文章编号: 1006-4710(2011)02-0171-06

Daubechies 小波有限元法联系系数计算研究

陈雅琴[1], 张宏光[2], 党发宁[1]
(1. 西安理工大学 岩土工程研究所,陕西 西安 710048; 2. 长安大学 公路学院,陕西 西安 710064)

摘要: 针对 Daubechies 小波有限元法的联系系数计算精度不足这一问题,首先推导了 Daubechies 小波有限元法中常用联系系数的计算公式,分析了导致联系系数计算精度不足的主要原因,并首次尝试将最小二乘法引入 Daubechies 小波有限元法联系系数的计算中,求解所得超定方程组可得联系系数值。实例结果表明,此法可有效提高 Daubechies 小波有限元法联系系数的计算精度。

关键词: Daubechies 小波; 联系系数; 小波有限元法; 最小二乘法

中图分类号: TU47 **文献标志码:** A

Research on Connection Coefficient Computation in Daubechies Wavelet Finite Element Method

CHEN Yaqin[1], ZHANG Hongguang[2], DANG Faning[1]
(1. Institute of Geotechnical Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China;
2. School of Highway, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

Abstract: With the aim of solving to the problem of low computation accuracy of connection coefficients in Daubechies wavelet Finite Element Method, the calculation formulas of connection coefficients commonly used in Daubechies wavelet Finite Element Method are infered firstly, and the major cause leading to low computation accuracy of connection coefficients is analyzed. And then the least square method is employed in the computation of connection coefficients in Daubechies wavelet Finite Element Method for the first time , the values of connection coefficients can be obtained after solving the over-determined system. The results of real examples prove that this means will increase the connection coefficients' calculating accuracy in Daubechies wavelet Finite Element Method efficiently.

Key words: Daubechies wavelet; connection coefficient; wavelet finite element method; the least square method

随着小波理论的发展,小波作为一种求解偏微分方程的有效数值工具越来越受到人们的关注,并在多个领域得到了广泛应用[1-2]。在有限元法中,小波理论的应用也越来越深入,其中,Daubechies 小波首先得到了大量应用。但是,随着小波有限元法的进一步发展,Daubechies 小波的应用在逐步减少,B 样条小波反而越来越受重视。原因是其边界条件更容易控制,积分计算也更为简单,同时仅应用自然变分原理就可以得到 B 样条小波有限元法的单刚矩阵[3-6]。当然,B 样条小波由于其过于光滑,在处理工程中常见的应力大梯度、强非线性及奇异问题时有其自身的局限性。而 Daubechies 小波由于具有正交性、紧支撑性等优点,在解决此类问题时具有独特的优越性[7-8]。

为促进 Daubechies 小波在有限元法中的应用,笔者经过分析与研究,认为 Daubechies 小波在有限元法中应用受到限制的主要原因在于 Daubechies 小波联系系数的计算精度不足、计算广度不够、边界条件引入困难且未知场函数多阶导数的计算精度不足。本文即针对 Daubechies 小波有限元法中联系系数计算精度不足的问题进行详细分析并探讨改进方法。

收稿日期: 2011-03-01
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51008247)。
作者简介: 陈雅琴(1975-),女,江西乐安人,讲师,博士,研究方向为结构数值计算。E-mail: chenyaqin2008@126.com。

1 Daubechies小波有限元法中联系系数的计算

1.1 Daubechies 小波联系系数简介

Daubechies 小波不具有显式表达式,因此,当在数值计算中采用 Daubechies 小波时,联系系数的计算是必须研究的核心内容,联系系数的计算主要有以下几种形式[8]。

1)基于无穷区间对尺度函数 ϕ 的 r、s 阶导数乘积的积分:

$$^{1}\Gamma_{k,l}^{r,s}=\langle\phi_{0,k}^{(r)},\phi_{0,l}^{(s)}\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^{(r)}(t-k)\,\overline{\phi^{(s)}(t-l)}\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

2)针对于求解有限区间问题而定义的积分形式:

$$^{2}\Gamma_{k}^{r,s}=\langle\phi_{0,k}^{(r)},\phi_{0,0}^{(s)}\rangle_{[0,x]}=\int_{0}^{x}\phi^{(r)}(t-k)\,\overline{\phi^{(s)}(t)}\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

3)在应用半解析小波时间差分法求解 Burgers 方程时所定义的积分形式:

$$^{3}\Gamma_{k,l}^{r,s}=\langle\phi_{0,k}^{(r)},\phi_{0,l}^{(s)}\rangle_{[0,2^{j}]}=\int_{0}^{2^{j}}\phi^{(r)}(t-k)\,\overline{\phi^{(s)}(t-l)}\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

4)为了构造小波有限元而在[0,1]区间上构造的积分形式:

$$^{4}\Gamma_{k,l}^{r,s}=\langle\phi_{0,k}^{(r)},\phi_{0,l}^{(s)}\rangle_{[0,1]}=\int_{0}^{1}\phi^{(r)}(t-k)\,\overline{\phi^{(s)}(t-l)}\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

以上四式均为针对0尺度条件下所定义的联系系数计算式。

为了提高小波有限元法的计算精度,有必要将联系系数的求解扩展至任意尺度,从而充分发挥 Daubechies 小波尺度函数任意伸缩的特点。因此定义了式(5)、(6)所示的计算联系系数的积分形式。

5)任意尺度函数 $\phi_{j,k}$ 在[0,1]区间上形成的刚度矩阵联系系数:

$$\Gamma_{k,l}^{j,r,s}=2^{-j(1+r+s)}\langle\phi_{j,k}^{(r)},\phi_{j,l}^{(s)}\rangle_{[0,1]}=\int_{0}^{1}\phi^{(r)}(2^{j}t-k)\,\overline{\phi^{(s)}(2^{j}t-l)}\,\mathrm{d}t \tag{5}$$

6)任意尺度函数 $\phi_{j,k}$ 在[0,1]区间上形成的载荷列阵联系系数:

$$R_{k}^{j,r}=\langle t^{r},\phi_{j,k}\rangle_{[0,1]}=\int_{0}^{1}t^{r}\,\overline{\phi(2^{j}t-k)}\,\mathrm{d}t \tag{6}$$

式中,r、s 取非负整数,表示求导次数。

在小波有限元法中,最为常用的是式(5)和式(6)所定义的联系系数。笔者查阅并参考了多个文献[3,7,8]所提供的计算实例,发现联系系数 $\Gamma_{k,l}^{j,r,s}$ 和 $R_{k}^{j,r}$ 的计算精度都并不高,尤其对于高阶消失矩的小波函数更为明显。以下本文将细化推导参考文献[8]中所定义的 $\Gamma_{k,l}^{j,r,s}$ 及 $R_{k}^{j,r}$ 的计算过程以对其进行详细分析。

1.2 刚度矩阵联系系数 $\Gamma_{k,l}^{j,r,s}$ 的计算

首先,引入两尺度方程的一般形式:

$$\phi\left(\frac{t}{2^{j}}-k\right)=\sqrt{2}\sum_{n=2k}^{2k+N}h_{n-2k}\phi\left(\frac{t}{2^{j-1}}-n\right)=\sqrt{2}\sum_{n=\max(2k,\lceil t/2^{j-1}-N\rceil)}^{\min(2k+N,\lfloor t/2^{j-1}\rfloor)}h_{n-2k}\phi\left(\frac{t}{2^{j-1}}-n\right) \tag{7}$$

令 $j=-j$,并对该式两端取 d 阶导数,得:

$$\phi^{(d)}(2^{j}t-k)=2^{\frac{1}{2}+d}\sum_{n=\max(2k,\lceil 2^{j+1}t-N\rceil)}^{\min(N+2k,\lfloor 2^{j+1}t\rfloor)}h_{n-2k}\phi^{(d)}(2^{j+1}t-n) \tag{8}$$

为了后续公式推导的方便,定义特征函数:

$$\chi_{[0,1]}(t)=\begin{cases}1 & 0\leqslant t\leqslant 1\\ 0 & 其他\end{cases} \tag{9}$$

显然特征函数满足如下简单的两尺度关系:

$$\chi_{[0,1]}\left(\frac{t}{2}\right)=\chi_{[0,1]}(t)+\chi_{[1,2]}(t)=\chi_{[0,1]}(t)+\chi_{[0,1]}(t-1) \tag{10}$$

则:

$$\Gamma_{k,l}^{j,r,s}=\int_{0}^{1}\phi^{(r)}(2^{j}t-k)\,\overline{\phi^{(s)}(2^{j}t-l)}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_{[0,1]}(t)\phi^{(r)}(2^{j}t-k)\,\overline{\phi^{(s)}(2^{j}t-l)}\,\mathrm{d}t \tag{11}$$

分别将 $d=r$、$d=s$ 代入式(8),并将所得结果代入式(11),得:

$$\Gamma_{k,l}^{j,r,s}=\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_{[0,1]}(t)\phi^{(r)}(2^{j}t-k)\,\overline{\phi^{(s)}(2^{j}t-l)}\,\mathrm{d}t=$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_{[0,1]}(t)\left[2^{\frac{1}{2}+r}\sum_{n\in Z}h_{n-2k}\phi^{(r)}(2^{j+1}t-n)\right]\times\left[2^{\frac{1}{2}+s}\sum_{m\in Z}h_{m-2l}\,\overline{\phi^{(s)}(2^{j+1}t-m)}\right]\mathrm{d}t=$$
$$2^{1+r+s}\sum_{n\in Z}h_{n-2k}\sum_{m\in Z}h_{m-2l}\times\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_{[0,1]}(t)\phi^{(r)}(2^{j+1}t-n)\,\overline{\phi^{(s)}(2^{j+1}t-m)}\,\mathrm{d}t \tag{12}$$

令 $t=x/2$,得:

$$\Gamma_{k,l}^{j,r,s}=2^{1+r+s}\sum_{n\in Z}h_{n-2k}\sum_{m\in Z}h_{m-2l}\times\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_{[0,1]}\left(\frac{x}{2}\right)\phi^{(r)}(2^{j}x-n)\,\overline{\phi^{(s)}(2^{j}x-m)}\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)=$$
$$2^{r+s}\sum_{n\in Z}h_{n-2k}\sum_{m\in Z}h_{m-2l}\times\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\chi_{[0,1]}(x)+\right.$$

$$\chi_{[0,1]}(x-1)\Big]\phi^{(r)}(2^jx-n)\overline{\phi^{(s)}(2^jx-m)}\mathrm{d}x=$$

$$2^{r+s}\sum_{n\in Z}h_{n-2k}\sum_{m\in Z}h_{m-2l}(\Gamma_{n,m}^{j,r,s}+\Gamma_{n-2^j,m-2^j}^{j,r,s})=$$

$$2^{r+s}\Big(\sum_{n\in Z}h_{n-2k}\sum_{m\in Z}h_{m-2l}+\sum_{n\in Z}h_{n-2k+2^j}\sum_{m\in Z}h_{m-2l+2^j}\Big)\Gamma_{n,m}^{j,r,s}=$$

$$2^{r+s}A_{k,l,n,m}^{j,0,0}\Gamma_{n,m}^{j,r,s}=A_{k,l,n,m}^{j,r,s}\Gamma_{n,m}^{j,r,s}\tag{13}$$

由于联系系数 $\Gamma_{k,l}^{j,r,s}$ 的积分区域为[0,1]，而 Daubechies 小波的尺度函数 $\phi(t)$ 具有支撑区间[0, N]，则函数 $\chi_{[0,1]}(t)\phi(2^jt-k)$ 应满足以下特性：

$$\chi_{[0,1]}(t)\phi(2^jt-k)\begin{cases}\neq 0 & -(N-1)\leqslant k\leqslant 2^j-1\\ =0 & k\geqslant 2^j \text{ 或 } k\leqslant -N\end{cases}\tag{14}$$

因此，式(13)中的 k、l、n、m 应满足：

$$-(N-1)\leqslant k,l,n,m\leqslant 2^j-1\tag{15}$$

式(13)可改写为：

$$\Gamma_{k,l}^{j,r,s}=2^{r+s}\left(\sum_{n=\max(-(N-1),2k)}^{\min(2^j-1,2k+N)}h_{n-2k}\sum_{m=\max(-(N-1),2l)}^{\min(2^j-1,2l+N)}h_{m-2l}+\right.$$

$$\left.\sum_{n=\max(-(N-1),2k-2^j)}^{\min(2^j-1,2k+N-2^j)}h_{n-2k+2^j}\sum_{m=\max(-(N-1),2l-2^j)}^{\min(2^j-1,2l+N-2^j)}h_{m-2l+2^j}\right)\Gamma_{n,m}^{j,r,s}=$$

$$2^{r+s}A_{k,l,n,m}^{j,0,0}\Gamma_{n,m}^{j,r,s}=A_{k,l,n,m}^{j,r,s}\Gamma_{n,m}^{j,r,s}\tag{16}$$

即：

$$\begin{cases}\boldsymbol{\Gamma}^{j,r,s}=2^{r+s}\boldsymbol{A}^{j,0,0}\boldsymbol{\Gamma}^{j,r,s}=\boldsymbol{A}^{j,r,s}\boldsymbol{\Gamma}^{j,r,s}\\(\boldsymbol{A}^{j,r,s}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\Gamma}^{j,r,s}=\boldsymbol{0}\end{cases}\tag{17}$$

式中：

$$\boldsymbol{\Gamma}^{j,r,s}=(\Gamma_{n,m}^{j,r,s})_{((N+2^j-1)\times(N+2^j-1))\times 1}$$

$$-(N-1)\leqslant n,m\leqslant 2^j-1$$

$$\boldsymbol{A}^{j,r,s}=(2^{r+s}(h_{n-2k}h_{m-2l}+$$

$$h_{n-2k+2^j}h_{m-2l+2^j}))_{((N+2^j-1)\times(N+2^j-1))\times((N+2^j-1)\times(N+2^j-1))}$$

$$-(N-1)\leqslant k,l,n,m\leqslant 0$$

由联系系数 $\Gamma_{n,m}^{j,r,s}$ 组成向量矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}^{j,r,s}$，由滤波器系数 $\{h_k\}(k=0,1,\cdots,N)$ 组成方阵 $\boldsymbol{A}^{j,r,s}$。应该注意，矩阵 $\boldsymbol{A}^{j,r,s}$ 不满秩，因此，如果要使其能唯一求解，需要添加相应的附加方程。

分别对 n 次和 m 次幂函数求 r 阶和 s 阶导数，然后相乘得：

$$\frac{n!}{(n-r)!}\frac{m!}{(m-s)!}t^{(n+m-r-s)}=$$

$$2^{j(1+r+s)}\sum_{k=2^jt-N}^{2^jt}c_{j,k}^{n}\phi^{(r)}(2^jt-k)\sum_{l=2^jt-N}^{2^jt}c_{j,l}^{m}\phi^{(s)}(2^jt-l)\tag{18}$$

式中，$r\leqslant n\leqslant p-1$，$s\leqslant m\leqslant p-1$。

对上式两端在区间[0,1]进行积分，得：

$$\frac{n!}{(n-r)!}\frac{m!}{(m-s)!}\int_0^1 t^{(n+m-r-s)}\mathrm{d}t=$$

$$2^{j(1+r+s)}\sum_{k=2^jt-N}^{2^jt}c_{j,k}^{n}\sum_{l=2^jt-N}^{2^jt}c_{j,l}^{m}\int_0^1\phi^{(r)}(2^jt-k)\phi^{(s)}(2^jt-l)\mathrm{d}t$$

即：

$$\frac{n!}{(n-r)!}\frac{m!}{(m-s)!}\frac{1}{(n+m-r-s+1)}=$$

$$2^{j(1+r+s)}\sum_{k=2^jt-N}^{2^jt}c_{j,k}^{n}\sum_{l=2^jt-N}^{2^jt}c_{j,l}^{m}\Gamma_{k,l}^{j,r,s}\tag{19}$$

考虑到式(15)成立，则有：

$$2^{j(1+r+s)}\sum_{k=-(N-1)}^{2^j-1}c_{j,k}^{n}\sum_{l=-(N-1)}^{2^j-1}c_{j,l}^{m}\Gamma_{k,l}^{j,r,s}=$$

$$\frac{n!}{(n-r)!}\frac{m!}{(m-s)!}\frac{1}{(n+m-r-s+1)}\tag{20}$$

由此式所得到的非齐次方程补充到式(17)中，即可以求得联系系数的值。但由于式(20)所提供的方程个数多于式(17)所需要补充的附加方程个数，所以在求解时选用的方程不同，求得的联系系数具体值亦会有所不同。同时，式(20)还可校验计算结果的精度。

1.3 载荷列阵联系系数 $R_k^{j,r}$ 的计算

计算求导次数 $v>0$ 时式(6)的值，过程如下。

$$R_k^{j,v}=\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_{[0,1]}(t)t^v\phi(2^jt-k)\mathrm{d}t=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_{[0,1]}(t)t^v\sqrt{2}\sum_{n\in Z}h_{n-2k}\phi(2^{j+1}t-n)\mathrm{d}t=$$

$$\sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_{[0,1]}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^v\sum_{n\in Z}h_{n-2k}\phi(2^jx-n)\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)=$$

$$\frac{1}{2^{v+\frac{1}{2}}}\sum_{n\in Z}h_{n-2k}\int_{-\infty}^{+\infty}[\chi_{[0,1]}(x)+\chi_{[0,1]}(x-1)]x^v\phi(2^jx-$$

$$n)\mathrm{d}x=\frac{1}{2^{v+\frac{1}{2}}}\sum_{n\in Z}h_{n-2k}\left(R_n^{j,v}+\sum_{i=0}^{v}\binom{v}{i}R_{n-2^j}^{j,v-i}\right)=$$

$$\frac{1}{2^{v+\frac{1}{2}}}\sum_{n\in Z}h_{n-2k}\left(R_n^{j,v}+R_{n-2^j}^{j,v}+\sum_{i=1}^{v}\binom{v}{i}R_{n-2^j}^{j,v-i}\right)=$$

$$\frac{1}{2^{v+\frac{1}{2}}}\left(\Big(\sum_{n\in Z}h_{n-2k}+\sum_{n\in Z}h_{n-2k+2^j}\Big)R_n^{j,v}+\right.$$

$$\left.\sum_{n\in Z}h_{n-2k+2^j}\sum_{i=1}^{v}\binom{v}{i}R_n^{j,v-i}\right)=$$

$$\frac{1}{2^{v+\frac{1}{2}}}\left(B_{k,n}^{j,0}R_n^{j,v}+\sum_{n\in Z}h_{n-2k+2^j}\sum_{i=1}^{v}\binom{v}{i}R_n^{j,v-i}\right)\tag{21}$$

即:

$$2^{v+\frac{1}{2}}R_k^{j,v} = B_{k,n}^{j,0}R_n^{j,v} + \sum_{n\in Z}h_{n-2k+2^j}\sum_{i=1}^{v}\binom{v}{i}R_n^{j,v-i}$$

$$(2^{v+\frac{1}{2}}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}^{j,0})\boldsymbol{R}^{j,v} = \boldsymbol{D} \tag{22}$$

式中:

$$\boldsymbol{R}^{j,v} = (R_n^{j,v})_{(N+2^j-1)\times 1}$$

$$\boldsymbol{B}^{j,0} = (h_{n-2k} + h_{n-2k+2^j})_{(N+2^j-1)\times(N+2^j-1)}$$

$$\boldsymbol{D} = \left(\sum_{n=\max(-(N-1),2k-2^j)}^{\min(2^j-1,2k+N-2^j)}h_{n-2k+2^j}\sum_{i=1}^{v}\binom{v}{i}R_n^{j,v-i}\right)_{(N+2^j-1)\times 1}$$

其中:

$$-(N-1) \leqslant k,n \leqslant 2^j - 1$$

利用式(22)可以计算出 $R_k^{j,v}$,从而形成所需要的载荷列阵。同样,其系数矩阵奇异,需要添加相应的附加方程才能唯一求解。

针对不同的分辨空间 V_j,根据 Daubechies 小波的 p 阶消失矩的特点,可得:

$$t^q = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_{j,k}^q\phi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_{j,k}^q\phi(2^jt-k) \tag{23}$$

式中,$q \leqslant p-1$。

对式(23)两边乘以 t^v,并积分得:

$$\int_0^1 t^{v+q}\mathrm{d}t = 2^{\frac{j}{2}}\sum_{k\in Z}c_{j,k}^q\int_0^1 t^v\phi(2^jt-k)\,\mathrm{d}t =$$

$$2^{\frac{j}{2}}\sum_{k\in Z}c_{j,k}^q\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_{[0,1]}(t)t^v\phi(2^jt-k)\,\mathrm{d}t \tag{24}$$

$$\frac{1}{v+q+1} = 2^{\frac{j}{2}}\sum_{k=2^jt-N}^{2^jt}c_{j,k}^qR_k^{j,v} \quad (q \leqslant p-1)$$

即:

$$2^{\frac{j}{2}}\sum_{k=-(N-1)}^{2^j-1}c_{j,k}^qR_k^{j,v} = \frac{1}{v+q+1} \quad (q \leqslant p-1) \tag{25}$$

利用式(25)可以给式(22)提供补充方程,并且可以验证式(22)的计算结果是否准确。

2 Daubechies小波联系系数$\Gamma_{k,l}^{j,r,s}$及$R_k^{j,r}$的计算精度问题

在 Daubechies 小波有限元法中,提升计算精度的有效方法是增加计算层数。但其根本是联系系数的计算精度能得到保证。如果随着计算层数的增加,联系系数的计算精度难以提高,那就无法实现小波有限元法的高精度计算,Daubechies 小波在数值计算中的应用将受到限制。

但从目前已有的文献[3,7,8]可以看出,Daubechies 小波有限元法中除 0 尺度空间以外,其它空间的联系系数计算精度并不是很高。经过分析,笔者认为,影响 $\Gamma_{k,l}^{j,r,s}$ 及 $R_k^{j,r}$ 计算精度的主要因素列示如下。

首先,由于 $\Gamma_{k,l}^{j,r,s}$ 及 $R_k^{j,r}$ 的求解矩阵都不满秩,需要借助于附加方程才能唯一求解。但是,需要补充的具体方程数目至今还未有理论上的明确解答。

目前的常用方法[7-8]是:首先由求解矩阵的性质得出联系系数的解空间,引入与解空间的自由度个数相等的附加方程,从而组成恰定方程组,求解后可得到真实解向量。

为得出适宜的需引入附加方程数目,笔者进行了大量试算,发现需引入的附加方程数与小波消失矩及尺度函数导数阶数之和之间存在明显关系。本文将其变化规律列于表1。

具体试算方法为:运用 Matlab 软件编制计算程序,计算出矩阵 $\boldsymbol{A}^{j,r,s}$ 的秩,之后用未知量 $\boldsymbol{\Gamma}^{j,r,s}$ 的个数减去矩阵 $\boldsymbol{A}^{j,r,s}$ 的秩,即为所需补充的附加方程数。笔者按照此方法以不同的小波消失矩及尺度函数导数阶数为基本参数,逐个计算所需的附加方程个数,由此得出表1中所列的数值。当然,由于计算机存在存储误差,所得矩阵 $\boldsymbol{A}^{j,r,s}$ 的秩不一定完全准确。

表1 $\Gamma_{k,l}^{j,r,s}$ 及 $R_k^{j,r}$ 求解所需附加方程个数 n

Tab. 1 Number of additional equations in solving $\Gamma_{k,l}^{j,r,s}$ and $R_k^{j,r}$

p	n							
	$r+s=0$	$r+s=1$	$r+s=2$	$r+s=3$	$r+s=4$	$r+s=5$	$r+s=6$	$r+s=7$
2	1	2	–	–	–	–	–	–
3	1	2	3	–	–	–	–	–
4	1	2	3	4	–	–	–	–
5	1	2	3	4	5	–	–	–
6	1	2	3	4	5	6	–	–
7	1	2	3	4	5	6	7	–
8	1	2	3	4	5	6	7	8

说明:p 为小波消失矩数;$r+s$ 为尺度函数导数阶数之和;n 为所需引入的附加方程数目。

在试算过程中发现，表 1 中所总结的规律在消失矩 $p \leqslant 6$ 及计算层数 $V_j(j \leqslant 2)$ 时比较准确，而如果计算过程中采用了高阶消失矩及较高的计算层数，则计算误差会增大。

经分析，笔者认为存在如下因素造成联系系数的计算精度下降：

① 由于求解矩阵本身性态较差，而计算机又存在数据存储和判别误差，因此求解矩阵的秩不一定能准确求得，从而导致对其解空间的判定存在较明显误差；

② 所引入的附加方程与解空间相关度较高，因而组成的新方程组容易呈现病态，求出的解向量也将存在较大相对误差。

为提高计算精度，可以针对上述两条原因分别寻找解决方案：

① 改善计算环境，即设法降低计算机的数据存储和判别误差；

② 改变计算方法，尽量引入与解空间相关度较低或不相关的附加方程。

上述解决方法如能有效实现，可以有效提高联系系数的求解精度，但在现实情况中这两种方法都不容易实现。

首先，如要降低计算机的数据存储和判别误差，需要增加计算机的字长，将导致现有的基础计算软件平台都不能使用，而重新建立基础开发平台，其工作量不仅十分巨大也不太现实；

其次，要使引入的附加方程与解空间不相关，需要重新构造求解矩阵和附加方程组，但目前没有相关理论的支撑，因此进行这种算法的根本改变其难度也可想而知。

3　采用最小二乘法提高Daubechies小波联系系数 $\Gamma_{k,l}^{j,r,s}$ 及 $R_k^{j,r}$ 的计算精度

鉴于此，本文将最小二乘法引入上述求解过程中。最小二乘法，又称为最小平方法，是一种有效的数学优化技术。它通过最小化误差的平方和寻找数据的最佳函数匹配。

利用最小二乘法可以简便地求得未知的数据，并使得这些求得的数据与实际数据之间误差的平方和为最小。

笔者首先不再考虑求解联系系数时补充适量的附加方程以求解恰定方程组，而是考虑将所有的附加方程全部代入求解矩阵，此时组建的新方程组必然为超定方程组。

常规认为，超定方程组为矛盾方程组，因此无解。但在实际中可应用最小二乘法寻得方程组的一个最近似解作为方程组的解。

具体过程为：记 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，称使 $\|\boldsymbol{r}\|_2$ 为最小，即 $\|\boldsymbol{r}\|_2^2$ 也为最小的解 $\boldsymbol{x}^*$ 为方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的最小二乘解，该解存在且唯一。

为验证该法的有效性，笔者编制了 Matlab 计算程序，进行了大量试算，并与求解恰定方程组的结果进行对比。

结果表明，最小二乘法的引入确实有效提高了 Daubechies 小波联系系数的计算精度。

以下以 $\Gamma_{k,l}^{j,r,s}$ 为例证明该法的有效性。在每组实例中，分别按求解恰定方程组和求解超定方程组两种方法计算出联系系数值，然后将所求的值代入式(20) 以求得联系系数的最大相对误差值。计算过程在 Matlab 中编制程序完成。

实例 1　$p = 4, j = 1, r = 1, s = 1$（适用于小波轴力杆单元）。

求解恰定方程组所得的联系系数 $\Gamma_{k,l}^{j,r,s}$ 计算结果见式(26)，其最大相对误差为 1.4618E + 02。

求解超定方程组所得的联系系数 $\Gamma_{k,l}^{j,r,s}$ 计算结果见式(27)，其最大相对误差为 1.1546E − 12。

$$
\begin{bmatrix}
-3.1754E-09 & 6.3274E-07 & 7.3116E-06 & -2.3592E-05 & 1.9636E-05 & -6.4884E-04 & -2.1422E-06 & -3.5502E-16 \\
2.2630E-07 & -4.3725E-06 & -2.1902E-04 & 5.6272E-04 & -2.9252E-04 & 1.9314E-02 & 2.1936E-04 & -2.1422E-06 \\
6.0405E-07 & -4.6218E-05 & 2.1298E-04 & -9.2547E-04 & 1.9162E-03 & 4.5229E-02 & 1.4029E-03 & 8.6820E-04 \\
-6.1697E-06 & 3.0929E-04 & 2.2999E-03 & -1.5384E-03 & -1.8641E-02 & -3.9988E-01 & -2.0020E-02 & -1.7891E-02 \\
1.6910E-05 & -8.4950E-04 & -8.4277E-03 & 6.7603E-03 & 7.4295E-02 & 8.7166E-01 & 9.1972E-02 & -6.5518E-02 \\
-9.4257E-06 & 3.7295E-04 & 4.4921E-03 & 1.3578E-02 & -1.3482E-01 & -2.5349E-01 & -3.3662E-01 & 4.9321E-01 \\
-2.1422E-06 & 2.1936E-04 & 1.4056E-03 & -1.9463E-02 & 1.0232E-01 & -3.6219E-01 & 4.8601E-01 & -1.2262E+00 \\
-1.3610E-16 & -2.1422E-06 & 2.2879E-04 & 1.0496E-03 & -2.4799E-02 & 8.0008E-02 & -2.2296E-01 & 8.1555E-01
\end{bmatrix}
\tag{26}
$$

$$\begin{bmatrix} 3.3473E-08 & -5.2895E-07 & -1.1148E-06 & 7.5660E-06 & -8.3853E-06 & 1.0390E-05 & -7.9608E-06 & -3.3569E-17 \\ -5.2895E-07 & 7.0908E-05 & 4.1983E-05 & -7.9069E-04 & 1.3747E-03 & -1.5036E-03 & 8.1519E-04 & -7.9608E-06 \\ -1.1148E-06 & 4.1983E-05 & 2.8904E-03 & -1.0504E-02 & 1.3186E-02 & -1.1714E-02 & 5.2947E-03 & 8.0480E-04 \\ 7.5660E-06 & -7.9069E-04 & -1.0504E-02 & 5.8344E-02 & -1.2493E-01 & 1.4794E-01 & -7.6861E-02 & 6.7900E-03 \\ -8.3853E-06 & 1.3747E-03 & 1.3186E-02 & -1.2493E-01 & 4.0199E-01 & -5.6359E-01 & 3.3575E-01 & -6.3780E-02 \\ 1.0390E-05 & -1.5036E-03 & -1.1714E-02 & 1.4794E-01 & -5.6359E-01 & 1.4232E+00 & -1.1961E+00 & 2.0178E-01 \\ -7.9608E-06 & 8.1519E-04 & 5.2947E-03 & -7.6861E-02 & 3.3575E-01 & -1.1961E+00 & 1.6781E+00 & -7.4694E-01 \\ -3.9131E-17 & -7.9608E-06 & 8.0480E-04 & 6.7900E-03 & -6.3780E-02 & 2.0178E-01 & -7.4694E-01 & 6.0136E-01 \end{bmatrix} \tag{27}$$

实例 2　$p=5, j=2, r=2, s=2$(适用于单元荷载集度为常量的小波梁单元)。

由于联系系数计算结果为 12×12 方阵,故不列出其详细结果,仅提供其最大相对误差值。求解恰定方程组时最大相对误差为 1.9602E-09;求解超定方程组时最大相对误差为 9.1498E-10。

实例 3　$p=6, j=2, r=2, s=2$(适用于单元荷载集度为线性荷载的小波梁单元)。

由于联系系数计算结果为 14×14 方阵,故不列出其详细结果,仅提供其相对误差值。求解恰定方程组时最大相对误差为 1.4618E+02;求解超定方程组时最大相对误差为 1.1546E-12。

通过对比可看出,采用最小二乘法求解超定方程组可有效提高 Daubechies 小波有限元法中联系系数的计算精度。

4　结　论

1)联系系数 $\Gamma_{k,l}^{j,r,s}$ 及 $R_k^{j,r}$ 的计算是小波有限元法的重要内容,其计算精度直接影响最后的有限元计算结果。正是由于其计算精度的不理想,Daubechies 小波在有限元法中的应用受到了限制。

2)由于求解过程中系数矩阵不满秩,需选取适量的附加方程进行补充。但需要补充方程的精确数目不容易确定,且需手动添加附加方程使计算过程无法完全实现程序化。

3)若所选取的附加方程与原方程具有较高的相关度,会使求解矩阵出现病态甚至奇异,从而大大影响了计算结果的精度。

4)本文将求解恰定方程组变为求解超定方程组,不需要人工选取补充方程,使计算过程便于实现程序化。且引入最小二乘法进行求解,有效提高了联系系数的计算精度。

参考文献:

[1] 程正兴. 小波分析与应用实例[M]. 西安:西安交通大学出版社,2006.

[2] 孙延奎. 小波分析及其应用 [M]. 北京:机械工业出版社,2005.

[3] 韩建刚. 小波有限元理论及其在结构工程中的应用[D]. 西安:西安建筑科技大学,2003.
Han Jiangang. Theory of Wavelet FEM and Its Application in Structure Engineering[D]. Xi'an: Xi'an University of Architecture and Technology, 2003.

[4] 徐长发,冯勇,裴月琴. B 小波有限元法数值稳定性分析[J]. 华中理工大学学报,1996,24(6):105-112.
Xu Changfa, Feng Yong, Pei Yueqin. The numerical stability of the B wavelet FE method in solving partial differential equations[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology,1996,24(6):105-112.

[5] 杨胜军. 区间 B 样条小波有限元理论及工程应用研究[D]. 西安:西安交通大学,2002.
Yang Shengjun. Study on Theory of B-Spline Wavelet FEM and Its Application in Engineering[D]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University,2002.

[6] 向家伟,陈雪峰,李兵,等. 一维区间 B 样条小波单元的构造研究[J]. 应用力学学报,2006,23(2):222-227.
Xiang Jiawei, Chen Xuefeng, Li Bing, et al. Construction of one-dimensional elements with B-spline wavelet[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics,2006,23(2):222-227.

[7] 马军星. Daubechies 小波有限元理论及工程应用研究[D]. 西安:西安交通大学,2003.
Ma Junxing. Study on Theory of Daubechies Wavelet FEM and Its Application in Engineering[D]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University,2003.

[8] 何正嘉,陈雪峰,李兵,等. 小波有限元理论及其工程应用[M]. 北京:科学出版社,2006.

(责任编辑　王卫勋)