DOI:10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2023.02.011 https://xuebao.xaut.edu.cn

引文格式:刘磊,李开鹏,王绪迪. 三角代数上的可乘映射[J]. 西安理工大学学报,2023,39(2):268-271.

LIU Lei, LI Kaipeng, WANG Xudi. Multiplicative maps on triangular algebras [J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2023,39(2):268-271.

三角代数上的可乘映射

刘　磊[1],李开鹏[1],王绪迪[2]

(1.西安电子科技大学 数学与统计学院,陕西 西安 710071;2.西安理工大学 理学院,陕西 西安 710054)

摘要:为了研究在两个代数之间的固定点上可乘的可加映射什么时候是任意点可乘的,本文利用矩阵运算技巧,在三角代数范畴上证明了两个三角代数之间的可加满射在固定点可乘时一定是可乘的。最后将该结果应用到了 Hilbert 空间的套代数上。

关键词:点可乘映射;三角代数;套代数

中图分类号:O153.3　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1006-4710(2023)02-0268-04

Multiplicative maps on triangular algebras

LIU Lei[1], LI Kaipeng[1], WANG Xudi[2]

(1. School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710071, China;
2. Faculty of Sciences, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China)

Abstract: In order to study the problem when a linear map that is multiplicative at a fixed point is a multiplicative map between two algebras, we use the techniques for matrix operation to prove that every linear surjective map which is multiplicative at a fixed point is a multiplicative map on triangular algebras. The result is applied to the nest algebras of Hilbert space.

Key words: multiplicative map at a point; triangular algebra; nest algebra

设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的结合代数,ϕ 是 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 上的可加映射。若对 $\boldsymbol{S},\boldsymbol{T}\in\boldsymbol{A}$,使得 $\boldsymbol{ST}=\boldsymbol{G}$ 时,就有 $\phi(\boldsymbol{ST})=\phi(\boldsymbol{S})\boldsymbol{T}+\boldsymbol{S}\phi(\boldsymbol{T})$,则称可加映射 ϕ 在 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{A}$ 处可导。

多年来,如何刻画代数上在某点可导的映射受到许多数学家的关注。对于某些代数,几位作者讨论了 $\boldsymbol{G}$ 分别为零、单位元、非平凡幂等元、可逆元素的情况[1-6]。

受可导映射启发,如果对 $\boldsymbol{S},\boldsymbol{T}\in\boldsymbol{A}$ 使得 $\boldsymbol{ST}=\boldsymbol{G}$ 时就有 $\phi(\boldsymbol{ST})=\phi(\boldsymbol{S})\phi(\boldsymbol{T})$,则称可加映射 ϕ 在 $\boldsymbol{G}$ 处可乘。对于可乘映射的研究也有相关结果。Zhu 等[7]研究了矩阵代数上在可逆元和单位元处可乘的映射。Gong 等[8]研究了矩阵代数上某些点 Jordan 可乘的映射。Li 等[9]刻画了在含有单位元的 Banach 代数上分离点和单位元点处可乘的映射。Burgos 等[10]在研究了 C^*-代数上在零点、单位元点和投影点上可乘的映射。

如何刻画三角代数上在任一固定点可乘的映射是一个很自然的问题。但是,到目前为止,还未见到此方向上的研究成果。本文描述了在三角代数上任一固定点可乘映射的结构,将结果应用到了套代数上。

1 预备知识

设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$、$\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 表示实数域或复数域上的代数,其单位元分别为 $\boldsymbol{I}_{\mathcal{A}}$、$\boldsymbol{I}_{\mathcal{B}}$、$\boldsymbol{I}_{\mathcal{C}}$ 以及 $\boldsymbol{I}_{\mathcal{D}}$。$\mathcal{M}$ 为 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-双模,$\mathcal{N}$ 为忠实的 $(\mathcal{C},\mathcal{D})$-双模(即对于 $X\in\mathcal{C}$,若 $X\mathcal{N}=\{0\}$,则 $X=0$,对于 $Z\in\mathcal{D}$,若 $\mathcal{N}Z=\{0\}$,则 $Z=0$)。在通常的矩阵运算下,代数 $\mathrm{Tri}(\mathcal{A},\mathcal{M},\mathcal{B})=\left\{\begin{pmatrix} a & m \\ 0 & b\end{pmatrix}: a\in\mathcal{A},\ m\in\mathcal{M},\ b\in\mathcal{B}\right\}$ 称为三角代数[11]。下文中分别用 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{U}$ 表示三角代数 $\mathrm{Tri}(\mathcal{A},\mathcal{M},\mathcal{B})$ 和 $\mathrm{Tri}(\mathcal{C},\mathcal{N},\mathcal{D})$。

收稿日期:2023-03-02;　**网络首发日期**:2023-04-24

网络首发地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1294.N.20230424.1411.008.html

基金项目:国家自然科学基金面上项目(12071134);陕西省自然科学基金资助项目(2021JM-119)

通信作者:刘磊,男,博士,副教授,研究方向为算子代数和算子理论。E-mail:leiliu@mail.xidian.edu.cn

2 主要结论与证明

定理 1 令 $\mathcal{T}=\mathrm{Tri}(\mathcal{A},\mathcal{M},\mathcal{B})$ 和 $\mathcal{U}=\mathrm{Tri}(\mathcal{C},\mathcal{N},\mathcal{D})$ 是两个三角代数。假设：

(i) 对任意的 $a\in\mathcal{A}$，存在某个正整数 n 满足 $n\boldsymbol{I}_{\mathcal{A}}-a$ 在 $\mathcal{A}$ 中是可逆的；

(ii) 对任意的 $b\in\mathcal{B}$，存在某个正整数 n 满足 $n\boldsymbol{I}_{\mathcal{B}}-b$ 在 $\mathcal{B}$ 中是可逆的。

如果一个可加满射 $\phi:\mathcal{T}\to\mathcal{U}$ 在任一固定点 $\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}a_0 & m_0\\ 0 & b_0\end{pmatrix}$ 处可乘，且满足：

$$\phi\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{\mathcal{A}} & 0\\ 0 & \boldsymbol{I}_{\mathcal{B}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{\mathcal{C}} & 0\\ 0 & \boldsymbol{I}_{\mathcal{D}}\end{pmatrix},\ \phi\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{\mathcal{A}} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{\mathcal{C}} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

则对任意的 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathcal{T}$，$\phi(\boldsymbol{AB})=\phi(\boldsymbol{A})\phi(\boldsymbol{B})$ 成立，即 ϕ 是 $\mathcal{T}$ 到 $\mathcal{U}$ 上的同态映射。

证明 因为 ϕ 是可加映射，所以对于任意的 $\begin{pmatrix}a & m\\ 0 & b\end{pmatrix}\in\mathcal{T}$，有：$\phi\begin{pmatrix}a & m\\ 0 & b\end{pmatrix}=$

$$\begin{pmatrix}f_{11}(a)+g_{11}(m)+h_{11}(b) & f_{12}(a)+g_{12}(m)+h_{12}(b)\\ 0 & f_{22}(a)+g_{22}(m)+h_{22}(b)\end{pmatrix}$$

其中 f_{11}、f_{12}、f_{22} 分别表示从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{C}$、$\mathcal{N}$、$\mathcal{D}$ 的可加映射，g_{11}、g_{12}、g_{22} 分别表示从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{C}$、$\mathcal{N}$、$\mathcal{D}$ 的可加映射，h_{11}、h_{12}、h_{22} 分别表示从 $\mathcal{B}$ 到 $\mathcal{C}$、$\mathcal{N}$、$\mathcal{D}$ 的可加映射。下面通过几个断言完成定理的证明。

断言 1 对任意的 $a\in\mathcal{A}$，有 $f_{12}(a)=0$，$f_{22}(a)=0$。

对任意可逆的 $a\in\mathcal{A}$，非零有理数 λ，令 $\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}\lambda a & m_0\\ 0 & b_0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\lambda^{-1}a^{-1}a_0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{I}_{\mathcal{B}}\end{pmatrix}$，使得 $\boldsymbol{ST}=\boldsymbol{G}$，则：

$$\begin{pmatrix}f_{11}(a_0)+g_{11}(m_0)+h_{11}(b_0) & f_{12}(a_0)+g_{12}(m_0)+h_{12}(b_0)\\ 0 & f_{22}(a_0)+g_{22}(m_0)+h_{22}(b_0)\end{pmatrix}=\phi(\boldsymbol{S})\phi(\boldsymbol{T})=$$

$$\begin{pmatrix}\lambda f_{11}(a)+g_{11}(m_0)+h_{11}(b_0) & \lambda f_{12}(a)+g_{12}(m_0)+h_{12}(b_0)\\ 0 & \lambda f_{22}(a)+g_{22}(m_0)+h_{22}(b_0)\end{pmatrix}\cdot$$

$$\begin{pmatrix}\lambda^{-1}f_{11}(a^{-1}a_0) & \lambda^{-1}f_{12}(a^{-1}a_0)\\ 0 & \lambda^{-1}f_{22}(a^{-1}a_0)+\boldsymbol{I}_{\mathcal{D}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}* & \Delta\\ 0 & (\lambda f_{22}(a)+g_{22}(m_0)+h_{22}(b_0))(\lambda^{-1}f_{22}(a^{-1}a_0)+\boldsymbol{I}_{\mathcal{D}})\end{pmatrix}\tag{1}$$

其中：

$\Delta=(\lambda f_{11}(a)+g_{11}(m_0)+h_{11}(b_0))(\lambda^{-1}f_{12}(a^{-1}a_0))+(\lambda f_{12}(a)+g_{12}(m_0)+h_{12}(b_0))(\lambda^{-1}f_{22}(a^{-1}a_0)+\boldsymbol{I}_{\mathcal{D}})$。

由式(1)可得，对于任意可逆的 $a\in\mathcal{A}$，有：

$$f_{12}(a_0)+g_{12}(m_0)+h_{12}(b_0)=$$
$$(\lambda f_{11}(a)+g_{11}(m_0)+h_{11}(b_0))(\lambda^{-1}f_{12}(a^{-1}a_0))+$$
$$(\lambda f_{12}(a)+g_{12}(m_0)+h_{12}(b_0))(\lambda^{-1}f_{22}(a^{-1}a_0)+\boldsymbol{I}_{\mathcal{D}})$$
$$f_{22}(a_0)+g_{22}(m_0)+h_{22}(b_0)=$$
$$(\lambda f_{22}(a)+g_{22}(m_0)+h_{22}(b_0))(\lambda^{-1}f_{22}(a^{-1}a_0)+\boldsymbol{I}_{\mathcal{D}})$$

由此可知，对于任意可逆的 $a\in\mathcal{A}$，有 $f_{12}(a)=0$，$f_{22}(a)=0$。

由假设 (i)得，对于任意 $a\in\mathcal{A}$，存在正整数 n，使得 $n\boldsymbol{I}_{\mathcal{A}}-a$ 在 $\mathcal{A}$ 中可逆。因此，对任意的 $a\in\mathcal{A}$，有 $f_{12}(n\boldsymbol{I}_{\mathcal{A}}-a)=0$，$f_{22}(n\boldsymbol{I}_{\mathcal{A}}-a)=0$。又由于 $n\boldsymbol{I}_{\mathcal{A}}$ 在 $\mathcal{A}$ 中可逆，故对于任意 $a\in\mathcal{A}$，$f_{12}(a)=0$，$f_{22}(a)=0$。

令 $\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{\mathcal{A}} & 0\\ 0 & \lambda^{-1}b_0b^{-1}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}a_0 & m_0\\ 0 & \lambda b\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{ST}=\boldsymbol{G}$，其中 b 为 $\mathcal{B}$ 中任意可逆的元素，m 为 $\mathcal{M}$ 中的任意元素，λ 为非零有理数。与断言 1 证明过程类似，易得断言如下。

断言 2 对任意的 $b\in\mathcal{B}$，$h_{11}(b)=0$，$h_{12}(b)=0$。

断言 3 对任意的 $m\in\mathcal{M}$，$g_{11}(m)=0$，$g_{22}(m)=0$。

对任意的 $m\in\mathcal{M}$，非零有理数 λ，令 $\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{I}_{\mathcal{A}} & m_0-\lambda m\\ 0 & b_0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\lambda^{-1}a_0 & m\\ 0 & \boldsymbol{I}_{\mathcal{B}}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{ST}=\boldsymbol{G}$。由断言 1 和断言 2 可得：

$$\begin{pmatrix}f_{11}(a_0)+g_{11}(m_0) & g_{12}(m_0)\\ 0 & g_{22}(m_0)+h_{22}(b_0)\end{pmatrix}=$$

$$\phi(\boldsymbol{S})\phi(\boldsymbol{T})=\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{I}_{\mathcal{C}}+g_{11}(m_0)-\lambda g_{11}(m) & g_{12}(m_0-\lambda m)\\ 0 & g_{22}(m_0-\lambda m)+h_{22}(b_0)\end{pmatrix}\cdot\tag{2}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda^{-1}f_{11}(a_0)+g_{11}(m) & g_{12}(m)\\ 0 & \boldsymbol{I}_{\mathcal{D}}+g_{22}(m)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\lambda\boldsymbol{I}_{\mathcal{C}}+g_{11}(m_0)-\lambda g_{11}(m))(\lambda^{-1}f_{11}(a_0)+g_{11}(m)) & *\\ 0 & \Delta\end{pmatrix}$$

其中 $\Delta=(g_{22}(m_0-\lambda m)+h_{22}(b_0))(\boldsymbol{I}_{\mathcal{D}}+g_{22}(m))$。

由式(2)可知,对任意的 $m\in\mathcal{M}$,有:

$$f_{11}(a_0)+g_{11}(m_0)=$$
$$(\lambda\boldsymbol{I}_{\mathcal{C}}+g_{11}(m_0)-\lambda g_{11}(m))(\lambda^{-1}f_{11}(a_0)+g_{11}(m)) \tag{3}$$

$$g_{22}(m_0)+h_{22}(b_0)=$$
$$(g_{22}(m_0-\lambda m)+h_{22}(b_0))(\boldsymbol{I}_{\mathcal{D}}+g_{22}(m)) \tag{4}$$

由式(3)、(4)可得:

$$g_{11}(m)+g_{11}(m)g_{11}(m)=0 \tag{5}$$
$$g_{22}(m)+g_{22}(m)g_{22}(m)=0 \tag{6}$$

将等式(5)和等式(6)中的 m 用 $-m$ 替换,有:

$$-g_{11}(m)+g_{11}(m)g_{11}(m)=0 \tag{7}$$
$$-g_{22}(m)+g_{22}(m)g_{22}(m)=0 \tag{8}$$

对任意的 $m\in\mathcal{M}$, 比较等式(5)和等式(7),有 $g_{11}(m)=0$。类似地,比较等式(6)和等式(8),有 $g_{22}(m)=0$

通过上述三个断言,对任意的 $\begin{pmatrix} a & m \\ 0 & b \end{pmatrix}\in\mathcal{T}$, 可得:

$$\phi\begin{pmatrix} a & m \\ 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_{11}(a) & g_{12}(m) \\ 0 & h_{22}(b) \end{pmatrix} \tag{9}$$

断言 4 对任意的 $a\in\mathcal{A}$ 和 $m\in\mathcal{M}$, $g_{12}(am)=f_{11}(a)g_{12}(m)$ 成立。

对任意可逆的 $a\in\mathcal{A}$ 和任意的 $m\in\mathcal{M}$,任意的非零有理数 λ,考虑 $\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix} \lambda a & m_0-\lambda am \\ 0 & b_0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} \lambda^{-1}a^{-1}a_0 & m \\ 0 & \boldsymbol{I}_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{ST}=\boldsymbol{G}$。由式(9)可得:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(a_0) & g_{12}(m_0) \\ 0 & h_{22}(b_0) \end{pmatrix}=\phi(\boldsymbol{S})\phi(\boldsymbol{T})=\begin{pmatrix} \lambda f_{11}(a) & g_{12}(m_0-\lambda am) \\ 0 & h_{22}(b_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda^{-1}f_{11}(a^{-1}a_0) & g_{12}(m) \\ 0 & \boldsymbol{I}_{\mathcal{D}} \end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix} \Delta & \lambda f_{11}(a)g_{12}(m)+g_{12}(m_0)-\lambda g_{12}(am) \\ 0 & * \end{pmatrix} \tag{10}$$

由式(10)可得:

$$g_{12}(m_0)=\lambda f_{11}(a)g_{12}(m)+g_{12}(m_0)-\lambda g_{12}(am)$$

因此有 $g_{12}(am)=f_{11}(a)g_{12}(m)$。由假设(i)可知,对任意的 $a\in\mathcal{A}$,存在一个整数 n 使得 $n\boldsymbol{I}_{\mathcal{A}}-a$ 在 $\mathcal{A}$ 中是可逆的。所以对任意的 $a\in\mathcal{A}$ 和 $m\in\mathcal{M}$,有 $g_{12}((n\boldsymbol{I}_{\mathcal{A}}-a)m)=f_{11}(n\boldsymbol{I}_{\mathcal{A}}-a)g_{12}(m)$。注意到 $n\boldsymbol{I}_{\mathcal{A}}$ 是可逆的,最终推断出对任意的 $a\in\mathcal{A}$ 和 $m\in\mathcal{M}$,有 $g_{12}(am)=f_{11}(a)g_{12}(m)$。

进一步来说,对任意可逆的 $b\in\mathcal{B}$,任意的 $m\in\mathcal{M}$ 和非零有理数 λ,令 $\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{\mathcal{A}} & m \\ 0 & \lambda^{-1}b_0b^{-1} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} a_0 & m_0-\lambda mb \\ 0 & \lambda b \end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{ST}=\boldsymbol{G}$, 与断言 4 的证明类似,易得如下断言。

断言 5 对任意的 $b\in\mathcal{B}$ 和 $m\in\mathcal{M}$, 有:$g_{12}(mb)=g_{12}(m)h_{22}(b)$。

断言 6 对任意的 $a_1,a_2\in\mathcal{A}$, $f_{11}(a_1a_2)=f_{11}(a_1)f_{11}(a_2)$。

对任意的 $a_1,a_2\in\mathcal{A}$ 和 $m\in\mathcal{M}$, 应用断言 4,一方面,有:

$$g_{12}(a_1a_2m)=f_{11}(a_1a_2)g_{12}(m)$$

另一方面,再一次使用断言 4,有:

$$g_{12}(a_1a_2m)=f_{11}(a_1)g_{12}(a_2m)=$$
$$f_{11}(a_1)f_{11}(a_2)g_{12}(m)$$

比较这两个等式可知:

$$(f_{11}(a_1a_2)-f_{11}(a_1)f_{11}(a_2))g_{12}(m)=0$$

由于 ϕ 是满射并且 $\mathcal{N}$ 是忠实的,所以从上式可得对任意的 $a_1,a_2\in\mathcal{A}$, $f_{11}(a_1a_2)=f_{11}(a_1)f_{11}(a_2)$。

对任意的 $b_1,b_2\in\mathcal{B}$ 和 $m\in\mathcal{M}$, 应用断言 5,一方面,有:

$$g_{12}(mb_1b_2)=g_{12}(m)h_{22}(b_1b_2)$$

另一方面,再一次应用断言 5,有:

$$g_{12}(mb_1b_2)=g_{12}(mb_1)h_{22}(b_2)=g_{12}(m)h_{22}(b_1)h_{22}(b_2)$$

通过和断言 6 类似地讨论,易得如下断言。

断言 7 对任意的 $b_1,b_2\in\mathcal{B}$, 等式 $h_{22}(b_1b_2)=h_{22}(b_1)h_{22}(b_2)$ 成立。

断言 8 定理 1 成立。

由等式(9)及断言 4～7 可知,对任意的 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & m_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}\in\mathcal{T}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_2 & m_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}\in\mathcal{T}$, 直接计算可得:

$$\phi(\boldsymbol{AB})=\phi\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1m_2+m_1b_2 \\ 0 & b_1b_2 \end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix} f_{11}(a_1a_2) & g_{12}(a_1m_2+m_1b_2) \\ 0 & h_{22}(b_1b_2) \end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix} f_{11}(a_1)f_{11}(a_2) & f_{11}(a_1)g_{12}(m_2)+g_{12}(m_1)h_{22}(b_2) \\ 0 & h_{22}(b_1)h_{22}(b_2) \end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix} f_{11}(a_1) & g_{12}(m_1) \\ 0 & h_{22}(b_1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{11}(a_2) & g_{12}(m_2) \\ 0 & h_{22}(b_2) \end{pmatrix}=$$
$$\phi(\boldsymbol{A})\phi(\boldsymbol{B})$$

即 ϕ 是 $\mathcal{T}$ 到 $\mathcal{U}$ 上的同态映射。

3 应用

令 H 是实或复的 Hilbert 空间。众所周知,H 上的套是 H 上的正交投影链,在强算子拓扑中是封闭的,并且包含 0 和单位算子 $\boldsymbol{I}$。如果一个套包含至少一个非平凡投影,则称其为非平凡的套。由 $\mathrm{alg}\mathcal{N}$表示与 $\mathcal{N}$关联的套代数,它是由所有保持 $\mathcal{N}$ 不变的有界线性算子组成的算子代数。很明显,每个非平凡的套代数都是三角代数。所以有以下推论。

推论 1 令 $\mathcal{N}$是一非平凡的套代数且 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q} \in \mathcal{N}$ 满足 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q} \overline{\in} \{0,\boldsymbol{I}\}$。如果一个可加双射 ϕ:$\mathrm{alg}\mathcal{N}\to\mathrm{alg}\mathcal{N}$在 $\boldsymbol{G}$ 处可乘并且满足 $\phi(\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{I}$,$\phi(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{Q}$,则对任意的 $\boldsymbol{A} \in \mathrm{alg}\mathcal{N}$,存在 $\mathrm{alg}\mathcal{N}$中的可逆算子 $\boldsymbol{S}$ 满足 $\phi(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{SAS}^{-1}$。

证明 由条件易知与 $\mathcal{N}$关联的套代数可以用 $H = \mathrm{ran}(\boldsymbol{P}) \oplus \mathrm{ran}(\boldsymbol{P})^{\perp}$ 和 $H = \mathrm{ran}(\boldsymbol{Q}) \oplus \mathrm{ran}(\boldsymbol{Q})^{\perp}$ 表示为两种三角代数,并且满足定理 1 中的条件。因此由定理 1 可得 ϕ 是 $\mathrm{alg}\mathcal{N}$上的自同构。又因为套代数上的每个自同构都是空间的(参见文献[12]),所以存在可逆算子 $\boldsymbol{S} \in \mathrm{alg}\mathcal{N}$满足对任意的 $\boldsymbol{A} \in \mathrm{alg}\mathcal{N}$,有 $\phi(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{SAS}^{-1}$。

4 结论

本文刻画了三角代数上在固定点可乘的可加映射,证明了在任一固定点可乘的可加满射一定是同态映射。作为应用,证明了套代数上在固定点可乘的可加双射在一定条件下一定是自同构。

参考文献:

[1] AN Runling, CAI Yaru. Derivations and derivable maps on von Neumann algebras[J]. Linear Multilinear Algebra, 2021, 69: 2806-2812.

[2] AN Runling, HOU Jinchuan. Characterizations of derivations on triangular rings: additive maps derivable at idempotents[J], Linear Algebra Appl., 2009, 431: 1070-1080.

[3] CHEBOTAR M A, KE W F, LEE P H. Maps characterized by action on zero products[J]. Pacific J. Math., 2004, 216: 217-228.

[4] LU Fangyu. Characterizations of derivations and Jordan derivations on Banach algebras[J]. Linear Algebra Appl., 2009, 430: 2233-2239.

[5] PAN Zhidong. Derivable maps and derivational points [J]. Linear Algebra Appl., 2012, 436: 4251-4260.

[6] ZHU Jun, XIONG Changping. Derivable mappings at unit operator on nest algebras[J]. Linear Algebra Appl., 2007, 422: 721-735.

[7] ZHU Jun, XIONG Changping, ZHU Hong. Multiplicative mappings at some points on matrix algebras [J]. Linear Algebra Appl., 2010, 433: 914-927.

[8] GONG Ming, ZHU Jun. Jordan multiplicative mappings at some points on matrix algebras [J]. J. Adv. Res. Pure Math., 2010, 2: 84-93.

[9] LI Jiankui, ZHOU Jiren. Characterizations of Jordan derivations and Jordan homomorphisms [J]. Linear Multilinear Algebra, 2011, 59: 193-204.

[10] BURGOS M J, CABELLO SÁNCHEZ J, PERALTA A M. Linear maps between C^*-algebras that are $*$-homomorphisms at a fixed point[J]. Quaest Math., 2019, 42: 151-164.

[11] CHEUNG W S. Commuting maps of triangular algebras[J]. J. London Math. Soc., 2001, 63: 117-127.

[12] HOU Chengjun, HAN Deguang. Derivations and isomorphisms of certain reflexive operator algebras[J]. Acta Math. Sinica(N. S.), 1998, 14: 105-112.

(责任编辑 王卫勋)