DOI:10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2019.01.015

一类具有脉冲扰动和饱和治愈率的媒介传染病模型研究

董红森，张素霞

（西安理工大学 理学院，陕西 西安 710054）

摘要：考虑到对染病宿主进行治疗并对传染媒介实施脉冲控制，本文建立了一个 SIR-SI 媒介传染病模型，分析了模型的动力学性态。利用脉冲微分方程理论讨论了无病周期解的存在性，同时证明阈值小于 1 时该无病周期解局部渐近稳定。当阈值大于 1 时，利用比较定理，证明了系统的一致持久性。数值模拟结果表明，饱和治疗项、脉冲控制周期及脉冲控制强度对模型有重要影响，出现了分支、混沌等丰富的动力学现象。

关键词：媒介传染病；脉冲扰动；饱和治疗；动力学性态；分支；混沌

中图分类号：O175　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1006-4710(2019)01-0094-08

Analysis of a model with impulsive perturbation and saturation treatment of vector-borne diseases

DONG Hongsen，ZHANG Suxia

(School of Sciences，Xi'an University of Technology，Xi'an 710054，China)

Abstract：An SIR-SI model for vector-borne disease is proposed and investigated，with saturation treatment of infected hosts and impulsive control of the vectors incorporated. The dynamics are analyzed theoretically and numerically. The results indicate that there exists a disease-free periodic solution which is locally asymptotically stable if the threshold is less than one. Otherwise，by the comparison theorem，it is proved that the disease is uniformly persistent when the threshold is greater than one. Numerical simulations show that the saturation treatment，impulsive control period and impulsive control intensity have a great influence on behaviors of the model，leading to rich dynamics such as bifurcation and chaos.

Key words：vector-borne disease；impulsive perturbation；saturation treatment；dynamic properties；bifurcation；chaos

一直以来，人们面临着各种传染病的威胁，这些传染病一般都是通过细菌、病毒、真菌等引起的，直接感染动物或者人，被感染的动物或人在人与人、动物与动物或人与动物之间相互传播。媒介传染病是通过某种生物载体进行传播的疾病，如以蚊子作为传染媒介，常见的传染病有登革热、疟疾和西尼罗河热等。在这些疾病的传播过程中，被感染的蚊子通过叮咬健康的宿主而将病毒传染给人群，同时健康的蚊子在叮咬被感染的宿主时获得病毒，如此交替循环从而引起此类媒介传染病的传播和蔓延。

传染病动力学模型是研究疾病传播规律的一种有效的方法。针对传染病的特点利用数学模型对其传播过程和传播机理进行研究，以寻求合理高效的疾病管理方法和控制措施。在对媒介传染病研究的过程中，一些学者通过建立不同形式的数学模型来描述疾病发生、发展及控制特点，取得了丰富的研究

收稿日期：2018-06-05

基金项目：国家自然科学基金资助项目(11501443,11701445)

作者简介：董红森，男，硕士生，研究方向为微分方程与生物数学。E-mail:1049069196@qq.com

通讯作者：张素霞，女，副教授，博士，研究方向为微分方程与生物数学。E-mail:zsuxia@163.com

成果[1-4]。为了研究实施脉冲扰动对管理和控制疾病的影响，脉冲微分方程模型近来被广泛利用，以更准确地描述疾病传播和控制的客观情况[1,4-6]。随着现代医学的发展，医疗技术和医疗水平有了长足的进步，人们对疾病的治疗和管理水平也随之得到显著提高，其治疗程度也被刻画到传染病动力学模型中[7-9]。本文将考虑对媒介实施脉冲控制并对宿主进行饱和治疗的 SIR-SI 媒介传染病模型，分析脉冲控制周期和强度以及饱和治愈率对模型动力学性态的影响。

1 模型建立

将宿主（人群）划分为三个仓室：易感者类、染病者类和恢复者类，设 $S_H(t)$、$I_H(t)$ 和 $R_H(t)$ 分别表示在 t 时刻宿主中易感者、染病者和恢复者的数量。将媒介（蚊子）划分为两个仓室：易感者类和染病者类，$S_M(t)$ 和 $I_M(t)$ 分别表示 t 时刻媒介中易感蚊子和染病蚊子的数量，从而建立媒介传染病模型：

$$\left.\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S_H}{\mathrm{d}t}=\Lambda_H-c\beta_H\dfrac{I_M}{N_H}S_H-\mu_H S_H\\ \dfrac{\mathrm{d}I_H}{\mathrm{d}t}=c\beta_H\dfrac{I_M}{N_H}S_H-\dfrac{\alpha_1 I_H}{1+\alpha_2 I_H}-(\mu_H+r+d_H)I_H\\ \dfrac{\mathrm{d}R_H}{\mathrm{d}t}=rI_H+\dfrac{\alpha_1 I_H}{1+\alpha_2 I_H}-\mu_H R_H\\ \dfrac{\mathrm{d}S_M}{\mathrm{d}t}=\Lambda_M-c\beta_M\dfrac{I_H}{N_H}S_M-\mu_M S_M\\ \dfrac{\mathrm{d}I_M}{\mathrm{d}t}=c\beta_M\dfrac{I_H}{N_H}S_M-\mu_M I_M\end{cases}\right\}t\neq nT,\ n\in\mathbf{N}$$

$$\left.\begin{cases}S_M(t^+)=(1-p)S_M(t)\\ I_M(t^+)=(1-p)I_M(t)\end{cases}\right\}t=nT,\ n\in\mathbf{N}\tag{1}$$

其中 $N_H(t)=S_H(t)+I_H(t)+R_H(t)$ 为 t 时刻人口总数量，$N_M(t)=S_M(t)+I_M(t)$ 为 t 时刻蚊子总数量。Λ_H 和 Λ_M 分别表示单位时间内易感人群和易感蚊子的输入率，μ_H 和 μ_M 分别为人和蚊子的死亡率，β_M 和 β_H 分别为染病个体传染蚊子和蚊子传染易感个体的传染率系数。c 为每只蚊子单位时间内平均叮咬人的次数，r、d_H 分别为人群中染病者的自然恢复率和因病死亡率。T 和 p 分别表示捕杀蚊子的时间间隔和捕杀强度，$\dfrac{\alpha_1}{1+\alpha_2 I_H}$ 表示对染病者的饱和治愈率。

由于蚊子相对于人的生存时间较短，这里不考虑蚊子的因病死亡，并假设模型中的参数都是非负的。

2 无病周期解的存在性与稳定性

当宿主和媒介中无病毒存在，考虑式(1)的无病子空间：

$\boldsymbol{X}_s=\{(S_H,I_H,R_H,S_M,I_M):S_H\geqslant 0,I_H=0,R_H=0,S_M\geqslant 0,I_M=0\}$

则有：

$$\left.\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S_H(t)}{\mathrm{d}t}=\Lambda_H-\mu_H S_H(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}S_M(t)}{\mathrm{d}t}=\Lambda_M-\mu_M S_M(t)\end{cases}\right\}t\neq nT,n\in\mathbf{N}$$

$$\begin{cases}S_M(t^+)=(1-p)S_M(t),\ t=nT,n\in\mathbf{N}\end{cases}\tag{2}$$

由于只对媒介实施脉冲控制，即式(2)中关于易感宿主的微分方程无脉冲扰动，则当 $t\to\infty$，$S_H(t)\to\dfrac{\Lambda_H}{\mu_H}$，记 $\widetilde{S}_H(t)=\dfrac{\Lambda_H}{\mu_H}$。而对于媒介，需考虑如下脉冲微分方程，即：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S_M(t)}{\mathrm{d}t}=\Lambda_M-\mu_M S_M(t),\ t\neq nT,n\in\mathbf{N}\\ S_M(t^+)=(1-p)S_M(t),\ t=nT,\ n\in\mathbf{N}\end{cases}\tag{3}$$

计算易得该脉冲方程在时间段 $(nT,(n+1)T]$ 内的周期解为：

$$S_M(t)=\frac{\Lambda_M}{\mu_M}+(S_M(nT^+)-\frac{\Lambda_M}{\mu_M})\mathrm{e}^{-\mu_M(t-nT)}$$

由式(3)中第二个等式得：

$$S_M((n+1)T)=(1-p)(\frac{\Lambda_M}{\mu_M}+(S_M(nT^+)-\frac{\Lambda_M}{\mu_M})\mathrm{e}^{-\mu_M T})\triangleq f(S_M(nT^+))$$

由 $f(S_M)=(1-p)(\frac{\Lambda_M}{\mu_M}+(S_M-\frac{\Lambda_M}{\mu_M})\mathrm{e}^{-\mu_M T})$，可得映射 f 有唯一正的不动点 S_M^*，且

$$S_M^*=\frac{(1-p)(1-\mathrm{e}^{-\mu_M T})}{1-(1-p)\mathrm{e}^{-\mu_M T}}\frac{\Lambda_M}{\mu_M}$$

显然，当 $0<S_M<S_M^*$ 时，$S_M<f(S_M)<S_M^*$，当 $S_M^*<S_M$ 时，$S_M^*<f(S_M)<S_M$，则 S_M^* 全局渐近稳定，可得式(3)的全局渐近稳定周期解：

$$\widetilde{S}_M(t)=\frac{\Lambda_M}{\mu_M}+(S_M^*-\frac{\Lambda_M}{\mu_M})\mathrm{e}^{-\mu_M(t-nT)}$$

即

$$\widetilde{S}_M(t)=(1-\frac{p\mathrm{e}^{-\mu_M(t-nT)}}{1-(1-p)\mathrm{e}^{-\mu_M T}})\frac{\Lambda_M}{\mu_M}$$

引理 1 式(2)存在唯一的正 T 周期解 $(\widetilde{S}_H,\widetilde{S}_M)$，且对于式(2)的任意解 (S_H,S_M)，当 $t\to\infty$ 时有 $S_H\to\widetilde{S}_H$，$S_M\to\widetilde{S}_M$。

下面利用 Floquet 算子理论[10-11]讨论式(1)中无病周期解 $(\widetilde{S}_H,0,0,\widetilde{S}_M,0)$ 的局部稳定性。为了方便，设式(1)的扰动解为 $\boldsymbol{x}(t)=(s_H,s_M,r_H,i_H,i_M)$，作变换：

$S_H(t)=s_H(t)+\widetilde{S}_H(t)$，$I_H(t)=i_H(t)$，$R_H(t)=r_H(t)$，$S_M(t)=s_M(t)+\widetilde{S}_M(t)$，$I_M(t)=i_M(t)$。

并将变换代入式(1)，由线性近似可得脉冲微分方程组：

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{x}(t) & t\neq nT,n\in\mathbf{N}\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t) & t=nT,n\in\mathbf{N}\end{cases}$$

其中：

$$\boldsymbol{Q}(t)=\begin{bmatrix}-\mu_H & 0 & 0 & 0 & -c\beta_H\\ 0 & -\mu_M & 0 & -c\beta_M\dfrac{\widetilde{S}_M(t)}{\widetilde{S}_H(t)} & 0\\ 0 & 0 & -\mu_H & r+\alpha_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -(\alpha_1+\mu_H+r+d_H) & c\beta_H\\ 0 & 0 & 0 & c\beta_M\dfrac{\widetilde{S}_M(t)}{\widetilde{S}_H(t)} & -\mu_M\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1-p & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p\end{bmatrix}$$

为方便计算，令

$$\boldsymbol{Q}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{U} & \boldsymbol{B}\\ 0 & \boldsymbol{F}-\boldsymbol{V}\end{bmatrix}\quad\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{P}_2\end{bmatrix}$$

其中：

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}-\mu_H & 0 & 0\\ 0 & -\mu_M & 0\\ 0 & 0 & -\mu_H\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & -c\beta_H\\ -c\beta_M\dfrac{\widetilde{S}_M}{\widetilde{S}_H} & 0\\ r+\alpha_1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}0 & c\beta_H\\ c\beta_M\dfrac{\widetilde{S}_M}{\widetilde{S}_H} & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}\alpha_1+\mu_H+r+d_H & 0\\ 0 & \mu_M\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1-p & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1-p\end{bmatrix}$$

记 $\boldsymbol{\Phi}_Q(t)=[\boldsymbol{\Phi}_{ij}]_{1\leqslant i,j\leqslant 2}$ 为 $\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{x}(t)$ 的基解矩阵，其中 $\boldsymbol{\Phi}_{ij}$ 表示矩阵第 i 行第 j 列的元素，则有 $\boldsymbol{\Phi}'_Q(t)=\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{\Phi}_Q(t)$，初值 $\boldsymbol{\Phi}_Q(0)=\boldsymbol{E}_5$。考虑矩阵：

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Phi}_Q(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_1\mathrm{e}^{UT} & \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{\Phi}_{12}(T)\\ 0 & \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{\Phi}_{F-V}(T)\end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}_{F-V}(t)$ 为 $\boldsymbol{x}'(t)=(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{V})\boldsymbol{x}(t)$ 的基解矩阵。由于 $|\mu_H|$、$|\mu_M|$ 都小于 1，则谱半径 $r(\boldsymbol{P}_1\mathrm{e}^{UT})<1$。

定理 1 若谱半径 $r(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{\Phi}_{F-V}(T))<1$，则式(1)的无病周期解 $(\widetilde{S}_H,0,0,\widetilde{S}_M,0)$ 局部渐近稳定。

定义阈值：$R_0=r(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{\Phi}_{F-V}(T))$，$R_0$ 表示一个感染者单位时间内传染人数，或者表示一只感染蚊子单位时间内传染蚊子的数量[12]。

3 疾病的持久性

定理 2 如果 $R_0>1$，疾病一致持久，即存在正整数 $\eta>0$，使得：

$$\liminf_{t\to\infty}I_i(t)\geqslant\eta>0,\ i=H,M。$$

证明：要证明疾病的持久性，首先证明弱持久性，即证明存在正整数 $\eta>0$，使得 $\limsup_{t\to\infty}I_i(t)\geqslant\eta>0$，$i=H,M$。利用反证法，若上述结论不成立，则存在 $t_1>0$，对任意 $t>t_1$，有 $I_i(t)<\eta$，$i=H,M$。由式(1)中第一个和第四个方程，可以得：

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}S_H(t)}{\mathrm{d}t}\geqslant\Lambda_H-c\beta_H\frac{S_H(t)}{N_H}\eta-\mu_H S_H(t)\\ &\frac{\mathrm{d}S_M(t)}{\mathrm{d}t}\geqslant\Lambda_M-c\beta_M\frac{S_M(t)}{N_H}\eta-\mu_M S_M(t)\end{aligned}\right\}\ t\neq nT,n\in\mathbf{N}$$
$$S_M(t^+)=(1-p)S_M(t)\qquad t=nT,n\in\mathbf{N}\tag{4}$$

考虑如下系统：

$$\left.\begin{aligned} x_1'(t) &= \Lambda_H - c\beta_H \frac{x_1(t)}{N_H}\eta - \mu_H x_1(t) \\ x_2'(t) &= \Lambda_M - c\beta_M \frac{x_2(t)}{N_H}\eta - \mu_M x_2(t) \end{aligned}\right\} t \neq nT, n \in \mathbf{N}$$
$$x_2(t^+) = (1-p)x_2(t) \qquad t = nT, n \in \mathbf{N} \tag{5}$$

类似于对式(2)的处理方法,可得式(5)的一个正周期解 $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$,该解全局渐近稳定,且 $\lim\limits_{\eta \to 0}\tilde{\boldsymbol{x}} = (\tilde{S}_H, \tilde{S}_M)$。则存在 η_1,对任意的 $\varepsilon_1 > 0$,$\eta < \eta_1$,$\tilde{x}_1 \geqslant \tilde{S}_H - \varepsilon_1$,$\tilde{x}_2 \geqslant \tilde{S}_M - \varepsilon_1$。由比较定理[11],存在 $t_2 > t_1$,$\varepsilon_2 > 0$,对任意的 $t > t_2$ 有:

$$\begin{cases} S_H \geqslant x_1 \geqslant \tilde{x}_1 - \varepsilon_2 \geqslant \tilde{S}_H - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ S_M \geqslant x_2 \geqslant \tilde{x}_2 - \varepsilon_2 \geqslant \tilde{S}_M - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \end{cases}$$

由式(1)中关于 I_H 和 I_M 的方程,并注意到 $N_H \leqslant \tilde{S}_H$ 和 $N_M \leqslant \tilde{S}_M$,则有:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}I_H(t)}{\mathrm{d}t} &\geqslant c\beta_H I_M(t) - (\alpha_1 + \mu_H + r + d_H) I_H(t) \\ \frac{\mathrm{d}I_M(t)}{\mathrm{d}t} &\geqslant c\beta_M \frac{\tilde{S}_M}{\tilde{S}_H} I_H(t) - \mu_M I_M(t) \end{aligned}\right\} t \neq nT, n \in \mathbf{N}$$
$$I_M(t^+) = (1-p)I_M(t) \qquad t = nT, n \in \mathbf{N} \tag{6}$$

考虑系统:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}'(t) = (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{V})\boldsymbol{u}(t), & t \neq nT, n \in \mathbf{N} \\ \boldsymbol{u}(t^+) = (1-p)\boldsymbol{u}(t), & t = nT, n \in \mathbf{N} \end{cases} \tag{7}$$

式中 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$。式(7)的解可表示为 $\boldsymbol{u}(t, nT, \boldsymbol{u}(nT^+)) = \boldsymbol{\Phi}_{F-V}(t-nT)\boldsymbol{u}(nT^+)$,则 $\boldsymbol{u}((n+1)T^+) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Phi}_{F-V}(t-nT)\boldsymbol{u}(nT^+)$。当 $R_0 > 1$ 时,随着 $t \to \infty$,$u_1 \to \infty$ 且 $u_2 \to \infty$,则 $\lim\limits_{t\to\infty} I_H = \infty$,$\lim\limits_{t\to\infty} I_M = \infty$,这与 $I_i < \eta$,$i = M, H$ 矛盾,于是 $\lim\limits_{t\to\infty} \sup I_i(t) \geqslant \eta > 0$,$i = H, M$。

以下讨论两种可能情况:

情况一　t 足够大时,$I_i(t) > \eta$,$i = H, M$;

情况二　t 足够大时,$I_i(t)$ 值在 η 处波动,$i = H, M$。

如果情况一成立,则式(1)一致持久。对于情况二,因为 $\lim\limits_{t\to\infty} \sup I_i(t) \geqslant \eta > 0$,$i = H, M$,所以存在 $t_1 \in (n_1 T, (n_1+1)T]$ 使得 $I_i(t_1) \geqslant \eta$,$i = H, M$。同样也存在一个 $t_2 \in (n_2 T, (n_2+1)T]$ 使得 $I_i(t_2) \geqslant \eta$,$i = H, M$,其中 n_1、n_2 为正整数且 $n_2 > n_1$。当 $t \in [t_1, t_2]$ 时,有:

$$I'_H = c\beta_H \frac{S_H}{N_H} I_M - \frac{\alpha_1 I_H}{1+\alpha_2 I_H} - (\mu_H + r + d_H) I_H \geqslant -\alpha_1 I_H - (\mu_H + r + d_H) I_H$$

从而得:

$$I_H(t) \geqslant I_H(t_1)\mathrm{e}^{-(\alpha_1+\mu_H+r+d_H)(t-t_1)} \geqslant \eta \mathrm{e}^{-(\alpha_1+\mu_H+r+d_H)(t-t_1)} \geqslant \eta \mathrm{e}^{-(\alpha_1+\mu_H+r+d_H)(n_2-n_1+1)T}$$

对 I_M 有:

$$I'_M = c\beta_M \frac{I_H}{N_H} S_M - \mu_M I_M \geqslant -\mu_M I_M,\ t \neq nT, n \in \mathbf{N}$$

$$I_M(nT^+) = (1-p)I_M(nT), t = nT, n \in \mathbf{N}$$

可得:

$$I_M(t) \geqslant \eta(1-p)^{n_2-n_1}\mathrm{e}^{-\mu_M(t-t_1)} \geqslant \eta(1-p)^{n_2-n_1}\mathrm{e}^{-\mu_M(n_2-n_1+1)T}$$

令 $\eta_1 = \min\{\eta \mathrm{e}^{-(\alpha_1+\mu_H+r+d_H)(n_2-n_1+1)T}, \eta(1-p)^{n_2-n_1}\mathrm{e}^{-\mu_M(n_2-n_1+1)T}\}$,因为 $n_2 - n_1 > 0$,所以 $\eta_1 > 0$ 有界,于是当 $t \in [t_1, t_2]$ 时,$I_i(t) \geqslant \eta_1 > 0$,$i = H, M$。当 $t > t_2$ 时,同样存在非零的正整数 η_2,如此下去可得到序列 $\{\eta_j\}$,$j = 1, 2, \cdots, k, \cdots$,其中:

$$\eta_k = \min\{\eta \mathrm{e}^{-(\alpha_1+\mu_H+r+d_H)(n_{k+1}-n_k+1)T}, \eta(1-p)^{n_{k+1}-n_k}\mathrm{e}^{-\mu_M(n_{k+1}-n_k+1)T}\}$$

因为 $n_{k+1} - n_k \geqslant 0$,所以 $\eta_k > 0$ 有界,当 $t \in [t_k, t_{k+1}]$ 时,$I_i(t) \geqslant \eta_k > 0$,$i = H, M$ 成立,其中 $t_k \in (n_k T, (n_k+1)T]$,$t_{k+1} \in (n_{k+1}T, (n_{k+1}+1)T]$。令 $\eta^* = \min\limits_j \eta_j$,则对所有的 $t \geqslant t_1$,有 $I_i(t) \geqslant \eta^* > 0$,$i = H, M$,证明完毕。

4　数值模拟

为了进一步研究模型的动力学性态,在一定的参数取值下,主要以脉冲强度 p 和脉冲周期 T 为控制参数对系统的数值解、时间序列图和分支图分别进行数值模拟。

4.1　脉冲控制周期 T 的影响

模型中参数取值分别为:$\Lambda_M = 1\,300$、$\Lambda_H = 2.1$、$\beta_M = 0.16$、$\beta_H = 0.88$、$\mu_M = 0.029$、$\mu_H = 0.005$、$c = 0.3$、$d_H = 0.08$、$r = 0.005$。式(1)的初始值分别取为:$S_H = 100$、$I_H = 0$、$R_H = 500$、$S_M = 300$、$I_M = 10$。在 $\alpha_1 = 6$,$\alpha_2 = 3$ 以及 $\alpha_1 = 7$,$\alpha_2 = 4$ 两种不同饱和治愈率情况下,研究脉冲控制周期 T 对系统动力学性态的影响。图 1 和图 2 展示了当脉冲强度 $p = 0.85$ 且脉冲控制周期 T 在一定范围内取值时,式(1)中各变量的变化情况。

在上述参数取值下,对比图 1 和图 2 可以看出,两种不同饱和治愈率下模型出现不同的性态,并且两种情况下系统都具有丰富的动力学行为。以图 2(b)为例,当 $p = 0.85$,$\alpha_1 = 7$,$\alpha_2 = 4$ 时,出现带有

周期窗口的混沌带→倍周期分岔→周期吸引子→混沌→含有周期窗口的混沌带→周期解分支。当参数 T 的取值在[40，40.9]之间时，系统进入一个带有周期窗口的混沌区域，特别是参数 T 的取值大于 40.178 时，混沌突然消失，出现一个周期窗口。参数 T 的取值增加到 40.9 时，因为系统周期解失去稳定性，系统进入到混沌状态，当参数 T 的取值增加到 43 时，混沌突然消失，系统再次进入平衡状态。同时由图 2(a)可以看到，随着参数 T 取值的增加，易感人群的最大量是非单调变化的。图 3 和图 4 进一步给出了染病媒介和染病宿主的变化情况。由图 3(a)可以看出，当 $T=40.5$ 时，I_M 随时间呈现出 $3T$ 周期变化，对应的图 3(b)呈现 $3T$ 周期吸引子的分岔行为。同样，由图 4 (a)可以看出，当 $T=40.5$ 时，染病者 I_H 随时间也呈现周期变化，图 4(b)为对应的周期吸引子分岔行为。

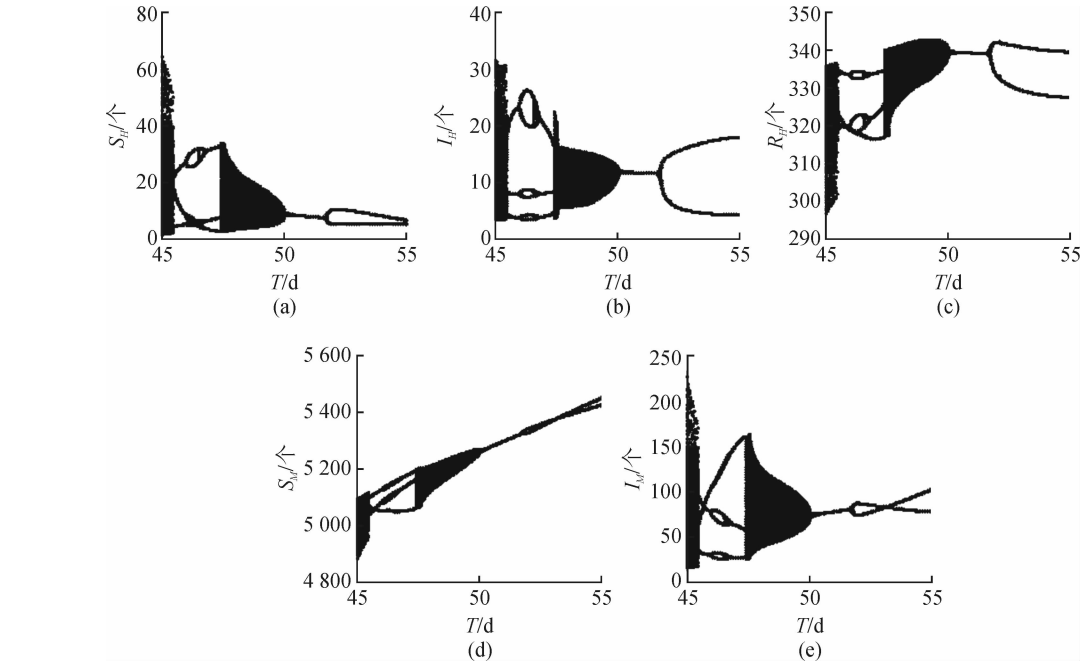

图 1 当脉冲强度 $p=0.85$，$\alpha_1=6$，$\alpha_2=3$，以脉冲周期为分支参数时式(1)中变量的分支图

Fig. 1 Bifurcation diagrams of system (1) with respect to bifurcation parameter T when $p=0.85$, $\alpha_1=6$ and $\alpha_2=3$

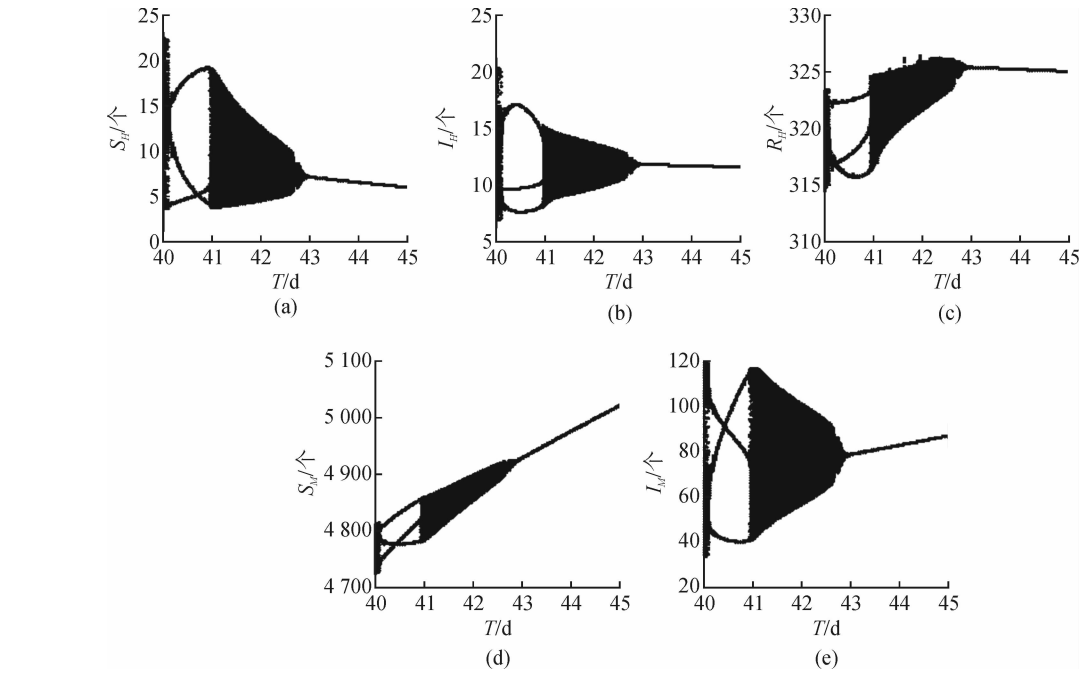

图 2 当脉冲强度 $p=0.85$，$\alpha_1=7$，$\alpha_2=4$，以脉冲周期为分支参数时式(1)中变量的分支图

Fig. 2 Bifurcation diagrams of system (1) with respect to bifurcation parameter T when $p=0.85$, $\alpha_1=7$ and $\alpha_2=4$

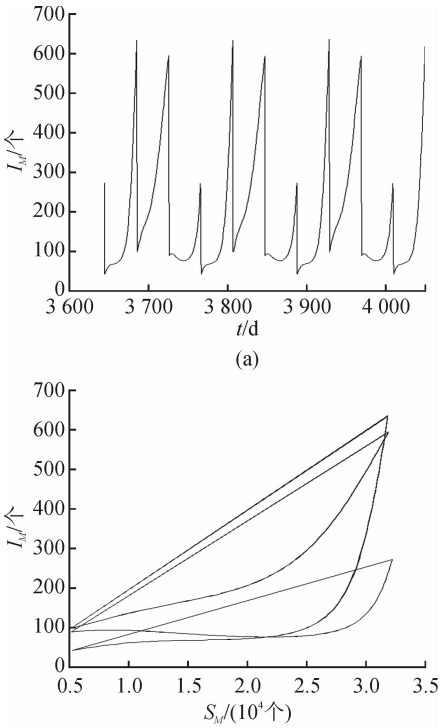

图 3　脉冲周期 $T=40.5$，式(1)中染病媒介 I_M 的时间序列图以及相应的解轨线

Fig. 3　When $T=40.5$, a numerical solution of system (1) about vectors as time tending to infinity and the corresponding trajectory

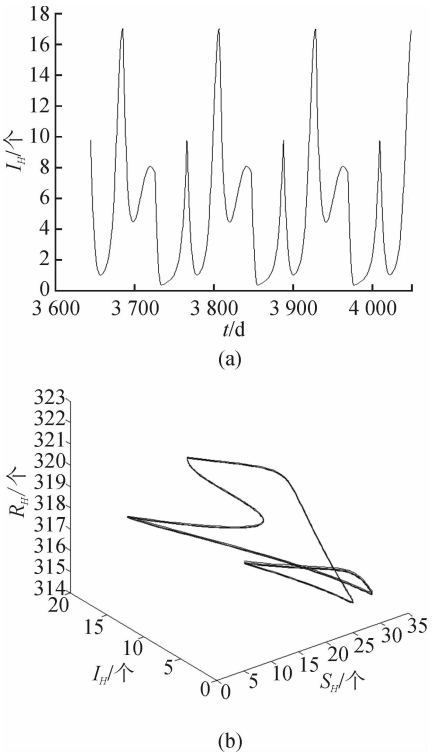

图 4　脉冲周期 $T=40.5$，式(1)中染病宿主 I_H 的时间序列图以及相应的解轨线

Fig. 4　When $T=40.5$, a numerical solution of system (1) about infected hosts as time tending to infinity and the corresponding trajectory

4.2　脉冲强度 p 的影响

当参数与初值的选取与 4.1 中相同，同样在 $\alpha_1=6$，$\alpha_2=3$ 以及 $\alpha_1=7$，$\alpha_2=4$ 两种情况下研究脉冲强度 p 对系统动力学性态的影响。当脉冲控制周期 $T=45$ 时，以 p 为分支参数，式(1)中各变量的动力学性态如 5 图和图 6 所示。

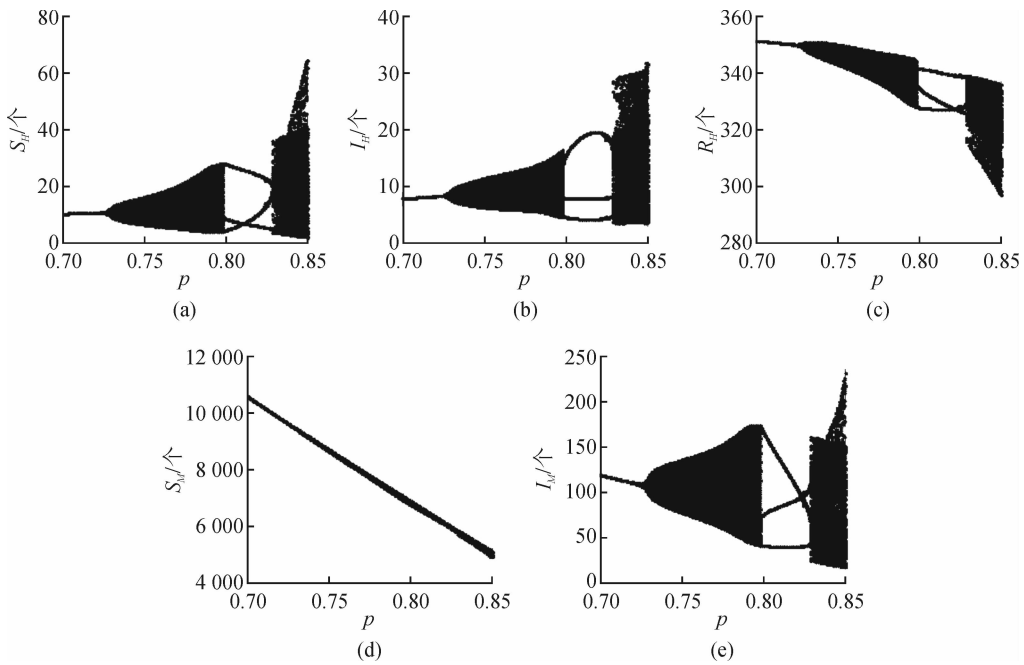

图 5　脉冲周期 $T=45$，$\alpha_1=6$，$\alpha_2=3$ 时，以脉冲强度 p 为分支参数时式(1)中变量的分支图

Fig. 5　Bifurcation diagrams of system (1) with respect to bifurcation parameter p when $T=45$, $\alpha_1=6$ and $\alpha_2=3$

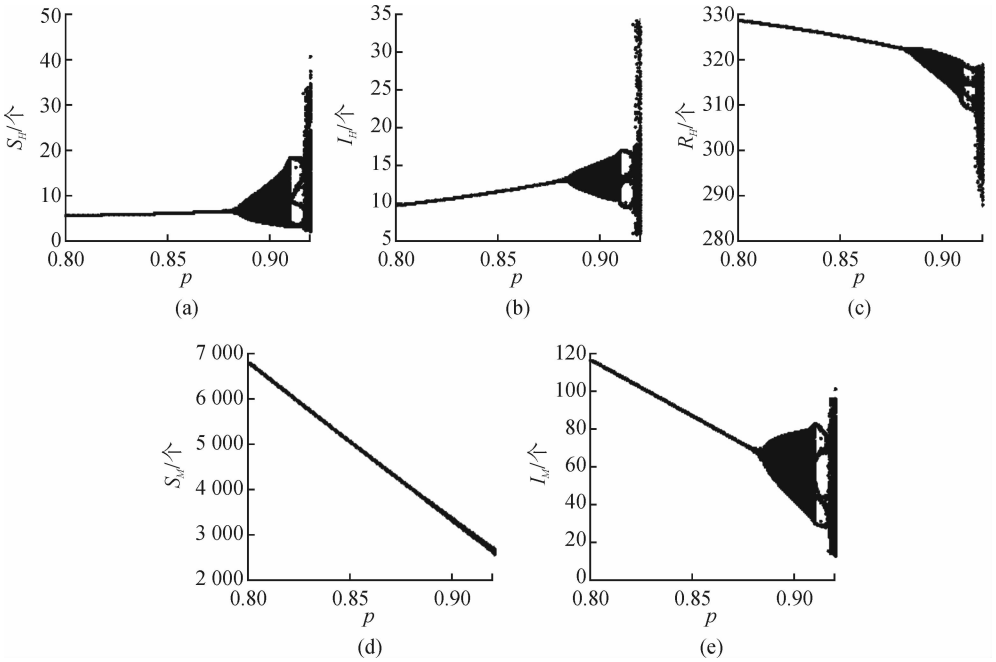

图 6 脉冲周期 $T=45$，$\alpha_1=7$，$\alpha_2=4$ 时，以脉冲强度 p 为分支参数时式(1)中变量的分支图

Fig. 6 Bifurcation diagrams of system (1) with respect to bifurcation parameter p when $T=45$, $\alpha_1=7$ and $\alpha_2=4$

由图 5 和图 6 可以看出，两种不同饱和治愈率下脉冲强度都对系统有重要的影响，出现了丰富的动力学性态。

以图 6(b)为例，当 $T=45$，$\alpha_1=7$，$\alpha_2=4$ 时，出现周期分岔→带有周期窗口的混沌带→倍周期分岔→周期吸引子→混沌。当 p 的取值在[0.8，0.880 4]之间时，系统一直处于周期分岔阶段，当脉冲强度 p 的取值大于 0.880 4 时，系统进入混沌状态。当脉冲强度 p 的取值在[0.880 4，0.92]之间时，系统进入了一个带有周期窗口的混沌区域。当脉冲强度 p 的取值大于 0.909 8 时，混沌突然消失，出现一个周期窗口。

另外，由图 6(a)可以看出，随着脉冲强度 p 取值的增加，易感人群的最大数量是非单调变化的。

图 7 和图 8 给出了 $p=0.91$ 时染病媒介 I_M 和染病宿主 I_H 的变化情况，对应于图 6 中两个变量的分支图。

由图 7(a)可以看出，当 $p=0.91$ 时，I_M 随着时间变化呈现出倍周期变化，对应的图 7(b)出现 $5T$ 周期吸引子的分岔。

由图 8(a)可以看出，当 $p=0.91$ 时，I_H 随着时间变化呈现出倍周期变化，对应的图 8(b)呈现 $5T$ 周期吸引子的分岔行为。脉冲强度 p 的取值增加到 0.917 8 时，因为系统周期解失去稳定性，系统又直接进入了混沌区域。

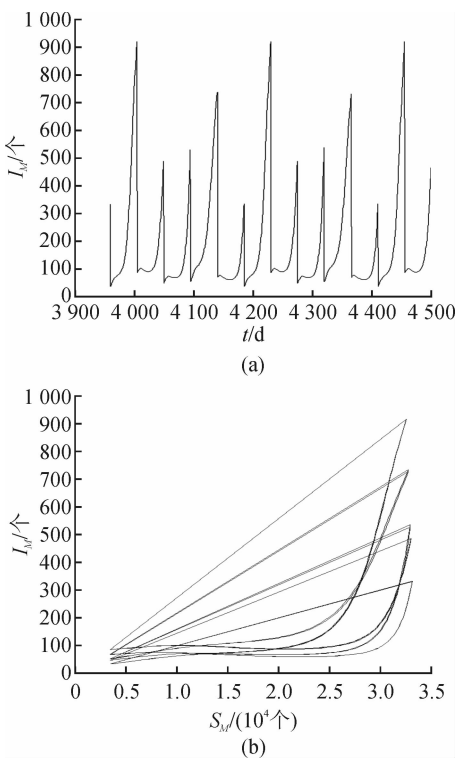

图 7 脉冲强度 $p=0.91$ 时，式(1)中染病媒介 I_M 的时间序列图以及相应的解轨线

Fig. 7 When $p=0.91$, a numerical solution of system (1) about vectors as time tending to infinity and the corresponding trajectory

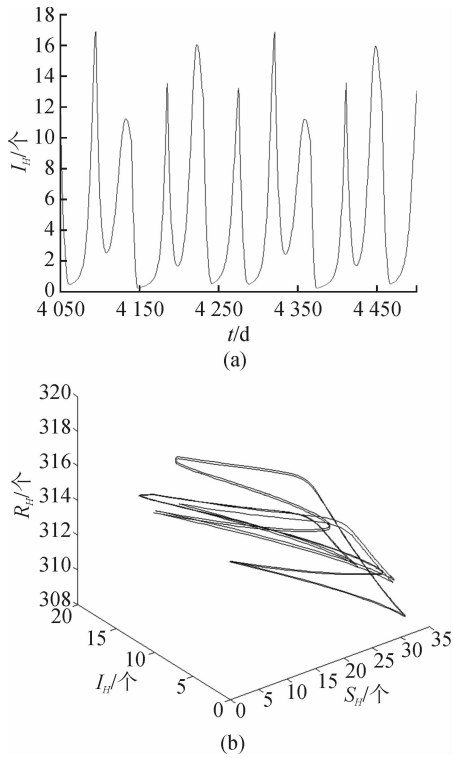

图 8 脉冲强度 $p=0.91$ 时，式(1)中染病宿主 I_H 的时间序列图以及相应的解轨线

Fig. 8 When $p=0.91$, a numerical solution of system (1) about infected hosts as time tending to infinity and the corresponding trajectory

5 结 语

本文通过建立一个 SIR-SI 媒介传染病模型，研究了固定时刻脉冲控制下系统的动力学性态。利用脉冲微分方程理论分析了模型无病周期解的存在性与稳定性，并定义出模型的阈值，即基本再生数，然后利用比较定理证明了当阈值大于 1 时疾病的一致持久性。同时，通过选取适当参数，对模型的动力学性态进行了数值模拟。主要以脉冲强度 p 和脉冲周期 T 为控制参数对系统的数值解、时间序列图和分支图分别进行了数值分析，同时也对比了不同饱和治愈率下系统各变量的分支变化情况。利用本文模型的理论和数值研究结果，可以为控制相关媒介传染病的流行和传播提供参考。

参考文献：

[1] XU X X, XIAO Y N, CHEKE R A. Models of impulsive culling of mosquitoes to interrupt transmission of West Nile virus to birds [J]. Applied Mathematical Modelling, 2015, 39(13): 3549-3568.

[2] ZHOU W K, XIAO Y N, CHEKE R A. A threshold policy to interrupt transmission of West Nile virus to birds[J]. Applied Mathematical Modelling, 2016, 40(19-20): 8794-8809.

[3] XU J H, ZHOU Y C. Hopf bifurcation and its stability for a vector-borne disease model with delay and reinfection[J]. Applied Mathematical Modelling, 2016, 40(3): 1685-1702.

[4] TANG B, XIAO Y N, TANG S Y, et al. Modelling weekly vector control against dengue in the Guangdong province of China [J]. Journal of Theoretical Biology, 2016, 410: 65-76.

[5] ZHANG T L, TENG Z D. An SIRVS epidemic model with pulse vaccination strategy[J]. Journal of Theoretical Biology, 2008, 250(2): 375-381.

[6] 于恒国. 带有脉冲扰动的生物系统的非线性动力学问题研究[D]. 成都：电子科技大学, 2011.
YU Hengguo. Research on non-linear question of dynamics in biological system with impulse perturbations [D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2011.

[7] ZHANG Z H, SUO Y H. Qualitative analysis of a SIR epidemic model with saturated treatment rate[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2010, 34(1-2):177-194.

[8] ZHANG S X, XU X X. Dynamic analysis and optimal control for a model of hepatitis C with treatment [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2017, 46:14-25.

[9] 张素霞，胡钢. SIRS 传染病模型的全局稳定及最优控制分析[J]. 西安理工大学学报, 2014, 30(3):320-325.
ZHANG Suxia, HU Gang. Optimal control and dynamic analysis of SIRS epidemic model[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2014, 30(3):320-325.

[10] BAĬNOV D, SIMEONOV P S. Systems with impulse effect: stability, theory, and applications[M]. New York: Halsted Press, 1989.

[11] BAĬNOV D, SIMEONOV P S. Impulsive differential equations: periodic solutions and applications[M]. Harlow: Longman Scientific and Technical Press, 1993.

[12] 马知恩，周义仓，王稳地，等. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京：科学出版社, 2004.

（责任编辑 周 蓓）