DOI：10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2017.03.019

双线性分数次 Hardy 算子交换子的有界性

刘荣辉，周　疆

（新疆大学 数学与系统科学学院，新疆 乌鲁木齐 830046）

摘要： 本文证明了双线性分数次 Hardy 算子和双线性分数次共轭 Hardy 算子分别与 Lipschitz 函数生成的交换子在 Herz-Morrey 空间上的有界性，同时获得了双线性 Hardy 算子和双线性共轭 Hardy 算子交换子的相应结果.

关键词： 双线性分数次 Hardy 算子；Lipschitz 函数；Herz-Morrey 空间；有界性

中图分类号： O174.2　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1006-4710(2017)03-0362-05

Boundedness of the commutators of bilinear fractional Hardy operators

LIU Ronghui, ZHOU Jiang

(College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi 830046, China)

Abstract: The boundedness of commutators of bilinear fractional Hardy operators and its conjugate operators on Herz-Morrey spaces are proven, meanwhile, the similar results of bilinear Hardy operators and bilinear conjugate Hardy operators are obtained.

Key words: bilinear fractional Hardy operators; Lipschitz functions; Herz-Morrey spaces; boundedness

设 f 为 R^+ 上的非负可测函数，经典的 Hardy 算子定义为：

$$Hf(x):=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

$$H^*f(x):=\int_x^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t,\quad x>0$$

Hardy 算子 H 与 H^* 互为共轭算子，即：

$$\int_0^{+\infty} g(x)Hf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} f(x)H^*g(x)\mathrm{d}t$$

其中 $f\in L^p(R^+)$，$g\in L^{p'}(R^+)$，$1<p<\infty$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$。

1920 年，Hardy 在证明 Hilbert 双重级数的过程中得到了 Hardy 积分不等式。随后，Hardy 积分不等式受到了广泛的关注，参见文献[1-4]。

1995 年，Christ 和 Grafakos[5] 给出了 n 维 Hardy 算子：

$$Hf(x):=\frac{1}{|x|^n}\int_{|y|\leqslant|x|} f(y)\mathrm{d}y,\quad x\in R^n\backslash\{0\}$$

2007 年，Fu，Liu 和 Lu 等[6] 首次建立了 n 维分数次 Hardy 算子：

$$Hf(x):=\frac{1}{|x|^{n-\beta}}\int_{|y|\leqslant|x|} f(y)\mathrm{d}y,$$

$$H^*f(x):=\int_{|y|>|x|}\frac{f(y)}{|y|^{n-\beta}}\mathrm{d}y,\quad x\in R^n\backslash\{0\}$$

并建立了它们在 Lebesgue 空间和 Herz 空间上的有界性，同时研究了和 CMO 函数所生成的交换子的有界性，其中 $0\leqslant\beta<n$，f 是 R^n 上的局部可积函数，且：

$$\int_{R^n} g(x)Hf(x)\mathrm{d}x=\int_{R^n} f(x)H^*g(x)\mathrm{d}x$$

我们首先介绍双线性分数次 Hardy 算子的定义：

定义 1　设向量值函数 $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2)$，其中 f_1、f_2 是 R^n 上的局部可积函数，$0\leqslant\beta<2n$，双线性分数次 Hardy 算子定义为：

$$H_\beta\boldsymbol{f}(x):=\frac{1}{|x|^{2n-\beta}}\int_{|t_1|\leqslant|x|}\int_{|t_2|\leqslant|x|} f_1(t_1)f_2(t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2,$$

收稿日期： 2017-03-01

基金项目： 国家自然科学基金资助项目(11661075)

作者简介： 刘荣辉，男，硕士生，研究方向为调和分析。E-mail:liuronghuimath@126.com

通讯作者： 周疆，男，教授，硕导，研究方向为调和分析。E-mail:zhoujiang@xju.edu.cn

$$H_\beta^* \boldsymbol{f}(x):=\int_{|t_1|>|x|}\int_{|t_2|>|x|}\frac{f_1(t_1)f_2(t_2)}{|(t_1,t_2)|^{2n-\beta}}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2$$

其中 $x\in R^n\setminus\{0\}$,$|(t_1,t_2)|=\sqrt{|t_1|^2+|t_2|^2}$。

下面给出 Herz-Morrey 空间的定义。设 $B_k=\{x\in R^n:|x|\leqslant 2^k\}$,对于 $k\in\mathbf{Z}$,记 $A_k=B_k\setminus B_{k-1}$,且 $\chi_k=\chi_{A_k}$,其中 χ_{A_k} 是 A_k 的特征函数。

定义 2[7] 设 $\alpha\in R$,$0\leqslant\lambda<\infty$,$0<p,q\leqslant\infty$,齐次 Herz-Morrey 空间的定义为:

$$M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(R^n):=\{f\in L_{\mathrm{loc}}(R^n):\|f\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(R^n)}<\infty\}$$

其中 $\|f\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(R^n)}:=$

$$\sup_{k_0\in Z}2^{-k_0\lambda}\left\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\alpha p}\|f\chi_{A_k}\|_{L^q(R^n)}^p\right\}^{1/p}。$$

注记 1 显然,$M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,0}(R^n)=\dot{K}_q^{\alpha,p}(R^n)$,对于 $0<p\leqslant\infty$ 及 $\alpha\in R$,有 $\dot{K}_p^{0,p}(R^n)=L^p(R^n)$ 并且 $\dot{K}_p^{\alpha/p,p}(R^n)=L^p(|x|^\alpha,R^n)$。

定义 3[8] 设 $0<\alpha<1$,Lipschitz 空间的定义为:

$$\dot{\Lambda}_\alpha(R^n):=\{f:\|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)}<\infty\}$$

其中 $\|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)}:=\sup\limits_{x,h\in R^n}\dfrac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|^\alpha}$。

在 2003 年,Pérez 和 Torres[9] 研究了如下定义的双线性 C-Z 算子交换子:

$$[T,b]_1(f,g):=T(bf,g)-bT(f,g),$$
$$[T,b]_2(f,g):=T(f,bg)-bT(f,g)$$

其中,b 是 R^n 上的一个局部可积函数,称该局部可积函数为交换子符号。

Pérez 和 Torres 讨论了交换子 $[T,b]_i(i=1,2)$ 在 Lebesgue 空间上的有界性,如果 $b\in \mathrm{BMO}(R^n)$,$1<p,p_1<\infty$,且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p_1}=1$,则:

$$\|[T,b]_1(f,g)\|_{L^p(R^n)},$$
$$\|[T,b]_2(f,g)\|_{L^p(R^n)}\leqslant$$
$$C\|b\|_{\mathrm{BMO}(R^n)}\|f\|_{L^{p_1}(R^n)}\|g\|_{L^{p_2}(R^n)}$$

同时作者也发现了当 $\dfrac{1}{2}<p<\infty$ 时,上述结果也成立。

在 2009 年,傅尊伟等人研究了 n 维分数次 Hardy 算子与 Lipschitz 交换子在 Herz 空间上的有界性。

受上述工作的启发,我们首先给出双线性分数次 Hardy 算子和双线性分数次共轭 Hardy 算子交换子的定义。

定义 4 设 b 是 R^n 上的局部可积函数,向量值函数 $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2)$,其中 f_1、f_2 是 R^n 上的局部可积函数,$0\leqslant\beta<2n$,双线性分数次 Hardy 算子交换子与双线性分数次共轭 Hardy 算子交换子定义为:

$$[b,H_\beta]_1(\boldsymbol{f}):=bH_\beta(f_1,f_2)-H_\beta(bf_1,f_2),$$
$$[b,H_\beta]_2(\boldsymbol{f}):=bH_\beta(f_1,f_2)-H_\beta(f_1,bf_2)$$
$$[b,H_\beta^*]_1(\boldsymbol{f}):=bH_\beta^*(f_1,f_2)-H_\beta^*(bf_1,f_2),$$
$$[b,H_\beta^*]_2(\boldsymbol{f}):=bH_\beta^*(f_1,f_2)-H_\beta^*(f_1,bf_2)$$

注记 2 显然 $\beta=0$ 时,$[b,H_\beta]_i=[b,H]_i$,$[b,H_\beta^*]_i=[b,H^*]_i$,$i=1,2$,其中 $[b,H]_i$ 为双线性 Hardy 算子交换子,$[b,H^*]_i$ 为双线性共轭 Hardy 算子交换子。

一个自然的问题是:双线性分数次 Hardy 算子交换子 $[b,H_\beta]_i$ 与双线性分数次共轭 Hardy 算子交换子 $[b,H_\beta^*]_i$ 在 Herz-Morrey 空间上是不是有界呢?本文我们将给出肯定答案。

本文研究交换子的有界性,而不是有界性中的最佳常数估计,因此文章的 C 通常表示与空间维数有关的常数,每次出现时有可能其值并不相同。对于 R^n 中的可测子集 E,用 $|E|$ 表示 E 的 Lebesgue 测度。

1 主要结论及辅助结果

在叙述本文的主要结果之前,我们先给出相关的引理

引理 1[1] 设 $0<\alpha<1$,且 $f\in\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)$,则有:

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|^\alpha\|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)}$$

定理 1 设 $0<\alpha<1$,$0<p_i<\infty$,$1<q_i<\infty$,$i=1,2$,且满足 $\dfrac{1}{q_1}+\dfrac{1}{q_2}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{\alpha+\beta}{n}$,$\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}-\dfrac{1}{p}=\dfrac{\alpha+\beta}{n}$,$\gamma=\gamma_1+\gamma_2$,$\lambda=\lambda_1+\lambda_2$。

ⅰ)如果 $b\in\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)$,且 $\gamma_i<\lambda_i+n/q_i'$,$i=1,2$,则有:

$$\|[b,H_\beta]_i(\boldsymbol{f})\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\gamma,\lambda}(R^n)}\leqslant$$
$$C\|f_1\|_{M\dot{K}_{p_1,q_1}^{\gamma_1,\lambda_1}(R^n)}\|f_2\|_{M\dot{K}_{p_2,q_2}^{\gamma_2,\lambda_2}(R^n)}$$

ⅱ)如果 $b\in\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)$,且 $\gamma_1>\lambda_1+\alpha+\beta/2-n/q_1$,$\gamma_2>\lambda_2+\beta/2-n/q_2$,则有:

$$\|[b,H_\beta^*]_1(\boldsymbol{f})\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\gamma,\lambda}(R^n)}\leqslant$$
$$C\|f_1\|_{M\dot{K}_{p_1,q_1}^{\gamma_1,\lambda_1}(R^n)}\|f_2\|_{M\dot{K}_{p_2,q_2}^{\gamma_2,\lambda_2}(R^n)}$$

ⅲ)如果 $b\in\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)$,且 $\gamma_1>\lambda_1+\beta/2-n/q_1$,$\gamma_2>\lambda_2+\alpha+\beta/2-n/q_2$,则有:

$$\|[b,H_\beta^*]_2(\boldsymbol{f})\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\gamma,\lambda}(R^n)}\leqslant$$
$$C\|f_1\|_{M\dot{K}_{p_1,q_1}^{\gamma_1,\lambda_1}(R^n)}\|f_2\|_{M\dot{K}_{p_2,q_2}^{\gamma_2,\lambda_2}(R^n)}$$

由注记 1 我们有以下推论。

推论1 设 $0<\alpha<1, 0<p_i<\infty, 1<q_i<\infty, i=1,2$,且满足 $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}-\frac{1}{q}=\frac{\alpha+\beta}{n}, \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p}=\frac{\alpha+\beta}{n}, \gamma=\gamma_1+\gamma_2$。

ⅰ)如果 $b\in\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)$,且 $\gamma_i<n/q'_i, i=1,2$,则有:

$$\|[b,H_\beta]_i(\boldsymbol{f})\|_{\dot{K}_q^{\gamma,p}(R^n)}\leqslant C\|f_1\|_{\dot{K}_{q_1}^{\gamma_1,p_1}(R^n)}\|f_2\|_{\dot{K}_{q_2}^{\gamma_2,p_2}(R^n)}$$

ⅱ)如果 $b\in\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)$,且 $\gamma_1>\alpha+\beta/2-n/q_1$,$\gamma_2>\beta/2-n/q_2$,则有:

$$\|[b,H_\beta^*]_1(\boldsymbol{f})\|_{\dot{K}_q^{\gamma,p}(R^n)}\leqslant C\|f_1\|_{\dot{K}_{q_1}^{\gamma_1,p_1}(R^n)}\|f_2\|_{\dot{K}_{q_2}^{\gamma_2,p_2}(R^n)}$$

ⅲ)如果 $b\in\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)$,且 $\gamma_1>\beta/2-n/q_1, \gamma_2>\alpha+\beta/2-n/q_2$,则有:

$$\|[b,H_\beta^*]_2(\boldsymbol{f})\|_{\dot{K}_q^{\gamma,p}(R^n)}\leqslant C\|f_1\|_{\dot{K}_{q_1}^{\gamma_1,p_1}(R^n)}\|f_2\|_{\dot{K}_{q_2}^{\gamma_2,p_2}(R^n)}$$

推论2 设 $0<\alpha<1, 0<p_i<\infty, 1<q_i<\infty, i=1,2$,且满足 $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}-\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{n}, \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p}=\frac{\alpha}{n}, \gamma=\gamma_1+\gamma_2, \lambda=\lambda_1+\lambda_2$。

ⅰ)如果 $b\in\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)$,且 $\gamma_i<\lambda_i+n/q'_i, i=1,2$,则有:

$$\|[b,H]_i(\boldsymbol{f})\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\gamma,\lambda}(R^n)}\leqslant C\|f_1\|_{M\dot{K}_{p_1,q_1}^{\gamma_1,\lambda_1}(R^n)}\|f_2\|_{M\dot{K}_{p_2,q_2}^{\gamma_2,\lambda_2}(R^n)}$$

ⅱ)如果 $b\in\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)$,且 $\gamma_1>\lambda_1+\alpha-n/q_1, \gamma_2>\lambda_2-n/q_2$,则有:

$$\|[b,H^*]_1(\boldsymbol{f})\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\gamma,\lambda}(R^n)}\leqslant C\|f_1\|_{M\dot{K}_{p_1,q_1}^{\gamma_1,\lambda_1}(R^n)}\|f_2\|_{M\dot{K}_{p_2,q_2}^{\gamma_2,\lambda_2}(R^n)}$$

ⅲ)如果 $b\in\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)$,且 $\gamma_1>\lambda_1-n/q_1, \gamma_2>\lambda_2+\alpha-n/q_2$,则有:

$$\|[b,H^*]_2(\boldsymbol{f})\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\gamma,\lambda}(R^n)}\leqslant C\|f_1\|_{M\dot{K}_{p_1,q_1}^{\gamma_1,\lambda_1}(R^n)}\|f_2\|_{M\dot{K}_{p_2,q_2}^{\gamma_2,\lambda_2}(R^n)}$$

2 定理的证明

2.1 ⅰ)的证明

对任意的 $f_i\in M\dot{K}_{p_i,q_i}^{\gamma_i,\lambda_i}(R^n)$, $i=1,2$, 令 $f_{i,k}:=f_i\chi_k=f_i\chi_{A_k}$,则有:

$$f_i(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_i(x)\chi_k(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_{i,k}(x)$$

由 Herz-Morrey 空间及 $[b,H_\beta]_i$ 的定义,我们首先估计 $\|[b,H_\beta]_i(\boldsymbol{f})\chi_k\|_{L^q(R^n)}^q$,有:

$$\begin{aligned}
&\|[b,H_\beta]_i(\boldsymbol{f})\chi_k\|_{L^q(R^n)}^q=\\
&\int_{R^n}|[b,H_\beta]_i(\boldsymbol{f})(x)\chi_k(x)|^q\mathrm{d}x\leqslant\\
&\int_{R^n}\left|\frac{1}{|x|^{2n-\beta}}\int_{|t_1|\leqslant|x|}\int_{|t_2|\leqslant|x|}(b(x)-b(t_i))f_1(t_1)f_2(t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\right|^q\chi_k(x)\mathrm{d}x\leqslant\\
&C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)}^q2^{kq(\beta-2n)}\int_{A_k}\left\{\int_{B_k}\int_{B_k}|x-t_i|^\alpha|f_1(t_1)||f_2(t_2)|\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\right\}^q\mathrm{d}x\leqslant\\
&C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)}^q2^{kq(\beta-2n)}\int_{A_k}\left\{\int_{B_k}\int_{B_k}(|x|^\alpha+|t_i|^\alpha)\times|f_1(t_1)||f_2(t_2)|\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\right\}^q\mathrm{d}x\leqslant\\
&C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)}^q2^{kq(\beta-2n)}\int_{A_k}\left\{|x|^\alpha\sum_{k_1=-\infty}^{k}\int_{A_{k_1}}|f_1(t_1)|\mathrm{d}t_1\sum_{k_2=-\infty}^{k}\int_{A_{k_2}}|f_2(t_2)|\mathrm{d}t_2\right\}^q\mathrm{d}x\leqslant\\
&C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)}^q2^{kq(\beta-2n+\alpha)}\int_{A_k}\left\{\sum_{k_1=-\infty}^{k}\int_{A_{k_1}}|f_1(t_1)|\times\mathrm{d}t_1\sum_{k_2=-\infty}^{k}\int_{A_{k_2}}|f_2(t_2)|\mathrm{d}t_2\right\}^q\mathrm{d}x=:I
\end{aligned}$$

通过 Hölder 不等式,$\frac{1}{q_i}+\frac{1}{q'_i}=1, i=1,2$,以及 $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}-\frac{1}{q}=\frac{\alpha+\beta}{n}$,有:

$$\begin{aligned}
&I=C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)}^q2^{kq(\beta-2n+\alpha)+kn}\left\{\sum_{k_1=-\infty}^{k}\int_{A_{k_1}}|f_1(t_1)|\times\mathrm{d}t_1\sum_{k_2=-\infty}^{k}\int_{A_{k_2}}|f_2(t_2)|\mathrm{d}t_2\right\}^q\leqslant\\
&C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)}^q2^{kq(\beta-2n+\alpha)+kn}\left\{\prod_{i=1}^{2}\sum_{k_i=-\infty}^{k}\left(\int_{A_{k_i}}|f_i(t_i)|^{q_i}\mathrm{d}t_i\right)^{1/q_i}\left(\int_{A_{k_i}}\mathrm{d}t_i\right)^{1/q'_i}\right\}^q\leqslant\\
&C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)}^q\left\{\prod_{i=1}^{2}\sum_{k_i=-\infty}^{k}2^{(k_i-k)n/q'_i}\|f_{i,k_i}\|_{L^{q_i}(R^n)}\right\}^q
\end{aligned}$$

令 $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\frac{1}{\upsilon}$,则 $\frac{1}{\upsilon}-\frac{\alpha+\beta}{n}=\frac{1}{p}$,从而 $p>\upsilon$,使用序列形式的 Hölder 不等式可得:

$$\begin{aligned}
&\|[b,H_\beta]_i(\boldsymbol{f})\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\gamma,\lambda}(R^n)}=\\
&\sup_{k_0\in Z}2^{-k_0\lambda}\left\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\gamma p}\|[b,H_\beta]_i(\boldsymbol{f})\chi_{A_k}\|_{L^q(R^n)}^p\right\}^{1/p}\leqslant\\
&C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)}\sup_{k_0\in Z}2^{-k_0\lambda}\left\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\gamma p}\times\left(\prod_{i=1}^{2}\sum_{k_i=-\infty}^{k}2^{(k_i-k)n/q'_i}\|f_{i,k_i}\|_{L^{q_i}(R^n)}\right)^p\right\}^{1/p}\leqslant\\
&C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)}\sup_{k_0\in Z}2^{-k_0\lambda}\left\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}\cdot\right.
\end{aligned}$$

$$\left(\prod_{i=1}^{2}\sum_{k_i=-\infty}^{k}2^{(k_i-k)(n/q_i'-\gamma_i)+k_i\gamma_i}\|f_{i,k_i}\|_{L^{q_i}(R^n)}\right)^{p}\Bigg\}^{1/p}\leqslant$$

$$C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)}\sup_{k_0\in Z}2^{-k_0\lambda}\Bigg\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}\cdot$$

$$\left(\prod_{i=1}^{2}\sum_{k_i=-\infty}^{k}2^{(k_i-k)(n/q_i'-\gamma_i)+k_i\gamma_i}\|f_{i,k_i}\|_{L^{q_i}(R^n)}\right)^{v}\Bigg\}^{1/v}\leqslant$$

$$C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)}\sup_{k_0\in Z}2^{-k_0\lambda}\prod_{i=1}^{2}\Bigg\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}\cdot$$

$$\left(\sum_{k_i=-\infty}^{k}2^{(k_i-k)(n/q_i'-\gamma_i)+k_i\gamma_i}\|f_{i,k_i}\|_{L^{q_i}(R^n)}\right)^{p_i}\Bigg\}^{1/p_i}\leqslant$$

$$C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)}\prod_{i=1}^{2}\sup_{k_0\in Z}2^{-k_0\lambda_i}\Bigg\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}\cdot$$

$$\left(\sum_{k_i=-\infty}^{k}2^{(k_i-k)(n/q_i'-\gamma_i)+k_i\gamma_i}\|f_{i,k_i}\|_{L^{q_i}(R^n)}\right)^{p_i}\Bigg\}^{1/p_i}$$

因为

$$\|f_{i,k_i}\|_{L^{q_i}(R^n)}=2^{-k_i\gamma_i}(2^{k_i\gamma_ip_i}\|f_{i,k_i}\|^{p_i}_{L^{q_i}(R^n)})^{1/p_i}\leqslant$$

$$2^{-k_i\gamma_i}\left(\sum_{j_i=-\infty}^{k_i}2^{j_i\gamma_ip_i}\|f_{i,k_i}\|^{p_i}_{L^{q_i}(R^n)}\right)^{1/p_i}\leqslant$$

$$\leqslant 2^{k_i(\lambda_i-\gamma_i)}\Bigg\{2^{-k_i\lambda_i}\left(\sum_{j_i=-\infty}^{k_i}2^{j_i\gamma_ip_i}\|f_{k_i}\|^{p_i}_{L^{q_i}(R^n)}\right)^{1/p_i}\Bigg\}\leqslant$$

$$2^{k_i(\lambda_i-\gamma_i)}\|f_i\|_{M\dot{K}^{\gamma_i,\lambda_i}_{p_i,q_i}(R^n)}$$

所以由条件 $\gamma_i<\lambda_i+n/q_i'$ 得：

$$\|[b,H_\beta]_i(\boldsymbol{f})\|_{M\dot{K}^{\gamma,\lambda}_{p,q}(R^n)}\leqslant$$

$$C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)}\prod_{i=1}^{2}\|f_i\|_{M\dot{K}^{\gamma_i,\lambda_i}_{p_i,q_i}(R^n)}\times$$

$$\sup_{k_0\in Z}2^{-k_0\lambda_i}\Bigg\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\lambda_ip_i}\left(\sum_{k_i=-\infty}^{k}2^{(k_i-k)(n/q_i'-\gamma_i+\lambda_i)}\right)^{p_i}\Bigg\}^{1/p_i}\leqslant$$

$$C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)}\prod_{i=1}^{2}\|f_i\|_{M\dot{K}^{\gamma_i,\lambda_i}_{p_i,q_i}(R^n)}\times$$

$$\sup_{k_0\in Z}2^{-k_0\lambda_i}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\lambda_ip_i}\right)^{1/p_i}\leqslant$$

$$C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)}\prod_{i=1}^{2}\|f_i\|_{M\dot{K}^{\gamma_i,\lambda_i}_{p_i,q_i}(R^n)}$$

2.2 ii）的证明

同理我们首先估计 $\|[b,H^*_\beta]_1(\boldsymbol{f})\chi_k\|^q_{L^q(R^n)}$，有：

$$\|[b,H^*_\beta]_1(\boldsymbol{f})\chi_k\|^q_{L^q(R^n)}=$$

$$\int_{R^n}|[b,H^*_\beta]_1(\boldsymbol{f})(x)\chi_k(x)|^q\mathrm{d}x=$$

$$\int_{R^n}\left|\int_{|t_1|>|x|}\int_{|t_2|>|x|}\frac{(b(x)-b(t_1))f_1(t_1)f_2(t_2)}{|(t_1,t_2)|^{2n-\beta}}\times\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\right|^q\chi_k(x)\mathrm{d}x\leqslant$$

$$C\|b\|^q_{\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)}\int_{A_k}\Bigg\{\sum_{k_1=k}^{\infty}\sum_{k_2=k}^{\infty}2^{(k_1+k_2)(\beta/2-n)}\int_{A_{k_1}}|f_1(t_1)|$$

$$|x-t_1|^\alpha\mathrm{d}t_1\int_{A_{k_2}}|f_2(t_2)|\mathrm{d}t_2\Bigg\}^q\mathrm{d}x\leqslant$$

$$C\|b\|^q_{\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)}\int_{A_k}\Bigg\{\sum_{k_1=k}^{\infty}\sum_{k_2=k}^{\infty}2^{(k_1+k_2)(\beta/2-n)+k_1\alpha}\int_{A_{k_1}}|f_1(t_1)|$$

$$\mathrm{d}t_1\int_{A_{k_2}}|f_2(t_2)|\mathrm{d}t_2\Bigg\}^q\mathrm{d}x=:J$$

利用 Hölder 不等式，$\frac{1}{q_i}+\frac{1}{q_i'}=1,i=1,2$，可得：

$$J\leqslant C\|b\|^q_{\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)}\Bigg\{\sum_{k_1=k}^{\infty}\sum_{k_2=k}^{\infty}2^{(k_1+k_2)(\beta/2-n)+k_1\alpha}\times$$

$$\|f_{1,k_1}\|_{L^{q_1}(R^n)}\|f_{2,k_2}\|_{L^{q_2}(R^n)}\|\chi_{B_k}\|_{L^q(R^n)}\times$$

$$\|\chi_{B_{k_1}}\|_{L^{q_1'}(R^n)}\|\chi_{B_{k_2}}\|_{L^{q_2'}(R^n)}\Bigg\}^q$$

令 $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{u}$，则 $\frac{1}{q}=\frac{1}{u}-\frac{\alpha+\beta}{n}$。注意到 $\chi_{B_j}(x)\leqslant C2^{-j(\alpha+\beta)}I_{\alpha+\beta}(\chi_{B_j})(x)$，其中 $I_{\alpha+\beta}$ 为分数次积分算子（Riesz 位势算子），结合 Hölder 不等式得：

$$\|\chi_k\|_{L^q(R^n)}\leqslant\|\chi_{B_k}\|_{L^q(R^n)}\leqslant$$

$$C2^{-k(\alpha+\beta)}\|I_{\alpha+\beta}(\chi_{B_k})\|_{L^q(R^n)}\leqslant$$

$$C2^{-k(\alpha+\beta)}\|\chi_{B_k}\|_{L^q(R^n)}\leqslant$$

$$C2^{-k(\alpha+\beta)}\|\chi_{B_k}\|_{L^{q_1}(R^n)}\|\chi_{B_k}\|_{L^{q_2}(R^n)}$$

所以，

$$J\leqslant C\|b\|^q_{\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)}\Bigg\{\sum_{k_1=k}^{\infty}\sum_{k_2=k}^{\infty}2^{(k_1+k_2)(\beta/2-n)+k_1\alpha}2^{-k(\alpha+\beta)}\times$$

$$\|f_{1,k_1}\|_{L^{q_1}(R^n)}\|f_{2,k_2}\|_{L^{q_2}(R^n)}\Bigg\}^q\times$$

$$\Bigg\{\|\chi_{B_k}\|_{L^{q_1}(R^n)}\|\chi_{B_k}\|_{L^{q_2}(R^n)}\|\chi_{B_{k_1}}\|_{L^{q_1'}(R^n)}\times$$

$$\|\chi_{B_{k_2}}\|_{L^{q_2'}(R^n)}\Bigg\}^q\leqslant$$

$$C\|b\|^q_{\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)}\Bigg\{\sum_{k_1=k}^{\infty}\sum_{k_2=k}^{\infty}2^{(k_1+k_2-2k)\beta/2+(k_1-k)\alpha}\times$$

$$\|f_{1,k_1}\|_{L^{q_1}(R^n)}\|f_{2,k_2}\|_{L^{q_2}(R^n)}\Bigg\}^q\times$$

$$\Bigg\{\frac{\|\chi_{B_k}\|_{L^{q_1}(R^n)}\|\chi_{B_k}\|_{L^{q_2}(R^n)}}{\|\chi_{B_{k_1}}\|_{L^{q_1}(R^n)}\|\chi_{B_{k_2}}\|_{L^{q_2}(R^n)}}\Bigg\}^q=$$

$$C\|b\|^q_{\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)}\Bigg\{\sum_{k_1=k}^{\infty}\sum_{k_2=k}^{\infty}2^{(k_1-k)(\beta/2+\alpha)}2^{(k_2-k)\beta/2}\times$$

$$\|f_{1,k_1}\|_{L^{q_1}(R^n)}\|f_{2,k_2}\|_{L^{q_2}(R^n)}2^{(k-k_1)n/q_1}2^{(k-k_2)n/q_2}\Bigg\}^q=$$

$$C\|b\|^q_{\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)}\Bigg\{\sum_{k_1=k}^{\infty}2^{(k_1-k)(\beta/2+\alpha-n/q_1)}\times$$

$$\|f_{1,k_1}\|_{L^{q_1}(R^n)}\sum_{k_2=k}^{\infty}2^{(k_2-k)(\beta/2-n/q_2)}\|f_{2,k_2}\|_{L^{q_2}(R^n)}\Bigg\}^q$$

因此，

$$\|[b,H^*_\beta]_1(\boldsymbol{f})\|_{M\dot{K}^{\gamma,\lambda}_{p,q}(R^n)}=$$

$$\sup_{k_0\in Z}2^{-k_0\lambda}\bigg\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\gamma p}\|[b,H_\beta^*]_1(\boldsymbol{f})\chi_{A_k}\|_{L^q(R^n)}^{p}\bigg\}^{1/p}\leqslant$$

$$C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)}\sup_{k_0\in Z}2^{-k_0\lambda}\bigg\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\gamma p}\bigg(\sum_{k_1=k}^{\infty}2^{(k_1-k)(\beta/2+\alpha-n/q_1)}\times$$

$$\|f_{1,k_1}\|_{L^{q_1}(R^n)}\sum_{k_2=k}^{\infty}2^{(k_2-k)(\beta/2-n/q_2)}\|f_{2,k_2}\|_{L^{q_2}(R^n)}\bigg)^{p}\bigg\}^{1/p}$$

$$\leqslant$$

$$C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)}\sup_{k_0\in Z}2^{-k_0\lambda}\bigg\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}\bigg(\sum_{k_1=k}^{\infty}2^{k\gamma_1+(k_1-k)(\beta/2+\alpha-n/q_1)}\times$$

$$\|f_{1,k_1}\|_{L^{q_1}(R^n)}\sum_{k_2=k}^{\infty}2^{k\gamma_2+(k_2-k)(\beta/2-n/q_2)}\times$$

$$\|f_{2,k_2}\|_{L^{q_2}(R^n)}\bigg)^{p}\bigg\}^{1/p}\leqslant$$

$$C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)}\sup_{k_0\in Z}2^{-k_0\lambda_1}\bigg\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}\bigg(\sum_{k_1=k}^{\infty}2^{k\gamma_1+(k_1-k)(\beta/2+\alpha-n/q_1)}\times$$

$$\|f_{1,k_1}\|_{L^{q_1}(R^n)}\bigg)^{p_1}\bigg\}^{1/p_1}\times$$

$$\sup_{k_0\in Z}2^{-k_0\lambda_2}\bigg\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}\bigg(\sum_{k_2=k}^{\infty}2^{k\gamma_2+(k_2-k)(\beta/2-n/q_2)}\times$$

$$\|f_{2,k_2}\|_{L^{q_2}(R^n)}\bigg)^{p_2}\bigg\}^{1/p_2}$$

同理,有:

$$\|f_{i,k_i}\|_{L^{q_i}(R^n)}=2^{-k_i\gamma_i}(2^{k_i\gamma_i p_i}\|f_{k_i}\|_{L^{q_i}(R^n)}^{p_i})^{1/p_i}\leqslant 2^{k_i(\lambda_i-\gamma_i)}\|f_i\|_{MK^{\gamma_i,\lambda_i}_{p_i,q_i}(R^n)}$$

所以,结合条件 $\gamma_1>\lambda_1+\alpha+\beta/2-n/q_1$, $\gamma_2>\lambda_2+\beta/2-n/q_2$ 可得:

$$\|[b,H_\beta^*]_1(\boldsymbol{f})\|_{MK^{\gamma,\lambda}_{p,q}(R^n)}\leqslant$$

$$C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)}\|f_1\|_{MK^{\gamma_1,\lambda_1}_{p_1,q_1}(R^n)}\sup_{k_0\in Z}2^{-k_0\lambda_1}\bigg\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\lambda_1p_1}\times$$

$$\bigg(\sum_{k_1=k}^{\infty}2^{(k_1-k)(\beta/2+\lambda_1+\alpha-\gamma_1-n/q_1)}\bigg)^{p_1}\bigg\}^{1/p_1}\times$$

$$\|f_2\|_{MK^{\gamma_2,\lambda_2}_{p_2,q_2}(R^n)}\sup_{k_0\in Z}2^{-k_0\lambda_2}\bigg\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\lambda_2p_2}\times$$

$$\bigg(\sum_{k_2=-\infty}^{k}2^{(k_2-k)(\beta/2+\lambda_2-\gamma_2-n/q_2)}\bigg)^{p_2}\bigg\}^{1/p_2}\leqslant$$

$$C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\alpha(R^n)}\prod_{i=1}^{2}\|f_i\|_{MK^{\gamma_i,\lambda_i}_{p_i,q_i}(R^n)}$$

2.3 iii)的证明

与ii)的证明类似,因此省略证明细节。

2.4 一个注记

注记2 本文是齐次 Herz-Morrey 空间上的结果,但是对于非齐次的 Herz-Morrey 空间同样成立。

参考文献:

[1] HARDY G, LITTLEWOOD J, POLYA G. Inequalities [M]. London: Cambridge University Press, 1952.

[2] ANDERSON K F, MUCKENHOUPT B. Weighted weak type Hardy inequalities with application to Hilbert transforms and maximal functions [J]. Studia Mathematica, 1982, 72(1): 9-26.

[3] LERNER A K, OMBROSI S, PÉREZ C, et al. New maximal functions and multiple weights for the multilinear Calderón-Zygmund theory [J]. Advances in Mathematics, 2009, 220(4): 1222-1264.

[4] GRAFAKOS L, TORRES R H. Multilinear Calderón-Zygmund theory [J]. Advances in Mathematics, 2002, 165: 124-164.

[5] CHIRST M, GRAFAKOS L. Best constants for two non-convolution inequalities [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1995, 123(6): 1687-1693.

[6] FU Zunwei, LIU Zongguang, LU Shanzhen, et al. Characterization for commutators of n-dimensional fractional Hardy operators [J]. Science in China Series A: Mathematics, 2007, 50(10): 1418-1426.

[7] LU Shanzhen, YANG Dachun. The decomposition of the weighted Herz spaces on R^n and its applications [J]. Science in China Series A: Mathematics, 1995, 38: 147-158.

[8] PALUSZYŃSKI M. Characterization of the Besov spaces via the commutator operator of Coifman, Rochberg and Weiss [J]. Indiana University Mathematics Journal, 1995, 44(1): 1-17.

[9] PÉREZ C, TORRES R H. Sharp maximal function estimates for multilinear singular integrals [J]. Contemporary Mathematics, 2003, 320: 323-331.

(责任编辑 王绪迪)