DOI:10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2019.01.017

关于伪 Smarandache 函数 m 次补数的一类均值

孙 忱, 李江华
(西安理工大学 理学院, 陕西 西安 710054)

摘要: 对于 $\forall n\in R^{+}$,伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 的定义为最小的正整数 m,使得 $n|m(m+1)/2$。基于上述定义,本文的主要目的是利用初等及解析的方法来研究伪 Smarandache 函数与其最大素因子的混合函数在 m 次补数序列上的一类均值问题,并给出它的两个渐近公式。

关键词: 伪 Smarandache 函数; m 次补数; 均值; 渐近公式

中图分类号: O156.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1006-4710(2019)01-0109-04

Mean value on *m*-power complement of pseudo Smarandache function

SUN Chen, LI Jianghua
(School of Sciences, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China)

Abstract: For any positive integer n, the pseudo Smarandache function $Z(n)$ is defined as the smallest positive integer m such as $n|m(m+1)/2$. Based on the above definition, the main purpose of this paper is using the elementary and analytic methods to study the hybrid mean value on m-power for pseudo Smarandache function and its maximum prime factor, and to obtain two asymptotic formulae for it.

Key words: pseudo-Smarandache function; m-power complement; mean value; asymptotic formula

对任意正整数 n,伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 定义为最小的正整数 m,使得 $n\left|\dfrac{m(m+1)}{2}\right.$,即:

$$Z(n)=\min\left\{m: n\left|\frac{m(m+1)}{2}\right., m\in N\right\} \tag{1}$$

$Z(n)$ 的前几项数值分别为 $Z(1)=1,Z(2)=3,Z(3)=2,Z(4)=7,Z(5)=4,Z(6)=3,Z(7)=6,Z(8)=15,Z(9)=8,Z(10)=4,Z(11)=10,Z(12)=8,Z(13)=12,Z(14)=7,\cdots$。

伪 Smarandache 函数是 David Gorski 教授首次提出来的[1]。同时也研究了 $Z(n)$ 的许多初等性质,并得到了一系列有意义的结果,例如:

1) 如果 $p\geqslant 3$ 为一个素数,则 $Z(p)=p-1$;

2) 如果 $n=2^{k}$,则 $Z(n)=2^{k+1}-1$;

3) 假设 p 是一个奇素数,则 $Z(2p)=p$,如果 $p=3(\mathrm{mod}4)$;$Z(2p)=p-1$,如果 $p\equiv 1(\mathrm{mod}4)$;

4) 对任意奇素数 $p,p|n$ 且 $n\neq p$,有 $Z(n)\geqslant p-1$。

关于 $Z(n)$ 的算数性质,许多学者也进行了研究,获得了不少有意义的结果。例如,冀永强[2]解决了 $Z(n)$ 的上下界问题:

$$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{8n+1})\leqslant Z(n)\leqslant\begin{cases}2n-1, & n\text{ 是偶数}\\ n-1, & n\text{ 是奇数}\end{cases} \tag{2}$$

Lou[3]用初等和解析的方法证明了下面的结论:

$$\sum_{n\leqslant x}\ln Z(n) = x\ln x+O(x) \tag{3}$$

与此对应,所谓的 Smarandache 函数 $S(n)=\min\{k:n\mid k!\}$。Le [4]证明了如果 n 是一个完美数,则有如下等式成立:

$$S(n)=Z(n) \tag{4}$$

文献[5]研究了数论函数方程 $Z(n)=\varphi_2(n)(n>1)$ 的可解性,其中 $\varphi_2(n)=\sum\limits_{\substack{i=1\\(i,n)=1}}^{[n/2]}1$ 为广义的 Euler 函数,其解有以下两种形式:

1) $n=4p$,其中 $p\equiv 1(\mathrm{mod}8)$;

收稿日期: 2018-06-20

基金项目: 陕西省自然科学基金资助项目(2017JQ1020)

作者简介: 孙忱,女,硕士生,研究方向为解析数论及其应用。E-mail:1240909167@qq.com

通讯作者: 李江华,女,副教授,研究方向为解析数论及其应用。E-mail:Jianghuali@xaut.edu.cn

2) $n=2^k p\ (k>2)$，其中 $p\equiv 1\ (\mathrm{mod}8)$ 且 $p|(2^{k-2}-1)$。

文献[6]研究了伪 Smarandache 函数的一个混合均值问题,并给出了渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{P(n)}{Z(n)}=\frac{x}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)\quad(5)$$

这里 $P(n)$是 n 的最大素因子,a_i为可计算的常数。

事实上,$Z(n)$与 $P(n)$之间有着非常密切的关系。所以对 $Z(n)$函数与其最大素因子 $P(n)$的研究非常必要。

本文受文献[7]的启发将利用初等和解析的方法研究 $Z(n)$及其最大素因子在 m 次幂补数 $a_m(n)$上的均值分布性质,并给出两个较强的渐近公式。式中 $\zeta(m)$表示 Riemann zeta 函数。

定理1 对任意实数 $x>1$,任意正整数 m,有渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}Z(a_m(n))=\frac{x^m\zeta(m)}{(m+1)\ln x}+O\left(\frac{x^m\zeta(m)}{(m+1)\ln^2 x}\right)\quad(6)$$

定理2 对任意实数 $x\geqslant 3$,任意正整数 m,有渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}(Z(a_m(n))-P^{m-1}(n)+1)^2=\frac{\zeta(\frac{2m-1}{2})x^{\frac{2m-1}{2}}}{(2m-1)\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{2m-1}{2}}}{\ln^2 x}\right)\quad(7)$$

1 几个引理

为了完成定理的证明,我们需要以下引理。

引理1[7] 对任意素数 $p\geqslant 3$ 和任意 $k\in N$,有 $Z(p^k)=p^k-1$。

引理2 设 $k\geqslant 2$ 是给定的整数,那么对任意充分大的正整数 n,有:

1) 如果 $P(n)>\sqrt{n}$,那么 $Z(a_m(n))=Z(P^{m-1}(n))=P^{m-1}(n)-1$。

2) 如果 $n=mp_1P(n)$,且 $n^{\frac{1}{3}}<p_1<P(n)\leqslant\sqrt{n}$,那么 $Z(a_m(n))=Z(P^{m-1}(n))=P^{m-1}(n)-1$。

3) 如果 $n=mP^2(n)$,且 $n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leqslant\sqrt{n}$,那么 $Z(a_m(n))=Z(P^{m-2}(n))=P^{m-2}(n)-1$。

证明:

1) 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 表示 n 的标准分解式,由于 $P(n)>\sqrt{n}$,故有:

$$P(n)=p_r^{\alpha_r},\quad \alpha_r=1\quad(8)$$

因此,根据 $Z(n)$的初等性质有:

$$Z(a_m(n))=Z(P^{m-1}(n))=P^{m-1}(n)-1\quad(9)$$

2) 由于 m 的任意素因子 p 都满足 $p<n^{\frac{1}{3}}$,而当 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 为 n 的标准分解式,显然 $a_m(n)=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_r^{\beta_r}$ 满足 $\beta_i\leqslant m-1,i=1,2,\cdots r$。于是,由于 $n^{\frac{1}{3}}<p_1<P(n)\leqslant\sqrt{n}$,则:

$$Z(a_m(n))=Z(P^{m-1}(n))=P^{m-1}(n)-1\quad(10)$$

3) 当 $n=mP^2(n)$,且 $n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leqslant\sqrt{n}$时,由于这时 $m<P(n)$。所以当 $m>2$ 时,便有 $Z(a_m(n))=Z(P^{m-2}(n))=P^{m-2}-1$成立。

引理3 设 $m\geqslant 2$ 是给定的整数,那么对任意实数 $x\geqslant 3$ 有估计式:

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}}}}(Z(a_m(n))-P^{m-1}(n)+1)^2\ll\frac{x^{\frac{2m}{3}}}{(2m-3)\ln x}\quad(11)$$

证明:

根据 $Z(n)$的初等性质,可得 $Z(n)\leqslant 2n-1$。则有:

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}}}}(Z(a_m(n))-P^{m-1}(n)+1)^2\ll\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}}}}(Z(a_m(n)))^2\leqslant\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}}}}(2P^{m-1}(n)-1)^2\ll\sum_{n\leqslant\frac{x}{p^2}}\sum_{p\leqslant x^{\frac{1}{3}}}p^{2m-2}\ll\frac{x^{\frac{2m}{3}}}{(2m-3)\ln x}\quad(12)$$

引理4 设 p 为素数,其中 k 为正整数,则有估计式:

$$\sum_{p\leqslant x}p^k=\frac{x^{k+1}}{(k+1)\ln x}+\frac{x^{k+1}}{(k+1)^2\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right)\quad(13)$$

证明:

参阅文献[8]。

2 定理的证明

这节将完成两个定理的证明。

如果 $P(n)$为 n 的最大素因子,那么可以把所有的正数 n 分为两个集合 A 和 B。其中,集合 $A=\{n\mid P(n)\leqslant\sqrt{n}\}$,集合 $B=\{n|P(n)>\sqrt{n}\}$.

对任意正整数 $n>1$,由 $Z(n)$的初等性质和集合 A 的定义,则有:

$$\sum_{n\leqslant x}Z(a_m(n))=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}Z(a_m(n))+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}Z(a_m(n))\quad(14)$$

故由上述引理1得:

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}Z(a_m(n))=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant\sqrt{n}}}Z(P^{m-1}(n))=$$
$$\sum_{\substack{np\leqslant x\\ P(n)\leqslant\sqrt{n}}}Z(P^{m-1}(n))+\sum_{\substack{np^{a}\leqslant x,a\geqslant 2\\ P(n)\leqslant\sqrt{n}}}Z(P^{m-1}(n))\leqslant$$
$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant\sqrt{n}}}(2P^{m-1}(n)-1)\ll$$
$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant\sqrt{n}}}n^{\frac{m-1}{2}}\ln n\ll x^{\frac{m+1}{2}}\ln x \tag{15}$$

对于集合 B，我们根据 $Z(n)$ 的定义和引理 2 的 1)，有：

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}Z(a_m(n))=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)>\sqrt{n}}}Z(P^{m-1}(n))=$$
$$\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n\leqslant p\leqslant\frac{x}{n}}(p^{m-1}-1) \tag{16}$$

由 Abel 求和公式[9]有：

$$\sum_{n\leqslant p\leqslant\frac{x}{n}}(p^{m-1}-1)=\pi(\frac{x}{n})x^{m-1}-\pi(n)n^{m-1}-$$
$$\int_{n}^{\frac{x}{n}}(m-1)\pi(t)t^{m-2}\,\mathrm{d}t=$$
$$\frac{x^m}{n^m\ln x}+\sum_{i=2}^{r}\frac{a_ix^m\ln^i n}{n^m\ln^i x}+O\Big(\frac{x^m}{n^m\ln^{r+1}x}\Big) \tag{17}$$

其中 $\pi(x)$ 为 x 的素因子的个数。$a_i(i=2,3,\cdots,r)$ 是可计算的常数。

根据式(16)～(17)，我们有：

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}Z(a_m(n))=\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\Big[\frac{x^m}{n^m\ln x}+\sum_{i=2}^{r}\frac{a_ix^m\ln^i n}{n^m\ln^i x}+$$
$$O\Big(\frac{x^m}{n^m\ln^{r+1}x}\Big)\Big]=\frac{x^m}{\ln x}\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{n^m}+\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{i=2}^{r}\frac{a_ix^m\ln^i n}{n^m\ln^i x}+$$
$$O\Big(\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{x^m}{n^m\ln^{r+1}x}\Big)=\frac{x^m\zeta(m)}{(m+1)\ln x}+O\Big(\frac{x^m\zeta(m)}{(m+1)\ln^2 x}\Big) \tag{18}$$

综上所述，结合式(14)～(18)有：

$$\sum_{n\leqslant x}Z(a_m(n))=\frac{x^m\zeta(m)}{(m+1)\ln x}+O\Big(\frac{x^m\zeta(m)}{(m+1)\ln^2 x}\Big) \tag{19}$$

故定理 1 成立，接下来我们证明定理 2。

由引理 2 的结论有：如果 $P(n)>\sqrt{n}$，则有 $Z(a_m(n))-P^{m-1}(n)+1=0$。故：

$$\sum_{n\leqslant x}(Z(a_m(n))-P^{m-1}(n)+1)^2=$$
$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)>\sqrt{n}}}(Z(a_m(n))-P^{m-1}(n)+1)^2+$$
$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant\sqrt{n}}}(Z(a_m(n))-P^{m-1}(n)+1)^2=$$
$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant\sqrt{n}}}(Z(a_m(n))-P^{m-1}(n)+1)^2=$$
$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leqslant\sqrt{n}}}(Z(a_m(n))-P^{m-1}(n)+1)^2+$$
$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}}}}(Z(a_m(n))-P^{m-1}(n)+1)^2 \tag{20}$$

再根据引理 3，可得：

$$\sum_{n\leqslant x}(Z(a_m(n))-P^{m-1}(a)+1)^2=$$
$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leqslant\sqrt{n}}}(Z(a_m(n))-P^{m-1}(n)+1)^2+O\Big(\frac{x^{\frac{2m}{3}}}{(2m-3)\ln x}\Big) \tag{21}$$

而当 n 满足 $n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leqslant\sqrt{n}$ 时，只有如下三种情况：

a) $n=aP(n)$，且 $P(a)<n^{\frac{1}{3}}$；

b) $n=ap_1P(n)$，且 $a<n^{\frac{1}{3}}<p_1<P(n)$；

c) $n=aP^2(n)$，且 $a<n^{\frac{1}{3}}<P(n)$。

对于情形 a)和 b)中的 n，显然，在这两种情况下有 $Z(a_m(n))-P^{m-1}(n)+1=0$。故这两个和式分别为 0。而对于 c)中的 n，当 $m\geqslant 3$ 时，有：

$$Z(a_m(n))=P^{m-2}(n)-1$$

则有：

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leqslant\sqrt{n}\\ n=ap^2}}(Z(a_m(n))-P^{m-1}(n)+1)^2=$$
$$\sum_{\substack{ap^2\leqslant x\\ (ap^2)^{\frac{1}{3}}<P(n)\leqslant\sqrt{ap^2}}}(Z(a_m(n))-P^{m-1}(n)+1)^2=$$
$$\sum_{a\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{a^2<p^2\leqslant\frac{x}{a}}(p^{m-2}-p^{m-1})^2 \tag{22}$$

故结合式(20)～(22)及引理 4，有：

$$\sum_{n\leqslant x}(Z(a_m(n))-P^{m-1}(n)+1)^2=\sum_{a\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{a^2<p^2\leqslant\frac{x}{a}}(p^{m-2}-p^{m-1})^2+O\Big(\frac{x^{\frac{2m}{3}}}{(2m-3)\ln x}\Big)=$$

$$\sum_{a\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{a<p\leqslant\sqrt{\frac{x}{a}}}[(p^{m-2})^2+(p^{m-1})^2-2p^{2m-3}]+O\left(\frac{x^{\frac{2m}{3}}}{(2m-3)\ln x}\right)=$$

$$\sum_{a\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\left[\frac{x^{\frac{2m-1}{2}}}{(2m-1)a^{\frac{2m-1}{2}}(\ln\sqrt{x}-\ln\sqrt{m})}+O\left(\frac{x^{\frac{2m-1}{2}}}{a^{\frac{2m-1}{2}}\ln^{m+1}x}\right)\right]+O\left(\frac{x^{\frac{2m}{3}}}{(2m-3)\ln x}\right)=$$

$$\frac{x^{\frac{2m-1}{2}}}{(2m-1)\ln\sqrt{x}}\sum_{a\leqslant e^{\sqrt{\ln x}}}\frac{1}{a^{\frac{2m-1}{2}}}+O\left(\frac{x^{\frac{2m-1}{2}}}{\ln^2\sqrt{x}}\right)+O\left(\frac{x^{\frac{2m}{3}}}{(2m-3)\ln x}\right)=\frac{\zeta(\frac{2m-1}{2})x^{\frac{2m-1}{2}}}{(2m-1)\ln\sqrt{x}}+O\left(\frac{x^{\frac{2m-1}{2}}}{\ln^2\sqrt{x}}\right)\tag{23}$$

于是完成了定理2的证明。

参考文献:

[1] GORSKID. The pseudo Smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13(1/2/3): 140-149.

[2] 冀永强. 伪Smarandache函数的上下界[J]. 数学的实践与认识, 2016, 46(1): 275-279.
JI Yongqiang. Upper bounds and lower bounds for the pseudo-Smarandache function[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2016, 46(1): 275-279.

[3] LOU Yuanbing. On the pseudo Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2007, 3(4): 48-50.

[4] LE Maohua. An equation concerning the Smarandache LCM function[J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14(1): 186-188.

[5] 赵祈芬, 高丽. 数论函数方程 $Z(n)=\varphi_2(n)$ 的解[J]. 云南师范大学学报(自然科学版), 2018, 38(2): 34-38.
ZHAO Qifen, GAO Li. Solutions of arithmetic function equation $Z(n)=\varphi_2(n)$[J]. Journal of Yunnan Normal University(Natural Sciences Edition), 2018, 38(2): 34-38.

[6] CHENG Lin. On the mean value of the Pseudo-Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2007, 3(3): 97-100.

[7] 李江华, 王睿莉, 曲桢, 等. 形如 a…a0…0 的完全方幂[J]. 西安理工大学学报, 2012, 28(3): 308-310.
LI Jianghua, WANG Ruili, QU Zhen, et al. Perfect powers of the form a…a0…0 [J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2012, 28(3): 308-310.

[8] MAJUMDAR A A K. On some pseudo Smarandache function related triangles[J]. Scientia Magna, 2008, 4(3): 95-105.

[9] 潘承洞. 数论基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 2012.

(责任编辑 王绪迪)