

DOI:10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2017.02.007

任意梯形断面溃坝洪水最大流量解析解

宁利中¹, 宁碧波², 胡彪¹, 田伟利³, 王永起¹

(1. 西安理工大学 西北旱区生态水利工程国家重点实验室培育基地, 陕西 西安 710048; 2. 嘉兴学院 建筑工程学院, 浙江 嘉兴 314001; 3. 上海大学 建筑系, 上海 200444)

摘要: 利用特征变换, 将 Saint-venant 方程组变成特征线方程组, 即不变量形式。本文对弧形断面和任意梯形断面不变量中的被积函数用级数展开再积分, 得到了 Riemann 不变量的初等表达式; 进一步, 获得了弧形断面和任意梯形断面无因次水深方程; 最后, 导出了任意梯形和弧形断面溃坝洪水最大流速和最大流量解析解。本文方法可用来预报任意梯形和弧形断面溃坝洪水最大流速和最大流量。

关键词: 解析解; 溃坝洪水; Riemann 不变量; 特征变换; 任意梯形断面; 弧形断面

中图分类号: TV122⁺.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1006-4710(2017)02-0164-05

Analytical solutions to maximum discharge of dam-breaking flood in arbitrary trapezoidal cross-section channels

NING Lizhong¹, NING Bibo², HU Biao¹, TIAN Weili³, WANG Yongqi¹

(1. State Key Laboratory Base of Eco-hydraulic Engineering in Arid Area, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China; 2. College of Civil Engineering and Architecture, Jiaxing University, Jiaxing 314001, China; 3. Department of Architecture, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract: By using characteristic transformation, Saint-venant equations are reduced to the equations of characteristic lines expressed by Riemann invariants. Expanding integral function of Riemann invariants for the case of arc and arbitrary trapezoidal cross-sections in Taylor's series and integrating it, the elementary function expressions of Riemann invariants are obtained. Further, equations of dimensionless water depth in arbitrary trapezoidal and arc cross-section channels are acquired. Finally, analytical solutions to the maximum velocity and discharge of dam-breaking flood are suggested. The method in this paper can be used for predicting the maximum velocity and maximum discharge of dam-breaking flood in arbitrary trapezoidal and arc cross-section channels.

Key words: analytical solutions; dam-breaking flood; Riemann invariant; characteristic transformation; arbitrary trapezoidal cross-section channel; arc cross-section channel

修建水利工程, 可为工业生产提供电能, 为城乡人民生活供水, 为农业灌溉服务, 提高河流的防洪能力。但由于战争、自然灾害等其它种种原因, 溃坝也时有发生, “75·8”洪水造成河南板桥等几座水库溃坝, 对工农业生产、人民生命财产造成严重后果, 同时, 溃坝水力学的研究也在我国引起了广泛的重视, 并取得了不少的成果。

关于溃坝最大流量的研究, 是溃坝水力学研究中的重要问题, 早在十九世纪 Ritter 等人就给出了矩形断面平底、无阻力瞬间全溃坝洪水最大

流量的解析解, 即著名的 Ritter 解^[1], 后来人们又提出了三角形、抛物线形及组合抛物线形溃坝洪水波 Ritter 解。近几十年来, 我国科技人员对所谓抛物线断面溃坝洪水过程线进行了近似分析, 获得了溃坝洪水的特征参数^[2], 对于横向局部溃坝问题, 运用动量定理给出了理论解^[3], 文献^[4]也从理论上对溃坝洪水波进行了探讨, 对于梯形断面^[5]、椭圆形断面^[6]及一类简单组合断面^[7]也给出了 Ritter 解。在理论分析^[8-10]、实验研究^[11,12]、数值模拟研究^[3-17]方面, 国内外的许多

收稿日期: 2016-04-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10872164); 陕西省重点学科建设专项资金资助项目(00X901)

作者简介: 宁利中, 男, 教授, 博士, 研究方向为对流动力学, 高速水力学。E-mail: ninglz@xaut.edu.cn

科研单位和院校也做了大量的工作。实际工程中存在各种各样的河床断面,河床底部横向倾斜,两侧边坡坡度不同的任意梯形断面及弧形断面就是两种河床断面。对于标准梯形断面已经有了研究成果^[5]。文献[3]对几种公式验证的结果表明,Ritter解是有足够精度的。本文将这种方法进一步推广到弧断面与任意梯形断面,以获得弧断面与任意梯形断面棱柱体河槽溃坝最大流量解析解。

1 基本方程

描述溃坝问题的基本方程为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{A}{B} \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - g(i - J_f) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

式中, $h, A, B, v, g, x, t, i, J_f$ 分别表示过水断面水深,过水断面面积,过水断面水面宽度,过水断面平均流速,重力加速度,距坝址的距离,时间,河槽底坡坡降,摩阻坡度。

式(1)是两个自变量的一阶拟线性偏微分方程组,根据特征理论^[18],特征线方程为:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v + \sqrt{g \frac{A}{B}} \\ \frac{dx}{dt} &= v - \sqrt{g \frac{A}{B}} \end{aligned} \quad (2)$$

对于顺特征线 $\frac{dx}{dt} = v + \sqrt{g \frac{A}{B}}$,特征向量为

$[\sqrt{g \frac{B}{A}}, 1]$ 。故由式(1)得:

$$\begin{aligned} (v + \sqrt{g \frac{A}{B}}) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \sqrt{g \frac{B}{A}} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \sqrt{g \frac{B}{A}} \frac{\partial h}{\partial t} - g(i - J_f) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

对于逆特征线 $\frac{dx}{dt} = v - \sqrt{g \frac{A}{B}}$,特征向量为

$[-\sqrt{g \frac{B}{A}}, 1]$,故由式(1)得:

$$\begin{aligned} (v - \sqrt{g \frac{A}{B}}) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \sqrt{g \frac{B}{A}} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \sqrt{g \frac{B}{A}} \frac{\partial h}{\partial t} - g(i - J_f) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

引入黎曼不变量:

$$r_{1,2} = v \pm \int_0^h \sqrt{g \frac{B}{A}} dh \quad (5)$$

并考虑平底、无阻力条件,即 $i - J_f = 0$,则沿特征线有:

$$\frac{dx}{dt} = v + \sqrt{g \frac{A}{B}} \quad (6)$$

$$\frac{dr_1}{dt} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = v - \sqrt{g \frac{A}{B}} \quad (7)$$

$$\frac{dr_2}{dt} = 0$$

式中, r_1 为沿顺特征线的黎曼不变量, r_2 为沿逆特征线的黎曼不变量。

设水库未扰动前水深为 h_0 ,流速 $v_0 = 0$,根据不变量的性质,沿顺特征线有:

$$v + \int_{h_0}^h \sqrt{g \frac{B}{A}} dh = v_0 + \int_{h_0}^{h_0} \sqrt{g \frac{B}{A}} dh \quad (8)$$

式中, h'_0 为水深起算点到换算断面底部的高度。

故:

$$v = \int_h^{h_0} \sqrt{g \frac{B}{A}} dh \quad (9)$$

沿逆特征线有:

$$\frac{dx}{dt} = v - \sqrt{g \frac{A}{B}} \quad (10)$$

考虑到溃坝波未受库区末端反射之前,逆特征为直线,式(10)中可用 $\frac{x}{t}$ 代替 $\frac{dx}{dt}$,则式(10)转化为:

$$\frac{x}{t} = \int_h^{h_0} \sqrt{g \frac{B}{A}} dh - \sqrt{g \frac{A}{B}} \quad (11)$$

在坝址处 $x=0$,则有:

$$\int_h^{h_0} \sqrt{g \frac{B}{A}} dh = \sqrt{g \frac{A}{B}} \quad (12)$$

式(12)两边均是 h 的函数,故由该式可求得坝址处水深 h ,然后由式(9)及式(12)可得最大流速 v_{max} ,最后得最大流量为:

$$Q_{max} = v_{max} A = A \int_h^{h_0} \sqrt{g \frac{B}{A}} dh = A \sqrt{g \frac{A}{B}} \quad (13)$$

式(13)对于任意断面的溃坝问题均是适应的。

2 弧形断面溃坝最大流量解析解

对于半径为 R 弧形断面,如图 1 所示。过水面积为:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi R^2}{2} + R(h - R) \sqrt{1 - \left(\frac{h - R}{R} \right)^2} + \\ &R^2 \arcsin \frac{h - R}{R} \end{aligned} \quad (14)$$

水面宽度为:

$$B = 2R \sqrt{1 - \left(\frac{h-R}{R}\right)^2} \quad (15)$$

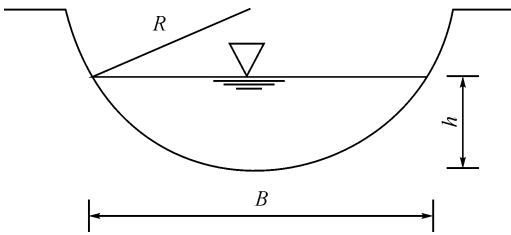


图 1 弧形断面示意图

Fig. 1 Arc cross-section channel

令 $\eta = \frac{h-R}{R}$, 则 $d\eta = \frac{1}{R}dh$, 故:

$$\begin{aligned} \sqrt{g \frac{A}{B}} &= \frac{\sqrt{gR\pi}}{2} \\ \left[\frac{1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{h-R}{R} \sqrt{1 - \left(\frac{h-R}{R}\right)^2} + \arcsin \frac{h-R}{R} \right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{h-R}{R}\right)^2}} \right]^{\frac{1}{2}} &= \\ \frac{\sqrt{gR\pi}}{2} \left[\frac{1 + \frac{2}{\pi} (\eta \sqrt{1 - \eta^2} + \arcsin \eta)}{\sqrt{1 - \eta^2}} \right]^{\frac{1}{2}} &= \\ 2 \sqrt{\frac{gR}{\pi}} P(\eta) & \end{aligned} \quad (16)$$

其中:

$$P(\eta) = \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{2}{\pi} (\eta \sqrt{1 - \eta^2} + \arcsin \eta) \right)^{1/2} \cdot (1 - \eta^2)^{-1/4}$$

$$\begin{aligned} \int_0^h \sqrt{g \frac{B}{A}} dh &= \\ \int_{-1}^{\eta} 2 \sqrt{\frac{Rg}{\pi}} \frac{(1 - \eta^2)^{1/4}}{\left(1 + \frac{2}{\pi} (\eta \sqrt{1 - \eta^2} + \arcsin \eta) \right)^{1/2}} d\eta & \end{aligned} \quad (17)$$

将式(17)中被积函数展开成级数形式,再积分有:

$$\int_0^h \sqrt{g \frac{B}{A}} dh = 2 \sqrt{\frac{Rg}{\pi}} \eta F(\eta) + C \quad (18)$$

其中:C为常数。

$$\begin{aligned} F(\eta) &= 1 - 0.318310\eta + 0.119310\eta^2 - 0.094943\eta^3 - \\ & 0.645951\eta^4 - 0.048438\eta^5 + 0.037758\eta^6 + \\ & 0.097439\eta^7 + 0.022337\eta^8 \end{aligned} \quad (19)$$

将式(18)及式(16)代入式(12),得:

$$\eta_0 F(\eta_0) - \eta F(\eta) = P(\eta) \quad (20)$$

式中, $\eta_0 = \frac{h_0 - R}{R}$ 。

式(20)仅是一般隐式方程求解问题,可采用计算机数值求解或简化的图解法求解^[7]。

由式(20)求得 η 后,可得无因次最大水深:

$$\frac{h}{h_0} = \frac{R}{h_0} + \left(1 - \frac{R}{h_0}\right) \frac{F(\eta_0)}{F(\eta) + P(\eta)/\eta} \quad (21)$$

将式(12)代入式(9),并考虑式(16),有:

$$v_{\max} = 2 \sqrt{\frac{gR}{\pi}} P(\eta) \quad (22)$$

则无因次最大流速的表达式为:

$$\frac{v_{\max}}{\sqrt{g \frac{A_0}{B_0}}} = \frac{P(\eta)}{P(\eta_0)} \quad (23)$$

式中, A_0 、 B_0 分别为水深为 h_0 时圆弧断面的过水断面面积,水面宽度。

最大流量为:

$$Q_{\max} = v_{\max} A = 16 \sqrt{g \frac{R^5}{\pi^3}} \cdot \sqrt{1 - \eta^2} P^3(\eta) \quad (24)$$

无因次最大流量表达式为:

$$\frac{Q_{\max}}{A_0 \sqrt{g \frac{A_0}{B_0}}} = \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{1 - \eta_0^2}} \cdot \frac{P^3(\eta)}{P^3(\eta_0)} \quad (25)$$

3 任意梯形断面溃坝最大流量解析解

对于如图 2 所示的任意梯形断面过流河槽,过水面积为:

$$A = \frac{1}{2} [2b + (m_1 + m_2)(h - h'_0)](h - h'_0) \quad (26)$$

水面宽度为:

$$B = b + (m_1 + m_2)(h - h'_0) \quad (27)$$

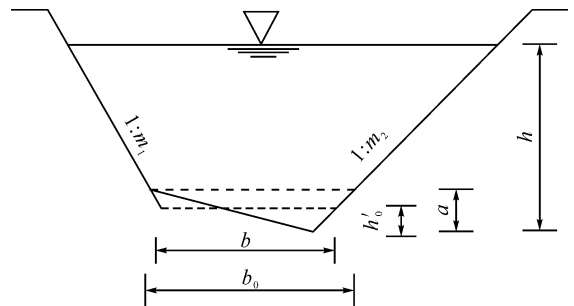


图 2 任意梯形断面示意图

Fig. 2 Arbitrary trapezoidal cross-section channel

在 a, b_0, h'_0 已知条件下, b 为:

$$b = b_0 - (m_1 + m_2)(a - h'_0) \quad (28)$$

式中, m_1 为梯形断面左边坡, m_2 为梯形断面右边坡, a 为梯形断面斜底高差, h'_0 为梯形断面底部到换

算的梯形断面底部的高差, b_0 为从梯形断面斜底最高点计算的底宽, b 为换算的梯形断面底部宽度。

若令 $m = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)$, $y = \left[\frac{m(h-h'_0)}{b} \right]^{\frac{1}{2}}$, 则

$dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{b} \frac{1}{h-h'_0}} dh$, 故:

$$\begin{aligned} \sqrt{g \frac{A}{B}} &= \sqrt{g \frac{[b+m(h-h'_0)](h-h'_0)}{b+2m(h-h'_0)}} = \\ \sqrt{g \frac{b}{m}} \sqrt{\frac{(1+y^2)y^2}{1+2y^2}} &= 2\sqrt{g \frac{b}{m}} N(y) \end{aligned} \quad (29)$$

其中:

$$N(y) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(1+y^2)y^2}{1+2y^2}}$$

$$A = 4 \frac{b^2}{m} (1+2y^2) N^2(y)$$

$$\begin{aligned} \int_{h'_0}^h \sqrt{g \frac{B}{A}} dh &= \int_{h'_0}^h \sqrt{g \frac{b+2m(h-h'_0)}{[b+m(h-h'_0)](h-h'_0)}} dh = \\ \int_0^y 2\sqrt{\frac{gb}{m}} \sqrt{\frac{1+2y^2}{1+y^2}} dy &\quad (30) \end{aligned}$$

经过上述变换后, 式(30)中被积函数的形式与对称梯形断面^[6]是等效的, 展开式(30)中的被积函数成级数并积分, 则式(30)可表达为:

$$2 \int_0^y \sqrt{\frac{gb}{m}} \cdot \sqrt{\frac{1+2y^2}{1+y^2}} dy = 2\sqrt{g \frac{b}{m}} yG(y) \quad (31)$$

其中:

$$G(y) = \frac{23}{16} - \frac{55}{128} \frac{1}{y} \arctg y + \frac{1}{128(1+y^2)} - \frac{1}{64(1+y^2)^2}$$

将式(29)和式(31)代入式(12), 得:

$$y_0 G(y_0) - yG(y) = N(y) \quad (32)$$

式中, $y_0 = \left[\frac{m(h_0-h'_0)}{b} \right]^{\frac{1}{2}}$, h_0 水库未扰动前水深。

求解式(32)较为容易, 可以通过计算机求解, 也可以用图解法求解。

在 y 求得后, 可得无因次水深的表达式为:

$$\frac{h-h'_0}{h_0-h'_0} = \sqrt{\frac{y}{y_0}} = \left[\frac{G(y_0)}{G(y)+N(y)/y} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (33)$$

考虑式(9)和式(12), 可得最大流速为:

$$v_{\max} = 2\sqrt{g \frac{2b}{m_1+m_2}} N(y) \quad (34)$$

无因次最大流速为:

$$\frac{v_{\max}}{\sqrt{g \frac{A_{10}}{B_{10}}}} = \frac{N(y)}{N(y_0)} \quad (35)$$

式中, A_{10} 、 B_{10} 分别为水深为 h_0 时梯形断面的过水断面面积, 水面宽度。

将式(34)代入式(13), 最大流量为:

$$Q_{\max} = Av_{\max} = 16\sqrt{g \frac{2b^5}{(m_1+m_2)^3}} (1+2y^2) N^3(y) \quad (36)$$

无因次最大流量为:

$$\frac{Q_{\max}}{A_{10} \sqrt{g \frac{A_{10}}{B_{10}}}} = \left(\frac{1+2y^2}{1+y_0^2} \right) \frac{N^3(y)}{N^3(y_0)} \quad (37)$$

4 算例

有一水利工程, 河谷断面为圆弧形, 圆弧半径 $R=100$ m, 水库正常水深 $h_0=80$ m, 河床平缓。求水库在突然全溃坝时的泄流特性参数。

4.1 计算参数 η_0 、 $P(\eta_0)$ 、 $F(\eta_0)$

由 $\eta = \frac{h_0-R}{R}$, 得 $\eta_0 = -0.2$ 。由 $P(\eta_0)$ 、 $F(\eta_0)$ 的定义, 得 $P(\eta_0) = 0.685\ 397\ 188$, $F(\eta_0) = 1.068\ 177\ 149$ 。

4.2 计算参数 η

由式(20)得:

$$\eta = \frac{\eta_0 F(\eta_0) - P(\eta)}{F(\eta)} \quad (38)$$

假设 $\eta_1 = -0.4$, 代入式(38)右边得到新的 η_2 , 再将 η_2 代入式(38)右边得到新的 η_3 , 经过 9 次迭代得到 $\eta = -0.588$, 相应的 $P(\eta) = 0.475\ 428\ 636$, $F(\eta) = 1.173\ 418\ 801$ 。

4.3 计算特性参数

由式(21), 得无因次水深为:

$$\frac{h}{h_0} = 0.518\ 104\ 521$$

由式(22)和式(23), 得最大流速和无因次最大流速为:

$$v_{\max} = 16.798\ 23\ \text{m/s}$$

$$\frac{v_{\max}}{\sqrt{g \frac{A_0}{B_0}}} = 0.693\ 654\ 2$$

由式(24)和式(25), 得最大流量和无因次最大流量为:

$$Q_{\max} = 78\ 247.129\ 65\ \text{m}^3/\text{s}$$

$$\frac{Q_{\max}}{A_0 \sqrt{g \frac{A_0}{B_0}}} = 0.275\ 528\ 99$$

5 结语

本文通过特征变换, 将 Saint-venant 方程组变

成特征线方程组,即不变量形式。对弧形断面和任意梯形断面不变量中的被积函数用级数展开再积分,得到了 Riemann 不变量的初等表达式,从而获得溃坝水深方程,通过用迭代法求得水深后,给出了弧形断面与任意梯形断面河槽溃坝洪水特性参数(即无因次最大水深、无因次最大流速、无因次最大流量)的解析解。本文最后通过一个算例给出了溃坝水深的求解方法及无因次最大水深、无因次最大流速、无因次最大流量的计算步骤。本文的方法可用来预报相关断面溃坝洪水最大流速和最大流量。

参考文献:

- [1] 李炜. 水力计算手册[M]. 第二版. 北京:中国水利电力出版社,2006:434-461.
- [2] 林秉南,龚振瀛,王连祥. 突泄坝趾过程线简化分析[J]. 清华大学学报,1980,20(1):17-31.
LIN Bingnan, GONG Zhenying, WANG Lianxiang. Dam-site hydrographs due to sudden release[J]. Journal of Tsinghua University, 1980, 20(1):17-31.
- [3] 戴荣尧,王群. 溃坝最大流量的研究[J]. 水利学报,1983,14(2):13-21.
DAI Rongyao, WANG Qun. Research on the maximum discharge of dam-breaking wave[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1983,14(2):13-21.
- [4] 谢任之. 平底无阻力河床溃坝波的瞬间全溃解[J]. 水利学报,1984,15(2):49-56.
XIE Renzhi. Solution of instantaneous dam-breaking wave on flat sloping channel bed without resistance [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1984,15(2):49-56.
- [5] 伍超. 梯形断面溃坝波 Ritter 解[J]. 水动力学研究与进展,1986,1(2):82-88.
WU Chao. Ritter's solution of dam-breaking wave in trapezoid cross-section channel [J]. Chinese Journal of Hydrodynamics, 1986, 1(2):82-88.
- [6] 宁利中. 椭圆形断面溃坝波 Ritter 解[J]. 西安理工大学学报,1990,6(4):283-331.
NING Lizhong. Ritter's solution of dam-breaking wave in elliptic cross-section channel [J]. Journal of Xi'an University of Technology,1990,6(4):283-331.
- [7] 宁利中. 简单组合断面瞬间全溃坝最大流量的解析解[J]. 陕西水力发电,1987,3(3):29-36.
NING Lizhong. Analytical solutions for the maximum discharge of instantaneous dam-breaking wave in the simple combined cross-section channel[J]. Shaanxi Water Power, 1987, 3(3):29-36.
- [8] 谭震宏. 平底棱柱体水库溃坝波分析[J]. 水利学报,1992,23(4):39-47.
TAN Zhenhong. Analysis for dam-breaking wave in prism reservoir with flatsloping bed[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1992,23(4):39-47.
- [9] 黄国富,张翼飞,伍超,等. 一维溃坝波在斜底坡河道中演进的解析解[J]. 水动力学研究与进展,2005,20(5):597-603.
HUANG Guofu, ZHANG Yifei, WU Chao, et al. Analytical solutions for 1-D dam-break flood on sloping channel bed [J]. Chinese Journal of Hydrodynamics, 2005, 20(5):597-603.
- [10] HUNT B. Perturbation solution for dam-break floods [J]. Journal of Hydraulic Division, ASCE, 1984, 110(8):1058-1071.
- [11] 许唯临,陈华勇,薛阳,等. 梯级库群的连锁溃决[M]. 北京:中国水利水电出版社,2013:1-235.
- [12] 刘杰,丁留谦,缪良娟,等. 沟后面板砂砾石坝溃坝机理模型试验研究[J]. 水利学报,1998,29(11):69-75.
LIU Jie, DING Liujian, MIAO Liangjuan, et al. Model test for dam break of Gouhou concrete face sandy gravel dam[J]. Journal of Hydraulic Engineering,1998, 29(11):69-75.
- [13] AURELI F, MARANZONI A, MIGNOSA P, et al. Dam-break flows: Acquisition of experimental data through an imaging technique and 2D numerical modeling [J]. Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 2008,134(8):1089-1101.
- [14] ALIPARAST M. Two-dimensional finite volume method for dam-break flow simulation[J]. International Journal of Sediment Research,2009,24(1):99-107.
- [15] CHANG W Y, LEE L C, LIEN H C, et al. Simulations of dam-break flow using free surface capturing method [J]. Journal of Mechanics, 2008, 24(4):391-403.
- [16] BEGNUDELLI L, SANDERS B F. Simulation of the St. Francis dam-break flood[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE,2007,133(11):1200-1212.
- [17] FAGHERAZZI S, RASETARINERA P, HUSSAINI M Y, et al. Numerical solution of the dam-break problem with a discontinuous Galerkin method[J]. Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 2004, 130(6):532-539.
- [18] 复旦大学数学系. 数学物理方程[M]. 北京:人民教育出版社,1979.

(责任编辑 周 蓓)