

文章编号: 1006-4710(2012)04-0427-05

圆管边界层动能积分方程及其应用

宁利中, 郝建武, 王卓运

(西安理工大学 水利水电学院, 陕西 西安 710048)

摘要: 根据动能守恒原理建立了圆管边界层的动能积分方程, 在边界层内流速分布具有相似性的假设下, 选用二次抛物线速度剖面, 对圆管进口段边界层进行了计算, 结果说明计算值与精确解一致。

关键词: 动能守恒原理; 动能积分方程; 边界层; 圆管

中图分类号: TV135

文献标志码: A

The Energy Integral Equation for the Boundary Layer in a Round Pipe and Its Application

NING Lizhong, HAO Jianwu, WANG Zhuoyun

(Faculty of Water Resources and Hydroelectric Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an, 710048, China)

Abstract: Based on the energy conservation law, the energy integral equation for the boundary layer in a round pipe is suggested in this paper. Assuming that the velocity distribution in the boundary layer possesses similarity and using the velocity profile with quadratic parabola, the laminar boundary layer development in a round pipe is computed. The computed result is found to be in agreement with the exact solution.

Key words: energy conservation law; energy integral equation; boundary layer; round pipe

圆管流是工程中经常遇到的一种流动现象, 例如水利工程中的压力泄水隧洞、压力引水钢管、供生活和工农业用水的给水水管及在供热、供煤气及通风工程中输送流体(热水、空气、蒸气、煤气)的管道输运等均属管流现象。

圆管流动与明渠流动的显著区别是管流没有自由面。当边界层发展到圆管轴线时, 在管内形成充分紊流。圆管流动的另一特点是随边界层的发展, 位移厚度的增加, 管内势流流速也在增加。

关于圆管流进口段特性的研究在传热学等方面开展得较早^[1-5]。随着我国水利水电事业的飞速发展, 高坝建设中泄水建筑物的水力学问题越来越突出。而超高速水流引起的泄水建筑物的许多水力现象都与边界层特性有关, 特别是近年来边界层理论在分析明流泄洪引起的空化、空蚀、脉动、振动及掺气等高速水流问题中的应用和已经取得的进展, 使人们进一步认识到边界层理论在分析高速流现象中的地位和作用。但对于泄水中、深孔及管道中的管

流边界层的研究则较少。而实际工程中, 管流进口段也存在诸如明流泄洪中的水流空化、脉动、建筑物的空蚀、振动等高速水力学问题。因此, 研究管流边界层具有十分重要的实际意义。

通过对管流进口段边界层发展的研究, 将会为进一步探讨流动阻力问题提供基础, 为理解高速水流引起的其它问题提供有益的帮助。

边界层理论在水利工程泄水建筑物水力学分析中的应用是近几十年的事, 而大量研究几乎全部集中在明流分析中^[6-11], 圆管流边界层的分析与研究几乎是空白, 极少的研究工作也是刚刚起步^[12-17], 有待进一步探讨与完善。本文建立圆管流动条件下的边界层动能积分方程, 并将其应用于圆管层流边界层的分析计算中。

1 边界层动能积分方程

由于圆管边界层流动是以 x 轴为对称的, 因此, 可以在横向取 θ 弧度中心角的过水断面、在纵向取

收稿日期: 2012-07-20

基金项目: 陕西省重点学科建设专项资金资助项目。

作者简介: 宁利中(1961-), 男, 陕西西安人, 教授, 博士, 研究方向为 Rayleigh-Benard 对流、高速水力学、边界层理论。

E-mail: ninglz@xaut.edu.cn。

dx 长度作为研究对象,边界层沿 x 的发展情况及在圆管横断面的流动情况如图 1 所示。

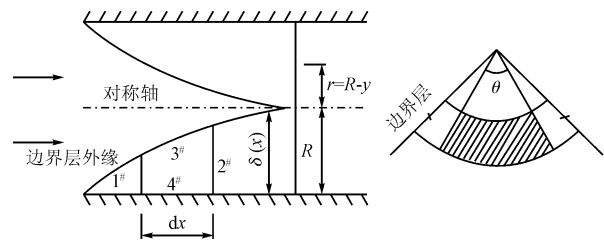


图 1 圆管边界层流动示意图

Fig. 1 Boundary layer flow in a pipe

在 dt 时间内,通过 1#面流入控制体的动能为:

$$dt \int_0^\delta \rho \frac{u_x^3}{2} dA = \theta dt \int_0^\delta \rho \frac{u_x^3}{2} (R - y) dy$$

通过 2#面流出控制体的动能为:

$$dt \left[\int_0^\delta \rho \frac{u_x^3}{2} dA + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta \rho \frac{u_x^3}{2} dA \right) dx \right] =$$

$$\theta dt \left\{ \int_0^\delta \rho \frac{u_x^3}{2} (R - y) dy + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^\delta \rho \frac{u_x^3}{2} (R - y) dy \right] dx \right\}$$

通过 3#面流入控制体的动能为:

$$dt \frac{U^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^\delta \rho u_x dA \right] dx =$$

$$\theta dt \frac{U^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^\delta \rho u_x (R - y) dy \right] dx$$

在 dt 时间内,动能的总变化为流出的动能与流入动能之差,即:

$$\theta dt \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^\delta \rho \frac{u_x^3}{2} (R - y) dy \right] dx - \frac{U^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^\delta \rho u_x (R - y) dy \right] dx \right\} \quad (1)$$

式中 U 为边界层外 x 方向的势流速度, u_x 为边界层内 x 方向的流速。

根据动能定律,在 dt 时段内动能的变化应该等于外力与内力功之和。由于 4#面流速为零,而 3#面上粘性力几乎为零,因此粘性力在 3#、4#面上的功为零。作用在控制体 1234 上的功应为压力的功和水流内部粘性力的功之和。

在 dt 时段内,作用在控制体 1234 上的压力功为:

$$- \int_{12341} p u_n dA dt$$

式中 n 表示控制体的外法线方向。

根据高斯公式,有:

$$\int_k p u_n dA = \iiint_A \text{div}(pu) \theta (R - y) dy dx$$

又因:

$$\text{div}(pu) = \frac{\partial}{\partial x} (p u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (p u_y) =$$

$$p \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} u_x + \frac{\partial p}{\partial y} u_y$$

对于不可压缩流体,有:

$$\text{div } u = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

在小曲率边界层内, $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, 因此,在 dt 时段内,作用在控制体 1234 上的压力功可表示为:

$$- \int_{1234} p u_n dA dt = - \int \frac{\partial p}{\partial x} u_x \theta (R - y) dy dx dt$$

由于压力 p 仅是 x 的函数,与 y 无关,则上式右边可简化为:

$$- \frac{dp}{dx} \theta dx \left[\int_0^\delta u_x (R - y) dy \right] \quad (2)$$

内力功即为控制体 1234 内流体粘性力所做的功,也就是由摩擦转变为热而耗散的能量。那么在 dt 时间内,控制体 1234 内转化的热能为:

$$dt dx \int_0^\delta \tau \frac{\partial u_x}{\partial y} \theta (R - y) dy \quad (3)$$

内力和外力的总功为表达式(2)与表达式(3)之和,即:

$$- \frac{dp}{dx} \theta dt dx \int_0^\delta u_x (R - y) dy - \theta dt dx \int_0^\delta \tau \frac{\partial u_x}{\partial y} (R - y) dy \quad (4)$$

考虑 δ 仅是 x 的函数,式(1)中偏微分变成全微分。根据动能定律,式(1)应等于式(4),并同除以 $dx dt$,有:

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho \frac{u_x^3}{2} (R - y) dy - \frac{U^2}{2} \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u_x (R - y) dy = - \frac{dp}{dx} \int_0^\delta u_x (R - y) dy - \int_0^\delta \tau \frac{\partial u_x}{\partial y} (R - y) dy \quad (5)$$

由于 $\frac{dp}{dx} = -\rho U \frac{dU}{dx}$, 故有:

$$U^2 \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u_x \left(1 - \frac{y}{R} \right) dy = \frac{d}{dx} \left[U^2 \int_0^\delta \rho u_x \left(1 - \frac{y}{R} \right) dy \right] - 2U \frac{dU}{dx} \int_0^\delta \rho u_x \left(1 - \frac{y}{R} \right) dy$$

考虑上式,式(5)可简化为:

$$\frac{\rho}{2} \frac{d}{dx} \int_0^\delta u_x (U^2 - u_x^2) \left(1 - \frac{y}{R} \right) dy = \int_0^\delta \tau \frac{\partial u_x}{\partial y} \left(1 - \frac{y}{R} \right) dy \quad (6)$$

这是动能积分方程的一般表达式,式(6)中,

$$\tau = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} - \rho \overline{u'_x u'_y}$$

在层流条件下, $\rho \overline{u'_x u'_y} = 0$, $\tau = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y}$, 上式可

简化为:

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta u_x (U^2 - u_x^2) (1 - \frac{y}{R}) dy = 2v \int_0^\delta (\frac{\partial u_x}{\partial y})^2 (1 - \frac{y}{R}) dy \quad (7)$$

式中 $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ 。

若令边界层能量损失厚度为:

$$\delta_3 = \int_0^\delta \frac{u_x}{U} (1 - \frac{u_x^2}{U^2}) (1 - \frac{y}{R}) dy \quad (8)$$

则式(6)变成:

$$\frac{d}{dx} (U^3 \delta_3) = \frac{2}{\rho} \int_0^\delta \tau \frac{\partial u_x}{\partial y} (1 - \frac{y}{R}) dy \quad (9)$$

引入耗散积分:

$$D = \int_0^\delta \tau (\frac{\partial u_x}{\partial y}) (1 - \frac{y}{R}) dy$$

式(9)可改写为:

$$\frac{d}{dx} (U^3 \delta_3) = \frac{2D}{\rho} \quad (10)$$

定义耗散积分系数 $C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^3}$, 则式(10)可

简化为:

$$\frac{1}{U^3} \frac{d}{dx} (U^3 \delta_3) = C_D \quad (11)$$

式(6)、(9)、(10)及(11)是不同形式的动能积分表达式, 既适合于层流边界层, 也可用于紊流边界层。对于层流, $\tau = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y}$, 对于紊流, 以上各式中流速等特征量必须采用时均值。

关于能量损失厚度的物理意义, 文献[14]已作了介绍, 根据 δ_3 的定义, 对于圆管情况, 有:

$$2\pi R \delta_3 \cdot \rho U^3 = \int_0^\delta \rho u_x (U^2 - u_x^2) 2\pi (R - y) dy$$

由上式可得式(8)。

2 动能积分方程的应用

利用动能积分关系式求解层流边界层发展时需补充方程。在圆管流动条件下, 流速分布沿程是相似的。二次近似的流速分布形式为:

$$\frac{u_x}{U} = 2(\frac{y}{\delta}) - (\frac{y}{\delta})^2 \quad (12)$$

式(12)满足 $u_x|_{y=0} = u'_x|_{y=\delta} = 0, u_x|_{y=\delta} = U$,

将上式代入边界层能量损失厚度的定义, 有:

$$\delta_3 = \int_0^\delta \{1 - [2(\frac{y}{\delta}) - (\frac{y}{\delta})^2]^2\} [2(\frac{y}{\delta}) - (\frac{y}{\delta})^2] (1 - \frac{y}{R}) dy = \frac{22}{105}\delta - \frac{71}{840}\frac{\delta^2}{R} \quad (13)$$

在层流条件下, 耗散积分可表示为:

$$D = \int_0^\delta \tau \frac{\partial u_x}{\partial y} (1 - \frac{y}{R}) dy = \mu \int_0^\delta (\frac{\partial u_x}{\partial y})^2 (1 - \frac{y}{R}) dy \quad (14)$$

将式(12)对 y 求导, 得:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = U[2\frac{1}{\delta} - 2\frac{y}{\delta^2}] \quad (15)$$

将式(15)代入式(14), 得:

$$D = \mu \int_0^\delta 4U^2 \frac{1}{\delta^2} [1 - \frac{y}{\delta}]^2 (1 - \frac{y}{R}) dy = \mu U^2 [\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\frac{\delta}{R}] \frac{1}{\delta} \quad (16)$$

利用连续方程, 可得平均流速与势流速度的关系为^[14]:

$$\frac{\bar{u}}{U} = 1 - \frac{2}{3}(\frac{\delta}{R}) + \frac{1}{6}(\frac{\delta}{R})^2 \quad (17)$$

式(13)与式(17)相除, 得:

$$U^3 \delta_3 = \bar{u}^3 \frac{\frac{22}{105}\delta - \frac{71}{840}\frac{\delta^2}{R}}{[1 - \frac{2}{3}(\frac{\delta}{R}) + \frac{1}{6}(\frac{\delta}{R})^2]^3}$$

故:

$$\frac{1}{\bar{u}^3} \frac{d(U^3 \delta_3)}{dx} = \frac{(\frac{22}{105} - \frac{71}{420}\frac{\delta}{R})[1 - \frac{2}{3}(\frac{\delta}{R}) + \frac{1}{6}(\frac{\delta}{R})^2] + [\frac{2}{R} - \frac{\delta}{R^2}](\frac{22}{105}\delta - \frac{71}{840}\frac{\delta^2}{R})}{[1 - \frac{2}{3}(\frac{\delta}{R}) + \frac{1}{6}(\frac{\delta}{R})^2]^4} \frac{d\delta}{dx} \quad (18)$$

将式(17)代入式(16)后, 将式(16)及式(18)代入动能积分方程(9), 有:

$$\bar{u} \frac{(\frac{22}{105} - \frac{71}{420}\frac{\delta}{R})[1 - \frac{2}{3}(\frac{\delta}{R}) + \frac{1}{6}(\frac{\delta}{R})^2] + \frac{\delta}{R}(2 - \frac{\delta}{R})(\frac{22}{105} - \frac{71}{840}\frac{\delta}{R})}{[1 - \frac{2}{3}(\frac{\delta}{R}) + \frac{1}{6}(\frac{\delta}{R})^2]^2} \frac{d\delta}{dx} = \nu [\frac{8}{3} - \frac{2}{3}\frac{\delta}{R}] \frac{1}{\delta} \quad (19)$$

整理上式, 得:

$$\int_0^\delta \frac{1}{\bar{u}R} dx = \int_0^\delta \frac{(\frac{22}{105} - \frac{71}{420} \frac{\delta}{R}) [1 - \frac{2}{3} (\frac{\delta}{R}) + \frac{1}{6} (\frac{\delta}{R})^2] + \frac{\delta}{R} (2 - \frac{\delta}{R}) (\frac{22}{105} - \frac{71}{840} \frac{\delta}{R})}{\frac{2}{3} (4 - \frac{\delta}{R}) [1 - \frac{2}{3} (\frac{\delta}{R}) + \frac{1}{6} (\frac{\delta}{R})^2]^2} \frac{\delta}{R} d\delta \quad (20)$$

为了获得式(20)的解析解形式,将上式右边分母进行简化处理,即:

$$1 - \frac{2}{3} (\frac{\delta}{R}) + \frac{1}{6} (\frac{\delta}{R})^2 \approx [1 + \frac{13}{20} (\frac{\delta}{R}) + \frac{7}{20} (\frac{\delta}{R})^2]^{-1} \quad (21)$$

$$(1 - \frac{1}{4} \frac{\delta}{R})^{-1} \approx 1 + \frac{1}{4} \frac{\delta}{R} + \frac{1}{16} (\frac{\delta}{R})^2 \quad (22)$$

式(22)的最大误差发生在 $\frac{\delta}{R} = 1$ 处,可以证明其值小于 -1.56% ,其积分后的误差则更小,式(21)的误差在 10^{-4} 以上,因而其精度是足够的,将式(21)、(22)代入式(20)可得:

$$\frac{1}{\bar{u}R} x = \int_0^\delta \frac{3}{8} [1 + \frac{1}{4} \frac{\delta}{R} + \frac{1}{16} (\frac{\delta}{R})^2] \left\{ (\frac{22}{105} - \frac{71}{420} \frac{\delta}{R}) [1 + \frac{13}{20} (\frac{\delta}{R}) + \frac{7}{20} (\frac{\delta}{R})^2] + \frac{\delta}{R} (2 - \frac{\delta}{R}) (\frac{22}{105} - \frac{71}{840} \frac{\delta}{R}) [1 + \frac{13}{20} (\frac{\delta}{R}) + \frac{7}{20} (\frac{\delta}{R})^2]^2 \right\} \frac{\delta}{R} d\delta$$

将上式右边被积函数经过复杂运算并积分,得:

$$\frac{x}{R} = \frac{11}{280} \frac{\bar{u}R}{v} (\frac{\delta}{R})^2 f_1(\frac{\delta}{R}) \quad (23)$$

式中:

$$f_1(\frac{\delta}{R}) = 1 + \frac{283}{330} (\frac{\delta}{R}) + \frac{109}{320} (\frac{\delta}{R})^2 + \frac{1109}{8800} (\frac{\delta}{R})^3 + \frac{521}{211200} (\frac{\delta}{R})^4$$

将式(17)代入式(23)可得:

$$\frac{x}{R} = \frac{11}{280} \frac{UR}{v} (\frac{\delta}{R})^2 f(\frac{\delta}{R})$$

或

$$\delta = \sqrt{\frac{280}{11} \frac{vx}{U} \frac{1}{f}} \quad (24)$$

式中:

$$f = [1 - \frac{2}{3} \frac{\delta}{R} + \frac{1}{6} (\frac{\delta}{R})^2] f_1$$

当 $R \rightarrow \infty$ 时, $f = 1$, 由式(24)可得平板边界层厚度计算式为:

$$\delta = 5.045 \sqrt{\frac{vx}{U}} \quad (25)$$

将上式结果和文献[14]中相同流速分布假设下,动量积分方程计算的层流边界层厚度及精确解比较,可以发现式(25)的计算结果比动量关系式结果更令人满意,并与精确解 $\delta = 5.0 \sqrt{\frac{vx}{U}}$ 十分吻合。

3 结 语

本文推导了圆管边界层动能积分方程,在边界层内流速分布具有相似性的假设下,将其应用于层流边界层的计算,计算结果与精确解十分接近。

参考文献:

- [1] 王补宣. 圆管进口段层流边界层发展区的流动阻力[J]. 力学学报, 1963, 6(1): 38-52.
Wang Buxuan. The flow friction for isothermal laminar boundary layer flow in the entrance region of a circular tube [J]. Acta Mechanica Sinica, 1963, 6(1): 38-52.
- [2] 王补宣. 圆管进口段湍流边界层发展区的流动阻力[J]. 高等学校自然科学学报: 机械动力版, 1965, (5).
Wang Buxuan. The flow friction for turbulent boundary layer flow in the entrance region of a circular tube [J]. Science Journal of High School, 1965, (5).
- [3] 王致清. 圆管层流与湍流进口段效应修正系数的研究[J]. 应用数学和力学, 1982, 3(3).
Wang Zhiqing. Study on correction coefficients of laminar and turbulent entrance region effect in round pipe [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1982, 3(3).
- [4] Barbin A R, Jones J B. Turbulent flow in the inlet region of a smooth pipe [J]. Trans ASME Series D, Journal of Basic Eng's, 1963, 85(1).
- [5] 王补宣. 圆管进口段层流边界层发展区的放热规律[J]. 高等学校自然科学学报: 机械动力版, 1964, (1).
Wang Buxuan. The exothermic law for isothermal laminar boundary layer flow in the entrance region of a circular tube [J]. Science Journal of High School, 1964, (1).
- [6] 宁利中, 李建中, 张新强. 有限水深陡坡上的边界层动量积分方程及其应用[J]. 水利学报, 1995, 26(S1): 1-7.
Ning Lizhong, Li Jianzhong, Zhang Xinqiang. The momentum integral equation for boundary layer on steep slope with limited flow depth and its application [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1995, 26(S1): 1-7.
- [7] Ning Lizhong, Li Jianzhong, Zhang Xinqiang. Hydraulic characteristics in buckets of outlet structure [C] // Advances in Hydro-Science and Engineering. Beijing, China: Tsing-

- hua University Press, 1995:322-329.
- [8] Ning Lizhong, Wang Changjiang. Inception of air entrainment on steep slope [J]. Journal of Hydrodynamics B, 1993,5(3):9-15.
- [9] Ning Lizhong, Li Jianzhong, Wang Changjiang. A Method for calculating turbulent boundary layer on overflow chute and bucket [C]// Advances in Hydro-Science and Engineering. Mississippi University Press,1993.
- [10] 宁利中,王长江,李建中. 粗糙溢流反弧段紊流边界层的动量积分方程解法 [J]. 水利学报, 1992, 23 (10):14-20.
Ning Lizhong, Wang Changjiang, Li Jianzhong. Solution of turbulent boundary layer on bucket of spillway with rough-surface by momentum integral equation [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1992,23(10):14-20.
- [11] 吴文平, 张晓宏, 田嘉宁, 等. 考虑重力及离心力的溢流坝反弧段紊流边界层动量积分方程的数值计算 [J]. 水动力学研究与进展, 2007,22 (1):9-16.
Wu Wenping, Zhang Xiaohong, Tian Jianing, et al. Numerical simulation of momentum integral equation of turbulent boundary on spillway bucket considering the gravity and centrifugal force [J]. Chinese Journal of Hydrodynamics, 2007,22(1):9-16.
- [12] Ning Lizhong, Li Jianzhong. Turbulent boundary layer development in the entrance region of a smooth pipe [J]. Journal of Hydrodynamics B,1992,4(3):17-26.
- [13] 宁利中, 李建中. 粗糙圆管进口段紊流边界层发展区的流动特性 [J]. 水动力学研究与进展, 1990, 7(2):121-131.
- Ning Lizhong, Li Jianzhong. The flow characteristics for turbulent boundary layer flow in the entrance region of the rough pipe [J]. Chinese Journal of Hydrodynamics, 1990, 7(2):121-131.
- [14] 李建中, 宁利中. 水流边界层理论 [M]. 北京:水利电力出版社,1994.
- [15] 徐世杰, 黄龙, 樊小朝. 层流边界层的可视化研究 [J]. 山东电力高等专科学校学报, 2012, 15 (2):39-41.
Xu Shijie, Huang Long, Fan Xiaozhao. Study on the Laminar boundary layer flow visualization [J]. Journal of Shandong College of Electric Power, 2012, 15 (2):39-41.
- [16] 孙雁, 钟万锒. 二维边界层方程的交底迭代求解 [J]. 计算力学学报, 2010,27(3):385-390.
Sun Yan, Zhong Wansi. Iterative solution for two-dimensional boundary layer equations [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2010, 27(3):385-390.
- [17] 杨纪伟, 胥战海, 李书芳, 等. 基于 FLUENT 的明渠紊流边界层数值模拟 [J]. 人民黄河, 2009, 31 (1):30-31.
Yang Jiwei, Xu Zhanhai, Li Shufang, et al. Numerical simulation of turbulent boundary layer in opening channel based on FLUENT [J]. Yellow River, 2009, 31 (1):30-31.

(责任编辑 王卫勋)