

DOI:10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2018.02.012

Pound-Drever-Hall 激光稳频系统线性化复频域建模及分析研究

苏娟^{1,2}, 焦明星¹, 张凌晨¹, 邢俊红¹

(1. 西安理工大学 机械与精密仪器工程学院, 陕西 西安 710048;

2. 西安石油大学 光电油气测井与检测教育部重点实验室, 陕西 西安 710065)

摘要: Pound-Drever-Hall(PDH)稳频系统利用了调制光谱技术和外差探测技术,将激光频率锁定在 F-P 参考腔的中心频率上以实现稳频。鉴频曲线的线性区为 PDH 系统的频率快速捕获区。在此区域内,PDH 误差信号与激光频率差成正比。本文建立了该频率快速捕获区的 PDH 稳频系统线性化复频域模型,研究了系统的稳定性和稳态误差。F-P 参考腔作为稳频基准,其干扰对系统稳频性能影响极大。将 F-P 参考腔干扰作为噪声源,分析了系统的扰动误差。分析了系统动态性能,研究了频率锁定的暂态响应过程,给出了系统参数设计依据。

关键词: Pound-Drever-Hall 稳频; 线性化复频域模型; 稳态误差; 扰动误差; 暂态响应

中图分类号: TN249 **文献标志码:** A **文章编号:** 1006-4710(2018)02-0199-06

Linearized complex frequency domain modeling and analysis of Pound-Drever-Hall laser frequency stabilization system

SU Juan^{1,2}, JIAO Mingxing¹, ZHANG Lingchen¹, XING Junhong¹

(1. School of Mechanical and Precision Instrument Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China; 2. Key Laboratory of Photoelectric Logging and Detecting of Oil and Gas, Ministry of Education, Xi'an Shiyou University, Xi'an 710065, China)

Abstract: The Pound-Drever-Hall (PDH) laser frequency stabilization system is based on frequency modulation spectroscopy technology and optical heterodyne detection technology, locking laser frequency at the centre frequency of F-P reference cavity. The linear region of frequency discrimination curve is in a fast frequency pull-in range. In this zone, the PDH error is proportional to the frequency bias, with a linearized complex frequency domain control model of PDH laser frequency stabilization system developed. Based on the model, the stability and steady-state error is analyzed. Serving as the frequency standard, the instability of F-P reference cavity limits the frequency stabilization accuracy greatly. The perturbation error caused by noises of F-P reference cavity is analyzed, with the dynamic characteristic and transient response process studied. A guideline for the parameter selection of PDH laser frequency stabilization system is given.

Key words: Pound-Drever-Hall stabilization; linearized complex frequency domain model; steady-state error; perturbation error; transient response

窄线宽超稳激光器一般采用 Pound-Drever-Hall(PDH)方法压窄线宽。虽然采用 PDH 稳频方法的激光器由于无法提供绝对频率参考而难以保证激光器的长期稳定性,但却具有优异的短期频率稳定性能,因而在高分辨精密激光光谱^[1-2]、光频率标

准^[3-6]、引力波探测^[7-8]、低噪声超稳微波信号产生^[9]和精密物理实验^[10-11]等领域中都有着非常重要的应用。

PDH 稳频系统是一个闭环频率跟踪系统,以 F-P 参考腔的中心频率作为稳频基准,采用调制光

收稿日期: 2017-03-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51175421,61205135)

作者简介: 苏娟,女,博士生,研究方向为激光稳频和光电检测技术。E-mail:sjsu@xsyu.edu.cn

通讯作者: 焦明星,男,博士,教授,研究方向为全固态激光器和激光传感与测量技术。E-mail:jiaomx@xaut.edu.cn

谱技术和光外差探测技术将激光器频率锁定在该频率基准上。得到鉴频曲线后,逐渐减小加载在激光腔上的线性扫描信号,将伺服系统控制信号加在激光腔上。此时,系统进入频率快速捕获区,PDH误差信号与激光器频率漂移成正比。快捕区内的稳态响应决定了系统的稳定性和是否能够实现无差锁定;暂态响应体现了系统的锁定速度和锁定误差。以往的文献大都对PDH稳频系统进行建模,旨在分析各部分对噪声的影响,确定主要噪声来源并对主要噪声进行压制,提高信噪比^[12-13],并未对频率快速捕获区内的稳态和暂态响应进行分析。本文建立了频率快捕区的PDH稳频系统线性化复频域模型,分析了系统的静态性能和动态性能,对于系统的稳定性、稳态误差和暂态响应进行了研究,给出了控制模块参数设计依据。

1 PDH 稳频方法原理

1983年,Drever和Hall等人借鉴了1946年Pound使用微波腔进行微波稳频的思想^[14],利用射频相位调制和光外差探测技术将激光频率锁定在F-P光学谐振腔的中心频率上,得到了线宽小于100Hz的激光^[15]。这种方法此后被称为Pound-Drever-Hall(PDH)稳频方法。其系统框图见图1。

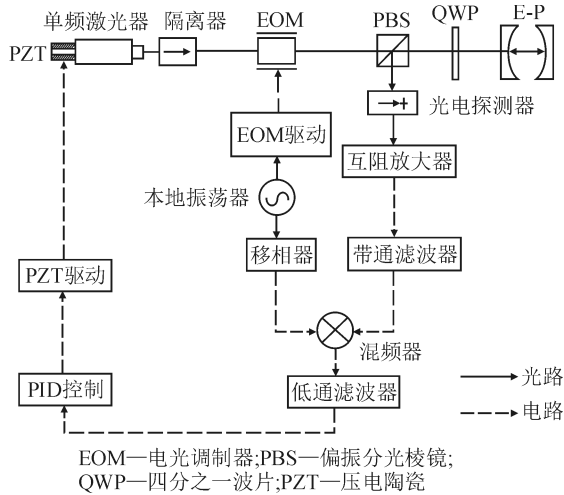


图1 PDH 稳频系统框图。

Fig. 1 The schematic diagram of PDH system for frequency stabilization

文献^[16]对PDH稳频原理进行了详尽的数学描述,光电探测器探测到反射光的功率为:

$$P_{\text{ref}} = J_0^2(\beta) P_0 |F(\omega)|^2 + J_1^2(\beta) P_0 |F(\omega + \Omega)|^2 + J_1^2(\beta) P_0 |F(\omega - \Omega)|^2 + 2J_0(\beta) J_1(\beta) \times P_0 \{ \text{Re}[F(\omega) F^*(\omega + \Omega) - F^*(\omega) F(\omega - \Omega)] \cos \Omega t + \text{Im}[F(\omega) F^*(\omega + \Omega) - F^*(\omega) F(\omega - \Omega)] \sin \Omega t \} + (2\Omega \text{ terms}) \quad (1)$$

式中: P_0 为入射光功率; $J_0(\beta)$ 和 $J_1(\beta)$ 分别为零阶和一阶贝塞尔函数; β 为调制度; ω 为单频激光器频率; Ω 为调制频率; $F(\omega)$ 为F-P腔的反射系数;最后一项为两个边带拍频产生的 2Ω 项。

从式(1)可以看出,光电探测器输出包括直流项,频率为 Ω 和 2Ω 的交流项。其中,两个频率为 Ω 的项代表了反射光相对于入射光的相移大小。当调制频率 Ω 远远大于激光器线宽 ν_1 时,两个边带光不进入F-P参考腔,在第一个腔镜处被反射,相位几乎不发生改变。此时,余弦项消失,式(1)中反映激光频率变化的色散项为:

$$\epsilon = -2J_0(\beta) J_1(\beta) P_0 \text{Im}\{F(\omega) F^*(\omega + \Omega) - F^*(\omega) F(\omega - \Omega)\} \quad (2)$$

当F-P腔的精细度足够大,则有:

$$\epsilon = -\frac{4}{\pi} J_0(\beta) J_1(\beta) P_0 \frac{\Delta\omega}{\nu_1} \quad (3)$$

式中: $\Delta\omega$ 为激光频率失谐角频率。令 $\epsilon = k'_d \Delta\nu$, $\Delta\nu$ 为激光频率失谐频率,则有:

$$k'_d = -\frac{8J_0(\beta) J_1(\beta) P_0}{\nu_1} \quad (4)$$

式中 k'_d 为鉴频曲线的斜率,表征着PDH稳频系统对激光频率漂移的灵敏性。

由式(4)可知,鉴频信号的灵敏度与入射光功率、调制度和参考腔的线宽有关。参考腔线宽越窄,鉴频曲线的斜率越大。要获得较大的 k'_d ,调制度应选为1.082左右^[16]。因此,对于已知的激光器,往往选用高精度窄线宽参考腔作为PDH稳频技术的稳频基准。

2 PDH 系统线性化复频域建模

PDH稳频系统的光路部分实质上是一个鉴频器,即经过互阻放大器和带通滤波器后的光电探测器输出即为鉴频器的输出,可表示为:

$$u_{ov} = k_d \cdot \Delta\nu \sin(\Omega t + \phi(t)) = u_i \sin(\Omega t + \phi(t)) \quad (5)$$

式中 k_d 为鉴频曲线的斜率和系统调理电路增益的乘积,在后面的描述中称为鉴频系数。混频器和低通滤波器的作用类似于锁相环(Phase Locked Loop, PLL)中的鉴相器,PDH稳频系统采用移相器补偿了光电探测器输出与本振信号之间的相位差 $\phi(t)$ 。因此,PDH稳频系统经过混频滤波后的输出为 $v_d(t) = 0.5u_i u_F$,即PDH误差信号 ϵ 与激光频率失谐量 $\Delta\omega$ 之间为一比例环节。

误差信号 ϵ 经过PI控制环节得到频率调节信号 U_c 。PZT等效为一个电容,与其驱动电路一起等

效为一阶惯性环节^[17]。PI 控制器和 PZT 等效的二阶环节起到了环路滤波器的作用,保证环路稳定、改善环路跟踪性能和噪声特性。当激光谐振频率锁定在 F-P 参考腔中心频率上时,位于信号频率附近的干扰成分将以低频干扰的形式进入环路,绝大部分的干扰会受到环路滤波器低通特性的抑制,从而将混进输入信号中的噪声和杂散干扰滤除掉。

当激光频率在 F-P 腔谐振频率附近变化时,由式(3)可知,误差信号 ϵ 与激光频率失谐量 $\Delta\omega$ 为线性关系。建立激光频率在频率快速捕获区的控制系统复频域模型见图 2。其中, $V_0(s)$ 为 F-P 参考腔谐振频率, $V(s)$ 为激光频率反馈信号, $V_e(s)$ 为激光器相对于 F-P 参考腔谐振频率的漂移量, $\epsilon(s)$ 为获得的 PDH 误差信号, $U_c(s)$ 为控制激光频率变化的电压信号。 $N(s)$ 为 F-P 参考腔的噪声干扰产生的频率波动。

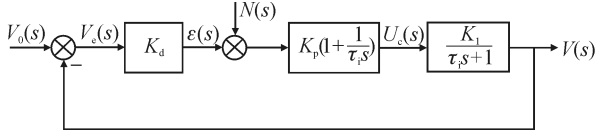


图 2 PDH 系统的线性化复频域模型

Fig. 2 Linearized complex frequency domain control model of PDH system

图 2 所示系统的开环传递函数为

$$G(s) = K_d K_p K_l \left(1 + \frac{1}{\tau_i s}\right) \frac{1}{\tau_c s + 1} = K \frac{\tau_i s + 1}{\tau_i s (\tau_c s + 1)} \quad (6)$$

式中: K_d 为鉴频系数(V/MHz); K_p 为 PI 控制环节中的比例系数; τ_i 为积分时间常数,约为 10^{-3} 数量级; K_l 为 PZT 压电系数(nm/V)和腔长调谐系数(MHz/nm)的乘积,单位为 MHz/V; τ_c 为压电陶瓷及其驱动电路的等效惯性环节时间常数,约为 10^{-3} 数量级。在 PDH 稳频技术中,开环增益越大,对相位噪声的压制效果越好。由式(6)可知,开环增益 $K = K_d K_p K_l$, 对于已有稳频系统, K_l 是已知的, K_p 一般较小,因此开环增益 K 的大小主要由鉴频系数 K_d 决定。

3 静态性能分析

3.1 系统稳定性

系统闭环传递函数为:

$$\phi_r(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{K(\tau_i s + 1)}{\tau_i \tau_c s^2 + (1 + K)\tau_i s + K} \quad (7)$$

由 Routh 判据可知,式(7)系统特征根均为实根,在

s 平面的左半平面,因此系统是稳定的。

3.2 稳态误差分析

系统输入误差传递函数表征了输出跟随输入信号的能力,图 2 系统的误差传递函数为:

$$\phi_{er}(s) = \frac{V_e(s)}{V_0(s)} = \frac{1}{1 + G(s)} = \frac{\tau_i s (\tau_c s + 1)}{\tau_i \tau_c s^2 + (1 + K)\tau_i s + K} \quad (8)$$

令 $v_0(t) = a$ 为阶跃输入,则

$$V_e(s) = \phi_{er}(s) V_0(s) = \frac{\tau_i (\tau_c s + 1)}{\tau_i \tau_c s^2 + (1 + K)\tau_i s + K} \quad (9)$$

输入产生的稳态误差 e_{ssr} 为

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} s \phi_{er}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \tau_i (\tau_c s + 1)}{\tau_i \tau_c s^2 + (1 + K)\tau_i s + K} = 0 \quad (10)$$

即输入信号产生的系统稳态误差为零,说明系统输出能够完全跟踪输入的变化。

F-P 参考腔作为 PDH 稳频技术的稳频基准,其稳定性极大程度上决定了该技术可能达到的稳频精度。由于 F-P 参考腔对环境温度变化和噪音及振动尤为敏感,在稳频过程中,必须考虑其噪声干扰 $N(s)$ 对模型的静态和动态性能的影响。

当 $V_0(s) = 0$ 时,干扰 $N(s)$ 作用下的闭环传递函数为:

$$\phi_n(s) = \frac{V(s)}{N(s)} = \frac{K_p K_l (\tau_i s + 1)}{\tau_i \tau_c s^2 + (1 + K)\tau_i s + K} \quad (11)$$

则系统总的输出 $V(s)$ 为:

$$V(s) = \phi_r(s) V_0(s) + \phi_n(s) N(s) \quad (12)$$

令 $v_0(t) = a, n(t) = b$, 均为阶跃输入,则:

$$V(s) = \frac{aK(\tau_i s + 1) + bK_p K_l (\tau_i s + 1)}{s[\tau_i \tau_c s^2 + (1 + K)\tau_i s + K]} = \frac{(aK_d + b)(\tau_i s + 1)}{s[\tau_i \tau_c s^2 + (1 + K)\tau_i s + K]} \quad (13)$$

对式(13)进行 Laplace 反变换,可得:

$$v(t) \approx a + \frac{b}{K_d} - \frac{aK_d + b}{K_d(1 + K)} e^{-\frac{K}{\tau_i(1+K)}t} \quad (14)$$

由式(14)可知,系统的阶跃响应是稳定的。当 $t \rightarrow \infty$ 时,第三项的暂态响应为零。令 $\alpha = K/[\tau_i(1 + K)]$, 则 α 越大,暂态响应衰减越快。为了使得系统尽快稳定,应在不影响系统性能的情况下,尽量减小 PI 控制单元的积分常数 τ_i 。式(14)第一项为输入产生的输出,输入与输出相等,即系统可以无差跟踪输入,这与式(10)的结论相同。第二项为 F-P 参考腔噪声产生的输出, F-P 参考腔噪声将产生系统稳态误差,大小为输入信号幅度的 $1/K_d$ 。

3.3 扰动误差分析

系统扰动误差传递函数表征了系统抗干扰能力。图2系统扰动误差传递函数为:

$$\phi_{en}(s) = \frac{V_e(s)}{N(s)} = -\frac{K_p K_i (\tau_i s + 1)}{\tau_i \tau_c s^2 + (1 + K) \tau_i s + K} \quad (15)$$

$n(t)$ 为F-P腔噪声干扰,为阶跃输入,则:

$$V_{en}(s) = \phi_{en}(s) N(s) = -\frac{K_p K_i (\tau_i s + 1)}{s(\tau_i \tau_c s^2 + (1 + K) \tau_i s + K)} \quad (16)$$

$n(t)$ 产生的稳态误差 e_{ssn} 为:

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s V_{en}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(-\frac{K_p K_i (\tau_i s + 1)}{\tau_i \tau_c s^2 + (1 + K) \tau_i s + K} \right) = -\frac{1}{K_d} \quad (17)$$

由式(17)可知,由F-P参考腔引起的输出稳态误差为鉴频系数的倒数。即鉴频系数越大,系统的稳态误差越小,这与式(14)所得结论相同。式(14)和式(17)的表达式相差一个负号,这是因为扰动误差传递函数是以参考值为零来衡量的。

4 动态性能分析

系统的暂态参数表征了环路跟踪速度和跟踪误差。令增益系数 $K' = K/\tau_i$, 环路固有频率 $\omega_n = \sqrt{K'/\tau_c}$, 阻尼系数 $\xi' = \frac{1}{2} \sqrt{K'/\tau_c} \left(\tau_i + \frac{1}{K'} \right)$, 则式(7)可改写为:

$$\phi_r(s) = \frac{s\omega_n(2\xi' - \omega_n/K') + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi'\omega_n s + \omega_n^2} \quad (18)$$

通常 $\xi' \gg \omega_n/K'$, 因此式(18)可近似表示为理想二阶环:

$$\phi_r(s) = \frac{2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (19)$$

式子 $\xi \approx \frac{\tau_i}{2} \sqrt{K'/\tau_c}$ 。式(19)为一个标准的二阶振荡

环节,系统输出以振荡频率 $\omega_d = \sqrt{1-\xi^2} \omega_n$ 做阻尼振荡,阻尼系数为 ξ 。当系统输入为 $v_0(t) = a$ 时,取 ξ 为不同的数值,绘制归一化响应曲线如图3(a)所示。图3(b)为 $10 \leq \omega_n t \leq 20$ rad 时的暂态过程。

由图3(a)可知,阻尼系数 ξ 越小,超调量越大,输出震荡过程越明显;图3(b)的近稳态过程中, $\xi < 1$, 存在震荡过程; $\xi \geq 1$ 时,输出无震荡过程, ξ 越大,输出跟踪到输入的过渡时间越长。

从系统误差的暂态响应分析,式(14)可相应改写为

$$\phi_{er}(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (20)$$

取 ξ 为不同的数值,绘制系统阶跃输入下的误差响应曲线如图4(a)所示。图4(b)为 $5 \leq \omega_n t \leq 20$ rad 时的暂态过程。

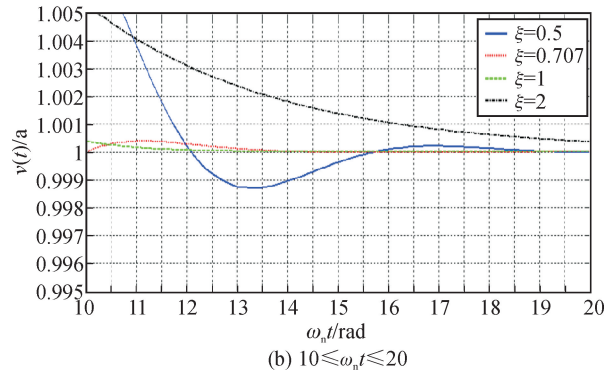
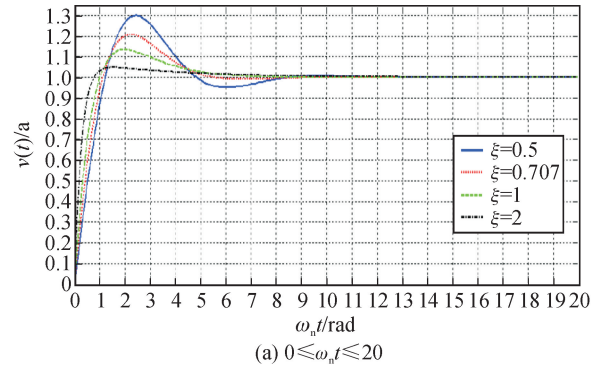


图3 不同 ξ 取值下 PDH 稳频系统归一化阶跃响应曲线
Fig. 3 The normalized step response curve of PDH laser frequency stabilization system with different ξ 's

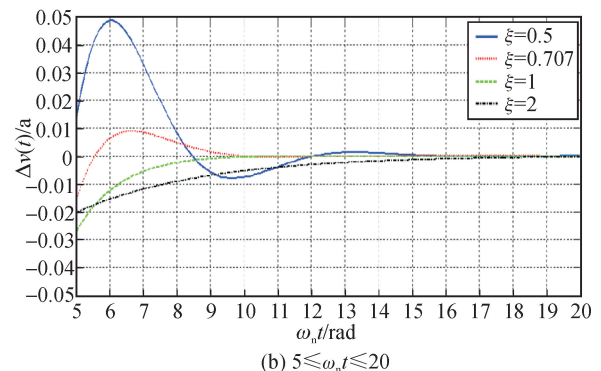
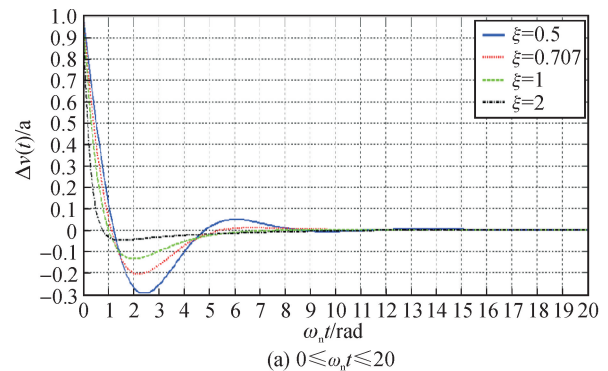


图4 不同 ξ 取值下 PDH 稳频系统归一化阶跃响应误差曲线
Fig. 4 The normalized step response error curve of PDH laser frequency stabilization system with different ξ 's

从图 4(a)可以看出, $0 < \xi < 1$ 时,误差响应存在震荡过程。 ξ 越小,震荡越明显; $\xi \geq 1$ 时,误差平滑地接近零。图 4(b)说明 ξ 越接近 1,误差为零的过渡时间越短。

因此,从系统输出响应和误差响应来看,为了保证 PDH 稳频系统实现激光频率平稳跟踪,阻尼系数 ξ 不宜过小,另一方面,为了实现快速锁定,阻尼系数 ξ 不宜大于 1。因此,PDH 稳频系统应设计为近临界阻尼系统,即 ξ 小于并接近于 1。由于 $\xi = \frac{\tau_i}{2} \sqrt{K'/\tau_c} = \frac{\tau_i}{2} \sqrt{K/\tau_i \tau_c}$, 因此,应选 $K \approx 4\tau_c/\tau_i$ 。

从抑制噪声方面来说,噪声带宽越小,输入白噪声在输出端响应的方差越小,即 PDH 系统对噪声的滤除能力越强。图 2 所示系统模型的噪声带宽 $BW = \omega_n(1 + 4\xi^2)/8\xi$ (Hz), BW 与 ω_n 成正比^[18]。因此,要增大信噪比,就要减小 ω_n 。假若 $\xi \approx 1$, 则 $BW \approx 0.625\omega_n$ 。但是,从系统的暂态指标公式来看, ω_n 越小,暂态调节时间和上升时间都会增加。将 $K \approx 4\tau_c/\tau_i$ 代入 ω_n 的表达式,可得 $\tau_i \approx 2/\omega_n$ 。取 ω_n 为不同的数值,绘制系统阶跃输入下的归一化响应曲线见图 5。

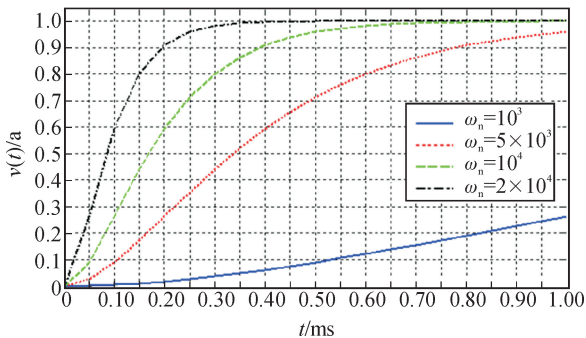


图 5 不同 ω_n 时 PDH 稳频系统归一化阶跃响应曲线

Fig. 5 The normalized step response curve of PDH laser frequency stabilization system with different ω_n 's

由图 5 可以看出,若要锁定时间达 μs 级, ω_n 应大于 10^4 , 即积分常数 τ_i 应在 10^{-4} 数量级,但此时系统噪声带宽将会在 kHz 量级。因此,既要保证噪声改善,又要保证较小的超调和过渡时间, τ_i 要综合考虑选择。

5 结 论

当不断减小加在激光腔上的线性扫描电压幅度,同时调节直流偏置,PDH 稳频系统进入频率快速捕获区。在快捕区内,PDH 误差信号与激光频率变化量成正比。本文建立了 PDH 线性化控制系统复频域模型,并根据此模型分析了 PDH 系统的静态和动态性能。系统能够无差跟踪激光频率的变

化,然而 F-P 参考腔会引起输出稳态误差,大小与鉴频系数的倒数成正比。环路固有频率 ω_n 和阻尼系数 ξ 影响系统的动态性能,从噪声抑制方面和暂态响应分析的结果来看,PDH 稳频系统应设计为近临界阻尼系统,积分常数 τ_i 在 10^{-4} 数量级时,锁定时间可达 μs 级,但会使得系统噪声带宽增大,在实际系统设计时,应综合考虑选择。

参考文献:

- [1] OSKAY W H, ITANO W M, BERGQUIST J C. Measurement of the $^{199}\text{Hg}^+ 5d^9 6s^2 \ ^2D_{5/2}$ electric quadrupole moment and a constraint on the quadrupole shift [J]. Physical Review Letters, 2005, 94: 163001.
- [2] ALNIS J, MATVEEV A, KOLACHEVSKY N, et al. Subhertz linewidth diode lasers by stabilization to vibrationally and thermally compensated ultralow-expansion glass Fabry-Pérot cavities [J]. Physical Review A, 2008, 77(5): 053809.
- [3] KESSLER T, HAGEMANN C, GREBING C, et al. A sub-40-mHz-linewidth laser based on a silicon single-crystal optical cavity [J]. Nature Photonics, 2011, 6(10): 687-692.
- [4] BLOOM B J, NICHOLSON T L, WILLIAMS J R, et al. An optical lattice clock with accuracy and stability at the 10^{-18} level [J]. Nature, 2014, 506(7486): 71-75.
- [5] XU Zhichao, PAN Duo, ZHUANG Wei, et al. Experimental scheme of 633 nm and 1359 nm good-bad cavity dual-wavelength active optical frequency standard [J]. Chinese Physics Letters, 2015, 32(8): 083201.
- [6] SHANG Junjuan, CAO Jian, CUI Kaifeng, et al. A compact, sub-Hertz linewidth 729 nm laser for a miniaturized $^{40}\text{Ca}^+$ optical clock [J]. Optics Communications, 2017, 382(1): 410-414.
- [7] WILLKE B, DANZMANN K, FREDE M, et al. Stabilized lasers for advanced gravitational wave detectors [J]. Classical and Quantum Gravity, 2008, 25(11): 114040.
- [8] HARRY G M, LIGO Scientific Collaboration. Advanced LIGO: the next generation of gravitational wave detectors [J]. Classical and Quantum Gravity, 2010, 27(8): 084006.
- [9] FORTIER T M, KIRCHNER M S, QUINLAN F, et al. Generation of ultrastable microwaves via optical frequency division [J]. Nature Photonics, 2011, 5(7): 425-429.
- [10] 任兆麟, 王叶兵, 韩建新, 等. 铯原子三重态双耦合场下的原子相干谱观测 [J]. 光学学报, 2017, 37(4): 0402001.

REN Zhaolin, WANG Yebing, HAN Jianxin, et al.

- Observation of atomic coherence in strontium triplet-with double coupling fields [J]. *Acta Optica Sinica*, 2017, 37(4): 0402001.
- [11] HERRMANN S, SENGGER A, MÖHLE K, et al. Rotating optical cavity experiment testing Lorentz invariance at the 10^{-17} level [J]. *Physical Review D*, 2010, 80(10): 105011.
- [12] 孙旭涛, 陈卫标. 注入锁定激光器的边带锁频技术稳频系统优化分析 [J]. *光子学报*, 2008, 37(9): 1748-1752.
- SUN Xutao, CHEN Weibiao. Optimization of Pound-Drever-Hall frequency stabilization of injection-locked laser [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2008, 37(9): 1748-1752.
- [13] LAM T T Y, SLAGMOLEN B J J, CHOW J H, et al. Digital laser frequency stabilization using an optical cavity [J]. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 2010, 46(8): 1178-1183.
- [14] POUND R V. Electronic frequency stabilization of microwave oscillators [J]. *Review of Scientific Instruments*, 1946, 17(11): 490-505.
- [15] DREVER R W P, HALL J L, KOWALSKI F V, et al. Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator [J]. *Applied Physics B Photophysics and Laser Chemistry*, 1983, 31(2): 97-105.
- [16] BLACK E D. An introduction to Pound-Drever-Hall laser frequency stabilization [J]. *American Journal of Physics*, 2001, 69(1): 79-87.
- [17] 吴玛. 驱动 PZT 的电压控制电路 [D]. 长春: 吉林大学, 2007: 27-30.
- WU Ma. High voltage control circuit to drive PZT [D]. Changchun: Jilin University, 2007: 27-30.
- [18] 张厥盛, 郑继禹, 万心平. 锁相技术 [M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1994: 64-66.
- (责任编辑 王绪迪)

(上接第 191 页)

- [10] SASS O, WOLLNY K. Investigations regarding Alpine talus slopes using ground-penetrating radar (GPR) in the Bavarian Alps, Germany [J]. *Earth Surface Processes and Landforms*, 2001, 26(10): 1071-1086.
- [11] GERBER R, SALAT C, JUNGE A, et al. GPR-based detection of pleistocene periglacial slope deposits at a shallow-depth test site [J]. *Geoderma*, 2007, 139(3): 346-356.
- [12] ZIELIŃSKI A, MAZURKIEWICZ E, ŁYSKOWSKI M, et al. Use of GPR method for investigation of the mass movements development on the basis of the landslide in Krakow [J]. *Roads and Bridges-Drogi i Mosty*, 2016, 15(1): 61-70.
- [13] TOPP G C, DAVIS J L, ANNAN A P. Electromagnetic determination of soil water content: measurements in coaxial transmission lines [J]. *Water Resources Research*, 1980, 16(3): 574-582.
- [14] WANG J R. The dielectric properties of soil-water mixtures at microwave frequencies [J]. *Radio Science*, 1980, 15(5): 977-985.
- [15] DOBSON M C, ULABY F T, HALLIKAINEN M T, et al. Microwave dielectric behavior of wet soil-part II: dielectric mixing models [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 1985, (1): 35-46.
- [16] VILLASENOR J, BUNEMAN O. Rigorous charge conservation for local electromagnetic field solvers [J]. *Computer Physics Communications*, 1992, 69(2-3): 306-316.
- [17] YANG C N, MILLS R L. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance [J]. *Physical Review*, 1954, 96(1): 191.
- [18] MAXWELL J C. A dynamical theory of the electromagnetic field [J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1865, 155: 459-512.
- [19] IRVING J, KNIGHT R. Numerical modeling of ground-penetrating radar in 2-D using MATLAB [J]. *Computers & Geosciences*, 2006, 32(9): 1247-1258.
- (责任编辑 周 蓓)