

DOI:10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2016.02.016

# 混流式水轮机外特性与几何尺寸的关系研究

门闯社, 南海鹏

(西安理工大学 水利水电学院, 陕西 西安 710048)

**摘要:** 水轮机外特性主要受其几何尺寸影响,但目前尚没有探明水轮机外特性与其几何尺寸之间的关系式,在水轮机一维流动理论中无法采用水轮机几何尺寸信息对其外特性进行预测。本文在水轮机流量调节方程的基础上结合能量守恒定律建立了混流式水轮机的一维数学模型,得到了流量特性与力矩特性的显式表达式,可有效预测水轮机外特性曲线,并通过与实测数据的比对验证了该模型的正确性。文中提出的水轮机外特性曲线预测方法在水电站初步设计、过渡过程计算中混流式水轮机特性曲线延伸等领域具有重要的理论意义和实用价值。

**关键词:** 混流式水轮机; 水轮机特性曲线; 几何尺寸; 流量特性; 力矩特性

**中图分类号:** TK73

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1006-4710(2016)02-0226-06

## Research on the relationship between francis turbines external characteristics and their construction and dimension

MEN Chuangshe, NAN Haipeng

(School of Water Resources and Hydroelectric Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

**Abstract:** The turbine external characteristics is influenced by construction and dimension of turbine mainly, but the relationship between turbine characteristics and turbine dimension is so unclear that it is unable to predicting turbine characteristic curves according to turbine dimension parameters in one-dimensional model. Therefore, a one-dimensional mathematical model of francis turbine is built based on the law of energy conservation and the hydraulic turbine flow equation. The flow characteristic expression and the torque characteristic expression are obtained which can predict the turbine external characteristics availably. The correctness of the model is verified by comparison between theoretical calculation data and the experimental data. In this paper, the proposed method for predicting hydraulic turbine external characteristic curves has important theoretical significance and practical value in the field of hydropower station design and the Francis-turbine characteristic curves expansion.

**Key words:** francis turbine; turbine characteristic curves; construction and dimension; flow characteristic; torque characteristic

混流式水轮机被广泛应用于水力发电系统中,其外特性曲线是水轮机性能的主要描述方法之一。但在目前研究中,仅可以通过试验或三维数值仿真的方式获取水轮机部分区域的外特性曲线<sup>[1-2]</sup>,还没有一种通过水轮机几何尺寸参数计算其外特性的函数表达式,进而在在一维流动理论中无法根据水轮机几何尺寸预测其外特性。

文献[3]采用三维数值模拟的方法得到了混流

式水泵水轮机的特性,但该方法存在工作量大、计算周期长等缺点,难以快速获取水轮机外特性。文献[4]通过对水轮机流量调节方程的进一步推导,发现当开度保持不变时,水轮机效率除以单位转速的平方与单位流量除以单位转速之间存在线性关系,进而得到水轮机流量特性与力矩特性的内在联系,但没能给出流量特性与力矩特性的计算方法。文献[5]通过理论分析绘制了混流式水泵水轮机的全特

**收稿日期:** 2015-10-31

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(51479166,51339005)

**作者简介:** 门闯社,男,博士生,研究方向为水轮机仿真与建模。E-mail: menchuangshe@126.com

**通讯作者:** 南海鹏,男,博士,教授,博导,研究方向为水电站过渡过程控制。E-mail: hxnhp@163.com

性曲线,但在分析中将水轮机中的能量损失简化为局部损失进行了处理,该方法不能反映工况变化时水轮机中能量损失形式的变化,无法获取较大范围的水轮机特性。

本文对水轮机流量调节方程进行了整理,详细分析了水轮机各部件的能量损失,进而建立了水轮机能量平衡关系式,在此基础上推导出了基于几何尺寸的水轮机流量特性与力矩特性函数表达形式,并以此预测水轮机外特性曲线,通过与实验结果相对比证明了该方法的有效性。

### 1 混流式水轮机建模

一切物理运动均受动量守恒和能量守恒规律的共同支配,水轮机的运动也不例外。水轮机流量调节方程的本质是动量守恒定理在水轮机中的应用,如果能建立水轮机的能量守恒规律表达式,将其与流量调节方程结合,应该能够描述水轮机基本特性。在不失一般性的前提下,为了便于分析与建模,作以下4条假设。

假设1:水为不可压缩流体,其密度恒定不变。

假设2:水轮机及流道均为刚性壁面,其物理形状不随受力的变化而变化。

假设3:流道内水体的流动为有压流,即不考虑水体的空化影响。

假设4:水轮机内的流动为轴对称流动。

#### 1.1 基于水轮机流量调节方程的单位力矩表达式

众所周知,混流式水轮机满足水轮机流量调节方程,其表达式为:

$$Q_t = \frac{\frac{\pi}{30} r_2^2 n_t + \frac{30 \eta_t g H_t}{\pi n_t}}{\frac{1}{2\pi b_0} \cot \alpha_0 + \frac{r_2}{A_2} \cot \beta_2} \quad (1)$$

式中,  $H_t$ 、 $Q_t$ 、 $\eta_t$  和  $n_t$  分别为水轮机水头、流量、效率和转速;  $r_2$ 、 $A_2$  和  $\beta_2$  分别为水轮机出口半径、出流面积和叶片出口安放角;  $b_0$  和  $\alpha_0$  分别表示导叶高度和导叶出流角;  $g$  为重力加速度。

水轮机力矩可表示为:

$$M_t = \frac{30 \eta_t \rho g Q_t H_t}{\pi n_t} \quad (2)$$

式中,  $\rho$  为水密度。

由相似理论可以得到如下关系式:

$$\begin{cases} n_t = \frac{n_{11} \sqrt{H_t}}{D_1} \\ Q_t = Q_{11} D_1^2 \sqrt{H_t} \\ M_t = M_{11} D_1^3 H_t \end{cases} \quad (3)$$

式中,  $n_{11}$ 、 $Q_{11}$  和  $M_{11}$  分别为水轮机单位转速、单位流量和单位力矩;  $D_1$  为水轮机标称直径。

联立式(1)、式(2)及式(3)可得基于水轮机流量调节方程的单位力矩表达式:

$$M_{11} = \rho D_1 \left( \frac{1}{2\pi b_0} \cot \alpha_0 + \frac{r_2}{A_2} \cot \beta_2 \right) Q_{11}^2 - \frac{\pi \rho r_2^2}{30} \frac{n_{11}}{D_1^2} Q_{11} \quad (4)$$

#### 1.2 基于能量守恒的单位力矩表达式

水轮机在运行过程中必须满足能量守恒定律,即流过水轮机的水体所失去的能量等于水轮机获得的能量与损失能量之和,可表示为:

$$P_w = P_t + P_L \quad (5)$$

式中  $P_w = \rho g Q_t H_t$  代表流过水轮机的水体失去的能量,  $P_t = \frac{\pi}{30} M_t n_t$  代表水轮机获得的能量,  $P_L$  则为损失能量。

然而水轮机中的能量损失异常复杂,随水轮机工况的变化具有较大的变化,为此将水轮机中的能量损失划分为容积损失、导叶入口撞击损失、叶片入口撞击损失、叶片出口旋转损失和圆盘摩擦损失,下面逐一进行讨论。

##### 1.2.1 容积损失

容积损失即为从水轮机缝隙中流失的水体所具有的能量,其损失功率可以表示为<sup>[6-8]</sup>:

$$P_c = \lambda_c \rho g Q_t H_t \quad (6)$$

式中  $\lambda_c$  为容积损失系数,其值表示漏水流量与总流量的比值。

##### 1.2.2 导叶入口撞击损失

在导叶入口处,水体与导叶产生撞击,进而损失一部分能量<sup>[11]</sup>。其速度三角形如图1所示,水体流入导叶前流速为  $v_0$ ,流入导叶后沿导叶骨线方向以  $w_0$  进行流动,由于水体流入导叶前、后水的流量保持不变,那么  $v_0$  和  $w_0$  沿轴面的分速度  $v_m$  保持恒定。

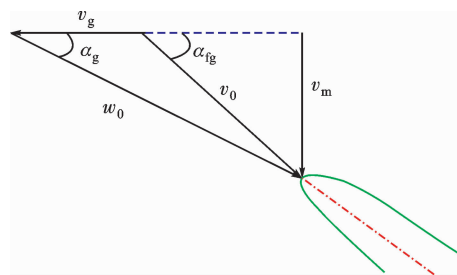


图1 导叶入口速度三角形  
Fig.1 Velocity triangle of guide vane inlet

对速度三角形分析可知,导叶上的损失即为图1中的  $v_g$  分量,即损失水头可以表示为:

$$\begin{cases} H_g = \frac{v_g^2}{2g} \\ v_g = \frac{Q_t}{\pi D_0 b_0} (\cot\alpha_g - \cot\alpha_{fg}) \end{cases} \quad (7)$$

式中  $v_g$  为导叶入口损失速度分量;  $\alpha_g$ 、 $\alpha_{fg}$  分别为当前导叶入流角和固定导叶出流角;  $D_0$  为导叶入口所在圆周的直径。

那么导叶中损失功率可表示为:

$$P_g = \rho g Q_t H_g = \frac{\rho (\cot\alpha_{fg} - \cot\alpha_g)^2}{2\pi^2 D_0^2 b_0^2} Q_t^3 \quad (8)$$

### 1.2.3 叶片入口撞击损失

在水轮机入口处水流与叶片撞击产生一部分能量损失,其速度三角形如图 2 所示。

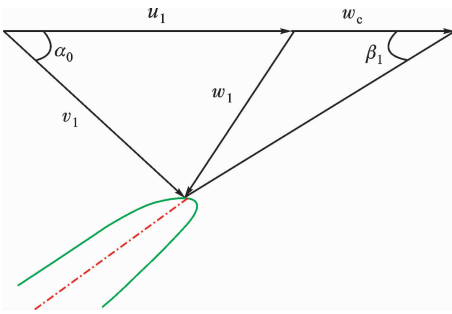


图 2 水轮机入口速度三角形

Fig.2 Velocity triangle of turbine vane inlet

叶片入口处水流绝对速度为  $v_1$ , 叶片入流角为导叶出流角  $\alpha_0$ 。水轮机切向流速为  $u_1$ , 相对流速为  $w_1$ 。水流与叶片撞击前以相对速度  $w_1$  流动, 与叶片撞击后其相对流动方向沿叶片骨线方向。由速度三角形可知叶片入口损失水头可以表示为:

$$H_1 = \frac{w_c^2}{2g} \quad (9)$$

由速度三角形几何关系可知:

$$w_c = \frac{\sin(\alpha_0 + \beta_1)}{\sin\beta_1} v_1 - u_1 \quad (10)$$

将式(10)代入式(9)后得到:

$$H_1 = \frac{1}{2g} \left[ \frac{\sin(\alpha_0 + \beta_1)}{\sin\beta_1} v_1 - u_1 \right]^2 \quad (11)$$

其中叶片入口处切线速度为:

$$u_1 = \frac{\pi D_1}{60} n_t \quad (12)$$

入口绝对速度满足:

$$v_1 = \frac{Q_t}{\pi D_1 b_0 \sin\alpha_0} \quad (13)$$

将式(12)、(13)代入式(11)可得:

$$H_1 = \frac{1}{2g} \left[ \frac{\sin(\alpha_0 + \beta_1)}{\pi D_1 b_0 \sin\alpha_0 \sin\beta_1} Q_t - \frac{\pi D_1}{60} n_t \right]^2 \quad (14)$$

那么入口撞击损失功率为:

$$P_1 = \rho g Q_t H_1 =$$

$$\frac{\rho Q_t}{2} \left[ \frac{\sin(\alpha_0 + \beta_1)}{\pi D_1 b_0 \sin\alpha_0 \sin\beta_1} Q_t - \frac{\pi D_1}{60} n_t \right]^2 \quad (15)$$

### 1.2.4 叶片出口旋转损失

在水轮机出口处水流因旋转而在蜗壳中产生一部分能量损失,其速度三角形如图 3 所示。

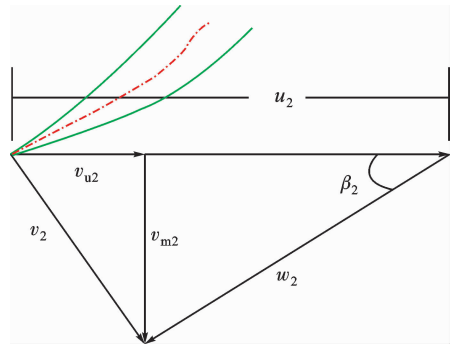


图 3 水轮机出口速度三角形

Fig.3 Velocity triangle of turbine vane outlet

相对流速为  $w_2$ , 水轮机圆周速度为  $u_2$ , 绝对流速为  $v_2$ 。由于出口前后流量恒定, 因此  $w_2$  和  $v_2$  在轴面的分量  $v_{m2}$  恒定, 由速度三角形可知水轮机出口损失水头可表示为:

$$\begin{cases} H_2 = \frac{v_{u2}^2}{2g} \\ v_{u2} = \frac{\pi}{30} n_t r_2 - \frac{Q_t}{A_2} \cot\beta_2 \end{cases} \quad (16)$$

那么水轮机出口旋转损失的功率为:

$$P_2 = \rho g Q_t H_2 = \frac{Q_t \rho}{2} \left[ \frac{\pi r_2}{30} n_t - \frac{Q_t \cot\beta_2}{A_2} \right]^2 \quad (17)$$

### 1.2.5 圆盘摩擦损失

水轮机在水中旋转与周围的水体摩擦所损失掉的能量为圆盘摩擦损失。损失功率可根据经验公式进行计算,其表达式为<sup>[12]</sup>:

$$P_f = 1.256 \times 10^{-10} k \rho n^3 D_1^5 \quad (18)$$

式中  $k$  取 0.8~1.0。

那么水轮机中总的能量损失可以表示为:

$$P_L = P_c + P_g + P_1 + P_2 + P_f \quad (19)$$

将水轮机能量损失代入能量守恒方程,并利用相似原理将各参数化为单位参数,整理可得基于能量守恒的单位力矩表达式:

$$\begin{cases} M_{11} = a' Q_{11}^3 + b' Q_{11}^2 + c' Q_{11} + d' \\ a' = -\frac{15\rho D_1^4 (\cot\alpha_{fg} - \cot\alpha_g)^2}{\pi^3 D_0^2 b_0^2 n_{11}} - \frac{15\rho D_1^2 \sin^2(\alpha_0 + \beta_1)}{\pi^3 b_0^2 n_{11} \sin^2\alpha_0 \sin^2\beta_1} - \frac{15\rho D_1^4 \cot^2\beta_2}{\pi A_2^2 n_{11}} \\ b' = \frac{\rho D_1 \sin(\alpha_0 + \beta_1)}{2\pi b_0 \sin\alpha_0 \sin\beta_1} + \frac{\rho r_2 D_1 \cot\beta_2}{A_2} \\ c' = \frac{30\rho g}{\pi n_{11}} (1 - \lambda_c) - \frac{\pi\rho}{240} n_{11} - \frac{\pi\rho r_2^2 n_{11}}{60 D_1^2} \\ d' = -1.2 \times 10^{-5} k \rho n_{11}^2 \end{cases} \quad (20)$$

### 1.3 水轮机外特性方程

通过以上的分析得到了两组单位力矩表达式,即式(4)与式(20),对该两式进行联立并消去单位力矩  $M_{11}$ ,可以得到水轮机流量特性的隐式表达式:

$$\begin{cases} aQ_{11}^3 + bQ_{11}^2 + cQ_{11} + d = 0 \\ a = a' \\ b = b' - \frac{\rho D_1 \cot \alpha_0}{2\pi b_0} - \frac{\sigma_2 D_1 \cot \beta_2}{A_2} \\ c = c' + \frac{\pi \sigma_2^2 n_{11}}{30 D_1^2} \\ d = d' \end{cases} \quad (21)$$

当机组开度与单位转速给定时,系数  $a、b、c、d$  均为常数,单位流量满足三次多项式方程的形式。考虑到水轮机工况时水轮机流量及出力均大于 0,由此可以得到水轮机的流量特性方程:

$$Q_{11} = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \frac{b}{3a} \quad (22)$$

式中  $p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}$ ,  $\theta = \arccos\left(-\frac{q\sqrt{-27p}}{2p^2}\right)$ ,  $q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}$ 。

将式(22)带入式(20)便可以得到力矩特性方程:

$$\begin{aligned} M_{11} = & -\frac{8ap}{3} \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos^3 \frac{\theta}{3} + \\ & \frac{4(b-b')p}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} + \\ & \frac{2b^2 - 4b'b + 6ac'}{3a} \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\theta}{3} - \\ & \frac{b^3 + 3b^2b' - 9abc'}{27a^2} + d \end{aligned} \quad (23)$$

公式(22)和(23)分别表征了水轮机的流量特性与力矩特性,为水轮机的外特性方程。由外特性方程可以看出水轮机单位流量和单位力矩均为开度与单位转速的函数关系式,符合工程中常采用全特性曲线或综合特性曲线描述水轮机外特性的经验。

## 2 实例验证及误差分析

### 2.1 对比验证

对于常规混流式水轮机,厂家一般仅提供高效率区域的特性,不提供较大范围的全特性曲线,因此本文以具有实测全特性数据的混流可逆式水轮机 HLN574 为例进行检验,模型水轮机导叶分布圆直径为 0.526 m,对称形导叶,水轮机入口直径为 0.446 m,水轮机出口直径为 0.240 08 m。计算所得流量特性结果与实测结果对比如图 4 所示;计算

所得力矩特性与实测结果对比如图 5 所示。

由图 4 可看出,计算所得水轮机流量特性符合实测流量特性曲线;由图 5 可以看出计算所得力矩特性符合实测力矩特性曲线。由此可见,本文所提出来的水轮机数学模型能够在较大范围内准确描述水轮机的外特性。

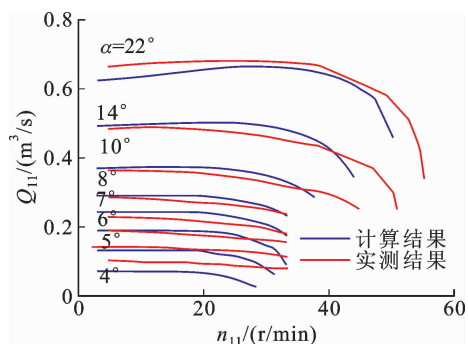


图 4 水轮机流量特性曲线

Fig. 4 Flow characteristic curves of turbine

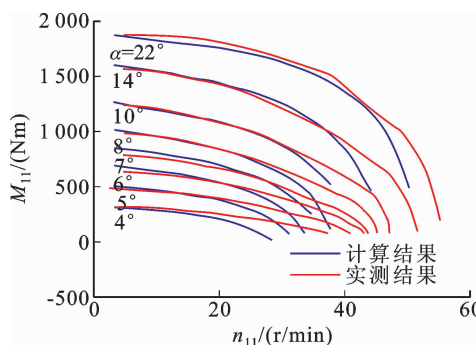


图 5 水轮机力矩特性曲线

Fig. 5 Torque characteristic curves of turbine

### 2.2 误差分析

在图 4 中,当  $n_{11}$  较大或  $Q_{11}$  较小时计算所得水轮机流量特性曲线误差较大;在图 5 中,当  $n_{11}$  较大时计算所得水轮机力矩特性曲线误差较大。为了研究在该区域内产生误差的主要原因,将式(4)进行整理得到如下关系式:

$$y = \rho D_1 \left( \frac{1}{2\pi b_0} \cot \alpha_0 + \frac{r_2}{A_2} \cot \beta_2 \right) x - \frac{\pi \sigma_2^2}{30 D_1^2} \quad (24)$$

式中  $y = \frac{M_{11}}{n_{11} Q_{11}}$ ,  $x = \frac{Q_{11}}{n_{11}}$ 。

可见,在给定的开度下,  $x$  与  $y$  符合线性关系。采用 HLN574 模型实测数据绘制的  $x$  与  $y$  关系曲线如图 6 所示。由图 6 可看出,  $x$  与  $y$  能够基本满足线性关系式,但当  $x$  取值偏小时,  $x$  与  $y$  严重偏离了线性关系,即  $n_{11}$  取较大值或  $Q_{11}$  取较小值时式(24)不能得到满足,亦即水轮机流量调节方程难以得到满足,进而引起水轮机特性预估中的较大误差。

其根本原因在于水轮机在该区域工作时水体流态较为复杂,一维方法所建立的前提假设难以得到满足,此时采用一维分析方法难以得到精度较高的模型。

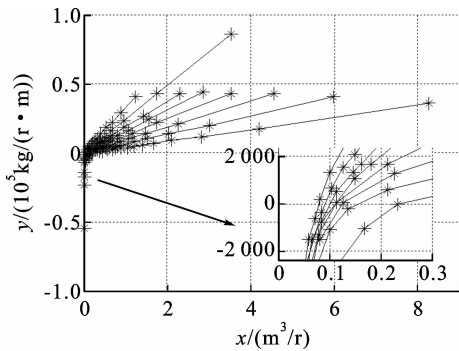


图6 实测  $x$  与  $y$  之间的关系

Fig. 6 The relationship between  $x$  and  $y$

### 3 结论

本文对水轮机流量调节方程进行了整理,分析了水轮机各部件中的能量损失形式,建立了水轮机能量平衡关系式,在此基础上推导了能够用来预测水轮机外特性的流量特性方程和力矩特性方程,对预测结果与模型试验结果进行了对比验证,得到如下结论。

1) 通过理论推导明确了水轮机外特性与其几何尺寸之间的关系,得到了表征水轮机外特性的流量特性方程及力矩特性方程。

2) 通过理论预测与模型试验比对,验证了文中提出的流量特性方程和力矩特性方程的正确性,并对预测误差的来源进行了分析和讨论,发现  $n_{11}$  取较大值或  $Q_{11}$  取较小值时水轮机流量调节方程难以满足实际情况,为后续研究提供了借鉴。

3) 通过流量特性方程和力矩特性方程可以有效预测混流式水轮机的外特性曲线。

#### 参考文献:

[1] GOHIL P P, SAINI R P. CFD: Numerical analysis and performance prediction in Francis turbine [C]//Proceedings of 2014 1st International Conference on Non Conventional Energy: Search for Clean and Safe Energy, 2014: 94-97.

[2] QUAN H, LI R N, HAN W. Research of performance prediction to energy on hydraulic turbine [C]//26th IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems, Beijing, 2012: 1-7.

[3] LI Jinwei, HU Qingjuan, YU Jixing, et al. Study on S-shaped characteristic of Francis reversible unit by on-site test and CFD simulation [J]. Science China Tech-

nological Sciences, 2013, 56(9): 2163-2169.

[4] 赵林明. 水轮机数学模型 [M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2011.

[5] 常近时. 水轮机全特性曲线及其特征工况点的理论确定法 [J]. 北京农业工程大学学报, 1995, 4(15): 77-83. CHANG Jinshi. Analysis of whole characteristic curve and their special condition points in mixed-flow pump-turbine [J]. Journal of Beijing Agriculture Engineering University, 1995, 4(15): 77-83.

[6] 周大庆, 陈洋. 含泄水孔的混流式水轮机间隙流动的数值模拟 [J]. 农业机械学报, 2015, 46(4): 53-58. ZHOU Daqing, CHEN Yang. Numerical simulation of clearance flow on Francis turbine & the weep holes [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2015, 46(4): 53-58.

[7] 冯建军, 罗兴铸, 吴广宽, 等. 间隙流动对混流式水轮机效率预测的影响 [J]. 农业工程学报, 2015, 31(5): 53-58. FENG Jianjun, LUO Xingqi, WU Guangkuan, et al. Influence of clearance flow on efficiency prediction of Francis turbines [J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering, 2015, 31(5): 53-58.

[8] Čelič D, Ondračka H. The influence of disc friction losses and labyrinth losses on efficiency of high head Francis turbine [J]. Journal of Physics: Conference Series, 2015, 579(1): 1-11.

[9] 韩凤琴, 肖业祥, 久保田乔, 等. 小型水轮机涡壳三维粘性流动解析 [J]. 农业机械学报, 2004, 35(2): 40-43. HAN Fengqin, XIAO Yexiang, KUBOTA Takashi, et al. Flow analysis of a spiral case for small turbines [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2004, 35(2): 40-43.

[10] 高江永, 张振山, 杨玉敏, 等. 蜗壳内水力损失模型的研究 [J]. 流体机械, 2007, 35(9): 26-28. GAO Jiangyong, ZHANG Zhenshan, YANG Yumin, et al. Research on hydraulic losses model in the volute [J]. Fluid Machinery, 2007, 35(9): 26-28.

[11] SHI F X, YANG J H, WANG X H. Numerical prediction for effects of guide vane blade numbers on hydraulic turbine performance [C]//Materials science and engineering, 6th International Conference on Pumps and Fans with Compressors and Wind Turbines, Turbines, Beijing, 2013: 1-6.

[12] 刘厚林, 谈高明, 袁寿其. 离心泵圆盘摩擦损失计算 [J]. 农业工程学报, 2006, 12(22): 107-109. LIU Houlin, TAN Gaoming, YUAN Shouqi. Calculation of disk friction loss of centrifugal pumps [J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering, 2006, 12(22): 107-109.

- [13] 郭齐胜,钱涵欣,彭国义,等. 水轮机引水部件的水力损失模型[J]. 水利学报,1996,(10):56-60.  
GUO Qisheng, QIAN Hanxin, PENG Guoyi, et al. A hydraulic losses model of the diversion components of hydraulic turbines[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1996, (10): 56-60.
- [14] 曾云,张立翔,郭亚昆,等. 共用管段的水力解耦及非线性水轮机模型[J]. 中国电机工程学报, 2012, 32(14):103-108.  
ZENG Yun, ZHANG Lixiang, GUO Yakun, et al. Hydraulic decoupling and nonlinear hydro turbine model with sharing common conduit[J]. Proceedings of the CSEE, 2012, 32(14): 103-108.
- [15] 王文全,闫妍,张立翔. 混流式水轮机跨尺度流道内复杂湍流的数值模拟[J]. 中国电机工程学报, 2012, 32(23):132-138.  
WANG Wenquan, YAN Yan, ZHANG Lixiang. Numerical simulation of complex turbulence in an across scale flowing passage of Francis turbine[J]. Proceedings of the CSEE, 2012, 32(23): 132-138.
- (责任编辑 王卫勋)
- 
- (上接第 190 页)
- [8] 彭述权,刘爱华,樊玲. 不同位移模式刚性挡墙主动土压力研究[J]. 岩土工程学报,2009,31(1):32-35.  
PENG Shuquan, LIU Aihua, FAN Ling. Active earth pressure for rigid retaining walls with different displacement modes [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, 31(1): 32-35.
- [9] 邓子胜,邹银生,王贻荪. 考虑位移非线性影响的深基坑土压力计算模型研究[J]. 工程力学, 2004, 21(1): 107-111.  
DENG Zisheng, ZOU Yinsheng, WANG Yisun. Calculation of the earth pressure considering nonlinear displacement influence on deep excavation [J]. Engineering Mechanics, 2004, 21(1): 107-111.
- [10] 朱建明,赵琦. 考虑土拱效应的挡土墙主动土压力与被动土压力统一解 [J]. 岩土力学, 2014, 35(9): 2501-2506.  
ZHU Jianming, ZHAO Qi. Unified solution to active earth pressure and passive earth pressure on retaining wall considering soil arching effects [J]. Rock and Soil Mechanics, 2014, 35(9): 2501-2506.
- [11] 李涛,周妍,宋常军,等. 北京地铁 6 号线一深基坑监测与分析[J]. 市政技术, 2011, 29(5): 117-120.  
LI Tao, ZHOU Yan, SONG Changjun, et al. Monitoring and analysis of a deep foundation pit of Beijing Metro Line 6 [J]. Municipal Engineering Technology, 2011, 29(5): 117-120.
- [12] 陈国强. 北京第五广场基坑支护设计与监测[J]. 岩土工程学报, 2008, 30(增刊): 612-618.  
CHEN Guoqiang. Design and monitoring of supporting for Beijing No. 5 Square foundation pit [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, 30(S): 612-618.
- [13] 马昕,周予启. 北京国贸三期 A 阶段基坑支护设计与施工监测[J]. 施工技术, 2011, 40(355): 26-29.  
MA Xin, ZHOU Yuqi. Design and construction monitoring of foundation excavation supporting in a stage of Beijing World Trade Center three phase [J]. Construction Technology, 2011, 40(355): 26-29.
- [14] 高华东,霍达,陶连金. 北京光彩大厦深基坑开挖现场监测与理论分析[J]. 地下空间与工程学报, 2005, 1(3): 423-427.  
GAO Huadong, HUO Da, TAO Lianjin. Field measurements and theoretical analysis in deep excavation around Beijing Brilliance Edifice [J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2005, 1(3): 423-427.
- [15] 李涛,王昕鹏,陈慧娴,等. 钢支撑对盾构竖井深基坑围护桩体变形规律的影响[J]. 河南科技大学学报(自然科学版), 2015, 36(2): 74-77.  
LI Tao, WANG Xinpeng, CHEN Huixian, et al. Influence of steel supporting on deformation of deep pit pile structures in shield well [J]. Journal of Henan University of Science and Technology(Natural Science), 2015, 36(2): 74-77.
- [16] 中华人民共和国住房和城乡建设部. 建筑基坑支护技术规程: JGJ120-2012[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2012.  
(责任编辑 周 蓓)