕, 刘建新, 李森. 计及齿轮时变啮合刚度的机车驱动系统振动稳定性[J]. *振动与冲击*, 2017, 36(16): 100-105.
WANG Yan, LIU Jianxin, LI Miao. Vibration stability for a locomotive driving system with time-varying mesh stiffness of gears [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2017, 36(16): 100-105.
- [13] 李润方, 王建军. 齿轮系统动力学: 振动, 冲击, 噪声 [M]. 北京: 科学出版社, 1997.
- [14] EDITORIAL BOARD OF GEAR MANUAL. Gear manual [M]. Beijing: China Machine Press, 2000.
- [15] 方宗德. 修形斜齿轮的承载接触分析[J]. *航空动力学学报*, 1997, 12(3): 251-254.
FANG Zongde. Loaded tooth contact analysis of modified helical gears [J]. *Journal of Aerospace Power*, 1997, 12: 251-254.

(责任编辑 王绪迪)