

DOI: 10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2016.04.002

# 急流冲击波波角的显式解

宁利中<sup>1</sup>, 王永起<sup>1</sup>, 宁碧波<sup>2</sup>, 田伟利<sup>3</sup>, 胡彪<sup>1</sup>

(1. 西安理工大学 西北旱区生态水利工程国家重点实验室培育基地, 陕西 西安 710048;

2. 嘉兴学院 建筑工程学院, 浙江 嘉兴 314001; 3. 上海大学 美术学院, 上海 200444)

**摘要:** 急流冲击波的水力计算是高速水力学中的一个重要问题。本文在伊本急流冲击波理论基础上, 通过分析, 将函数的级数展开近似表达式引入到伊本急流冲击波理论的基本关系式中, 从而得到了急流冲击波波角的显式解。并将计算的急流冲击波波角显式解和相应的水深比与其对应的精确解和实验值进行验证比较, 证明了急流冲击波波角的显式解有着足够的精度。急流冲击波波角的显式解使计算简化, 精度提高, 可应用于实际工程。

**关键词:** 显式解; 伊本理论; 急流冲击波; 波角; 水深比

中图分类号: TV135.2

文献标志码: A

文章编号: 1006-4710(2016)04-0388-04

## Explicit solution to wave angle of shock wave in supercritical flow

NING Lizhong<sup>1</sup>, WANG Yongqi<sup>1</sup>, NING Bibo<sup>2</sup>, TIAN Weili<sup>3</sup>, HU Biao<sup>1</sup>

(1. State Key Laboratory Base of Eco-hydraulic Engineering in Arid Area, Xi'an University of Technology,

Xi'an 710048, China; 2. College of Civil Engineering and Architecture, Jiaxing University, Jiaxing 314001, China;

3. College of Fine Arts, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

**Abstract:** Hydraulic calculation of shock wave in supercritical flow is one of the important aspects in high speed hydraulics. Based on Ippen's theory of shock wave in this paper, an explicit solution to wave angle of shock wave in supercritical flow is obtained by applying the analysis of series expansion to Ippen's theory. It is sufficient to compare the explicit solutions to wave angle of shock wave in supercritical flow and water depth ratio with theoretical solutions and with experimental data, proving the accuracy of the explicit solutions to wave angle. The explicit solutions to wave angle of shock wave in supercritical flow have simplified the computation procedure and have improved the computation accuracy and can be used in solving the engineering computing.

**Key words:** explicit solution; Ippen's theory; shock wave in supercritical flow; wave angle; water depth ratio

明渠急流冲击波是由于边壁变化而产生的一种特殊水力现象, 最早于 20 世纪 30 年代被美国洛杉矶防洪局在其管辖的水渠中发现<sup>[1]</sup>, 随之在 20 世纪 30 年代末, 就有许多学者开始对这一问题进行广泛研究, 并提出了一些有益的成果, 到 20 世纪 50 年代初, 一整套急流冲击波的水力计算方法相继被提出<sup>[1-3]</sup>。关于急流冲击波波角和水深的计算式, 长期以来, 在许多教材、水力计算手册、水工设计手册、专著中, 都是采用伊本(Ippen, A T)1950 年建议的计算方法<sup>[4-10]</sup>, 此法需要试算才能确定急流冲击波波角, 很不方便, 因此, 在实用中都是采用以伊本理论为基础绘制的曲线图进行试算<sup>[4-6]</sup>。20 世纪 60 年

代, 我国学者在克服冲击波影响的措施方面进行了大量的研究, 取得了一定的成果。20 世纪 80 年代, 有学者对急流冲击波的计算问题进行了改进, 但仍然需要查图才能获得结果<sup>[11-12]</sup>。也有学者致力于给出急流冲击波的简化解<sup>[13-20]</sup>或者数值解<sup>[21-22]</sup>。由于伊本理论具有坚实的理论基础, 本文力图在伊本理论基础上作进一步探讨。

本文通过分析, 将函数的级数展开近似表达式引入到伊本急流冲击波理论的基本关系式中, 从而得到了可根据边壁折角  $\theta$  和弗汝德数  $Fr_1$  (与波前上游区流速  $v_1$  对应) 直接计算急流冲击波波角  $\beta_1$  的显式解。改变了以前查图试算的方法, 使计算工作

收稿日期: 2015-10-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10872164); 陕西省重点学科建设专项资金资助项目(00X901)

作者简介: 宁利中, 男, 教授, 博士, 研究方向为对流动力学、高速水力学。E-mail: ninglz@xaut.edu.cn

量大大简化,精度提高,为工程设计与水力计算提供了方便。

### 1 伊本急流冲击波理论

伊本对明渠边壁偏转引起的急流冲击波进行分析。其计算简图如图 1 所示。

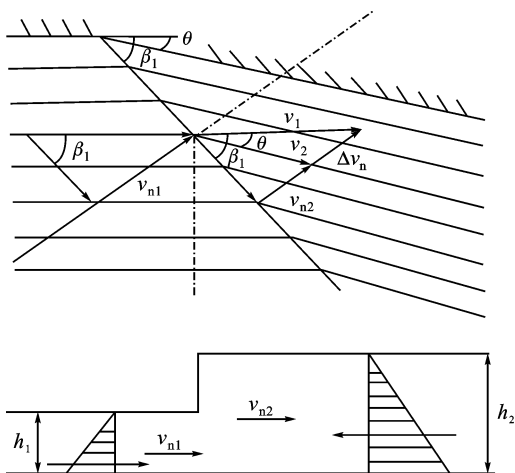


图 1 急流冲击波计算简图

Fig. 1 Calculation diagram of shock wave in supercritical flow

假设边界转折角  $\theta$  是微小的;水流铅垂方向的加速度忽略不计;波前上、下游断面的水压力符合静水压力分布;壁面摩阻力忽略不计。设波前上游区水深为  $h_1$ ,流速为  $v_1$ ,法向流速为  $v_{n1}$ ,波前下游区水深为  $h_2$ ,流速为  $v_2$ ,法向流速为  $v_{n2}$ ,冲击波波角为  $\beta_1$ , $v_{n1}$  与  $v_{n2}$  的速度差为  $\Delta v_n$ 。根据连续方程和动量方程,有:

$$h_1 v_{n1} = h_2 v_{n2} \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}(h_1)^2 + \frac{1}{g} h_1 (v_{n1})^2 = \frac{1}{2}(h_2)^2 + \frac{1}{g} h_2 (v_{n2})^2 \tag{2}$$

式中,  $g$  为重力加速度。由图 1 的几何关系,有:

$$v_{n1} = v_1 \sin \beta_1 \tag{3}$$

$$v_{n1} / v_{n2} = \text{tg} \beta_1 / \text{tg}(\beta_1 - \theta) \tag{4}$$

由式(1)、(2)、(3)得水深计算式为:

$$h_2 = \frac{h_1}{2} (\sqrt{1 + 8 Fr_1^2 \sin^2 \beta_1} - 1) \tag{5}$$

式中,  $Fr_1 = \frac{v_1}{\sqrt{g h_1}}$

由式(1)和式(4),得:

$$h_2 = h_1 \frac{\text{tg} \beta_1}{\text{tg}(\beta_1 - \theta)} \tag{6}$$

联解式(5)和式(6),得:

$$p = \frac{3(2Fr_1^2 \text{tg}^2 \theta + \text{tg}^2 \theta - 2)(2Fr_1^2 - \text{tg}^2 \theta) - (4Fr_1^2 + 3)^2 \text{tg}^2 \theta}{3(2Fr_1^2 - \text{tg}^2 \theta)^2}$$

$$\text{tg} \theta = \frac{(\sqrt{1 + 8 Fr_1^2 \sin^2 \beta_1} - 3) \text{tg} \beta_1}{2 \text{tg}^2 \beta_1 - 1 + \sqrt{1 + 8 Fr_1^2 \sin^2 \beta_1}} \tag{7}$$

对式(5)变形,得:

$$\sin \beta_1 = \frac{1}{Fr_1} \sqrt{\frac{h_2}{h_1} \frac{1}{2} (1 + \frac{h_2}{h_1})} \tag{8}$$

式(7)必须通过试算方能获得  $\beta_1$ ,要想直接获得  $\beta_1$  或由式(7)和式(8)直接计算  $h_2/h_1$  都是不可能的<sup>[1-11]</sup>。这就是到目前为止为什么还采用以式(5)~(8)为基础绘制的曲线图进行查算的原因所在。

### 2 急流冲击波波角及水深的显式解

为了获得波角的显式解,令式(5)与式(6)相等,或对式(7)变形,有:

$$\frac{\text{tg} \beta_1}{\text{tg}(\beta_1 - \theta)} = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + 8 Fr_1^2 \sin^2 \beta_1} - 1) \tag{9}$$

整理式(9),两边平方,得:

$$(\frac{1 + \text{tg} \beta_1 \text{tg} \theta}{\text{tg} \beta_1 - \text{tg} \theta} \text{tg} \beta_1 + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} + 2 Fr_1^2 \sin^2 \beta_1 \tag{10}$$

由于式(10)不能得到  $\beta_1$  的显函数,这里作一近似处理,以获得  $\beta_1$  的显函表达式。

令  $\text{tg} \beta_1 \approx \beta_1$ ,  $\sin \beta_1 \approx \beta_1$ ,则式(10)简化成:

$$(1 + \beta_1 \text{tg} \theta)^2 \beta_1^2 + (1 + \beta_1 \text{tg} \theta) \beta_1 (\beta_1 - \text{tg} \theta) = 2 Fr_1^2 \beta_1^2 (\beta_1 - \text{tg} \theta)^2 \tag{11}$$

从式(10)到式(11)的近似处理,理论上讲仅适合于  $\beta_1$  较小的情况。鉴于式(10)中有多项分别含有  $\text{tg} \beta_1$ ,  $\sin \beta_1$  或  $\beta_1$ ,且式(10)的方程结构较为复杂,故从数学方法方面不易直接分析近似处理所形成的误差综合效应。因此,对近似引起的实际误差效应及  $\beta_1$  的应用范围,我们将在本文第三节显式解与精确解的对比中进行详细讨论。

进一步整理式(11),得一元三次方程为:

$$\beta_1^3 - \frac{(4 Fr_1^2 + 3) \text{tg} \theta}{2 Fr_1^2 - \text{tg}^2 \theta} \beta_1^2 + \frac{2 Fr_1^2 \text{tg}^2 \theta - 2 + \text{tg}^2 \theta}{2 Fr_1^2 - \text{tg}^2 \theta} \beta_1 + \frac{\text{tg} \theta}{2 Fr_1^2 - \text{tg}^2 \theta} = 0 \tag{12}$$

引入变形参数  $x$ , 令:

$$\beta_1 = x + \frac{(4 Fr_1^2 + 3) \text{tg} \theta}{3(2 Fr_1^2 - \text{tg}^2 \theta)} \tag{13}$$

将式(13)代入式(12),有:

$$x^3 + px + q = 0 \tag{14}$$

其中:

$$q = -\frac{2}{27} \left[ \frac{(4Fr_1^2 + 3) \operatorname{tg}\theta}{2Fr_1^2 - \operatorname{tg}^2\theta} \right]^3 + \frac{(4Fr_1^2 + 3)(2Fr_1^2 \operatorname{tg}^2\theta + \operatorname{tg}^2\theta - 2) \operatorname{tg}\theta}{3(2Fr_1^2 - \operatorname{tg}^2\theta)^2} + \frac{\operatorname{tg}\theta}{2Fr_1^2 - \operatorname{tg}^2\theta}$$

根据一元三次方程解的判别条件, 由于  $\Delta = (q/2)^2 + (p/3)^3 < 0$  且  $p < 0$ , 故式(14)的解为三个实根, 根据实际问题的性质, 有唯一实根, 即:

$$x = 2 \sqrt[3]{M} \cos\alpha \quad (15)$$

式中,  $M = \sqrt{-(p/3)^3}$ ,  $\alpha = \frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{q}{2M}\right)$

将式(15)代入式(13), 得冲击波波角的显函数表达式为:

$$\beta_1 = 2 \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( -\frac{q}{2 \sqrt{-(p/3)^3}} \right) \right] + \frac{(4Fr_1^2 + 3) \operatorname{tg}\theta}{3(2Fr_1^2 - \operatorname{tg}^2\theta)} \quad (16)$$

当获得  $\beta_1$  后, 可由式(5)或式(6)计算波前下游区水深  $h_2$ 。

### 3 急流冲击波波角显式解的验证及讨论

为了验证式(16)所得波角  $\beta_1$  的精度以及由此计算的  $h_2$  的近似程度, 将该式计算得到的  $\beta_1$  和  $h_2$  与其精确解及实验值进行了比较, 结果如表 1 所示。其中在麻省理工学院进行的水利实验选取  $Fr_1 = 3.86$ ,  $\theta$  为  $3^\circ \sim 24^\circ$  作为实验条件。在理海大学进行的水利实验选取  $Fr_1$  为  $3.0 \sim 10.0$ ,  $\theta = 6^\circ$  作为实验条件。详细情况见文献[2]。

表 1 显式解与精确解及实验值的比较

Tab. 1 Comparison of the explicit solutions with the theoretical solutions and with experimental values

$\theta / (^\circ)$	$Fr_1$	波角 $\beta_1$					水深比 ( $h_2 / h_1 = \eta$ ) 值				
		精确解 $\beta_{1t}$	实验值 $\beta_{1e}$	显式解 $\beta_{1es}$	$\frac{\beta_{1t} - \beta_{1es}}{\beta_{1t} / \%$	$\frac{\beta_{1e} - \beta_{1es}}{\beta_{1e} / \%$	精确解 $\eta_{1t}$	实验值 $\eta_{1e}$	显式解 $\eta_{1es}$	$\frac{\eta_{1t} - \eta_{1es}}{\eta_{1t} / \%$	$\frac{\eta_{1e} - \eta_{1es}}{\eta_{1e} / \%$
3	3.86	17°35'	15°30'	17°22'	1.19	-12.06	1.22	1.24	1.20	1.64	3.23
6	3.86	20°15'	18°15'	20°7'	0.64	-10.25	1.45	1.47	1.44	0.69	2.04
9	3.86	23°10'	22°45'	23°4'	0.43	-1.41	1.70	1.73	1.70	0	1.73
12	3.86	26°30'	26°7'	26°14'	1.02	-0.42	1.99	2.00	1.96	1.51	2.00
15	3.86	29°30'	29°55'	29°36'	-0.34	1.07	2.23	2.22	2.24	-0.45	-0.90
18	3.86	32°25'	34°15'	33°13'	-2.47	3.01	2.49	2.47	2.53	-1.61	-2.43
21	3.86	35°45'	38°00'	37°5'	-3.72	2.42	2.73	2.71	2.83	-3.66	-4.43
24	3.86	39°18'	41°20'	41°15'	-4.96	0.19	2.99	3.01	3.13	-4.68	-3.99
6	3.00	25°10'	22°00'	24°32'	2.54	-11.50	1.37	1.31	1.33	2.92	-1.53
6	4.00	19°30'	18°40'	19°34'	-0.36	-4.82	1.45	1.52	1.46	-0.69	3.95
6	6.00	15°00'	15°10'	14°44'	1.80	2.90	1.75	1.73	1.72	1.71	0.58
6	8.00	12°20'	12°45'	12°22'	-0.32	2.98	1.96	2.17	1.97	-0.51	9.22
6	10.0	11°10'	10°30'	10°59'	1.70	-4.57	2.28	2.88	2.24	1.75	22.22

通过对表 1 中显式解  $\beta_{1es}$ 、精确解  $\beta_{1t}$  和实验值  $\beta_{1e}$  的比较以及显式解  $\eta_{1es}$ 、精确解  $\eta_{1t}$  和实验值  $\eta_{1e}$  的比较可以看出以下几点。

1) 当  $Fr_1 = 3.86$ ,  $\theta$  取  $3^\circ \sim 24^\circ$  时, 显式解  $\beta_{1es}$  和精确解  $\beta_{1t}$  是相当接近的, 误差小于 5%, 特别当  $\theta < 15^\circ$  时, 两者几乎是完全一致的。显式解  $\beta_{1es}$  与实验值  $\beta_{1e}$  也是吻合的。由于铅垂加速度对波前位置的影响<sup>[2]</sup>, 使得当实验值  $\eta_{1e}$  小于 2 时, 实验值  $\beta_{1e}$  较精确解  $\beta_{1t}$  和显式解  $\beta_{1es}$  小, 而当实验值  $\eta_{1e}$  大于 2 时, 则实验值  $\beta_{1e}$  又较精确解  $\beta_{1t}$  和显式解  $\beta_{1es}$  大。

2) 当  $Fr_1 = 3.86$ ,  $\theta$  取  $3^\circ \sim 24^\circ$  时, 显式解  $\eta_{1es}$  与实验值  $\eta_{1e}$ 、精确解  $\eta_{1t}$  是非常接近的。其最大误差

发生在  $\theta = 24^\circ$  时, 但显式解  $\eta_{1es}$  与精确解  $\eta_{1t}$ 、显式解  $\eta_{1es}$  与实验值  $\eta_{1e}$  的误差均小于 5%。当  $\theta \leq 18^\circ$  时, 三者之间的两两误差均小于 2.5%。

3) 当  $Fr_1$  取  $3.0 \sim 10.0$ ,  $\theta = 6^\circ$  时, 显式解  $\beta_{1es}$  与精确解  $\beta_{1t}$  的最大误差是 2.5%, 两者均与实验值  $\beta_{1e}$  接近, 同时, 水深比  $\eta$  的计算结果表明, 显式解  $\eta_{1es}$  与精确解  $\eta_{1t}$  的最大误差小于 3.0%。但当  $Fr_1 = 10$  时, 显式解  $\eta_{1es}$  和精确解  $\eta_{1t}$  均与实验值  $\eta_{1e}$  有一定误差。

4) 根据上述分析, 当  $Fr_1$  较小时, 显式解  $\beta_{1es}$  可在较大的侧墙折角范围内适用, 这和精确解  $\beta_{1t}$  是一致的。显式解  $\beta_{1es}$  用显函数表示, 避免了理论关系式需试算求解或图解的麻烦, 又有足够的精度, 因

此,本方法可应用于急流收缩段等的水力计算。

## 4 结 语

在伊本急流冲击波理论上,通过分析,将函数的级数展开近似表达式引入到伊本急流冲击波理论的基本关系式中,从而得到了可根据边壁折角 $\theta$ 和弗汝德数 $Fr_1$ 直接计算急流冲击波波角 $\beta_1$ 的显式解。通过实验验证,急流冲击波波角 $\beta_1$ 和相应的水深比 $h_2/h_1$ 的显式解与其精确解和实验值能够很好的吻合。急流冲击波波角 $\beta_1$ 的显式解改变了以前查图试算的方法,提高了精度,为工程设计与水力计算提供了新途径。

### 参考文献:

- [1] IPPENA T. Mechanics of supercritical flow[J]. Transactions, ASCE, 1951, 116: 268-295.
- [2] IPPENA T, DAWSON J H. Design of channel contractions[J]. Transactions, ASCE, 1951, 116: 326-346.
- [3] IPPENA T, HARLEMAN D R F. Verification of theory for oblique standing waves[J]. Transactions, ASCE, 1956, 121: 678-694.
- [4] 王宏硕. 水工建筑物(专题)[M]. 北京:水利电力出版社,1991:38-44.
- [5] 吴持恭. 水力学:下[M]. 北京:高等教育出版社,2006: 305-315.
- [6] 李炜. 水力计算手册[M]. 第二版. 北京:中国水利电力出版社,2006: 291-297.
- [7] 沈长松,王世夏,林益才. 水工建筑物[M]. 北京:中国水利电力出版社,2008:86-93.
- [8] 刘志明,温续余. 水工设计手册(第七卷)[M]. 第二版. 北京:中国水利电力出版社,2014:173-174.
- [9] 陈胜宏. 水工建筑物[M]. 北京:中国水利电力出版社, 2007:401-404.
- [10] 刘士和. 高速水流[M]. 北京:科学出版社,2005: 185-187.
- [11] STURM T W. Simplified design of contractions in supercritical flow[J]. Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 1985,111(5):871-875.
- [12] HAGER W H. Infinitesimal cross-wave analysis[J]. Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 1984, 110 (8): 1145-1150.
- [13] HAGER W H, NICOLA V, BRETZ N V. Discussion of "simplified design of contractions in supercritical flow" [J]. Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 1987,113(3): 422-424.
- [14] HAGER W H, SCHWALT M, JIMENEZ O. Supercritical flow near an abrupt wall deflection[J]. Journal of Hydraulic Research,1994,(1):103-118.
- [15] HAGER W H. Supercritical flow in channel junctions [J]. Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 1989, 115(5): 595-616.
- [16] 刘韩生,倪汉根. 急流冲击波简化式[J]. 水利学报, 1999,30(1):56-60.  
LIU Hansheng, NI Hangen. The simplified formulas for shock wave in open channel[J]. Journal of Hydraulic Engineering,1999,30(1):56-60.
- [17] 刘韩生,倪汉根. 对称曲线边墙的窄缝挑坎体型设计方法[J]. 水利学报,2000,31(5):70-75.  
LIU Hansheng, NI Hangen. Configuration design method for symmetric slit-bucket with curved side-wall [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2000,31(5): 70-75.
- [18] 刘韩生,倪汉根,梁川. 非对称窄缝挑坎的边墙曲线计算方法[J]. 水力发电学报,2001,20(3):59-67.  
LIU Hansheng, NI Hangen, LIANG Chuan. Numeration of curved sidewall for asymmetric slit-bucket[J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2001, 20(3): 59-67.
- [19] 田士豪,方彦军. 泄槽冲击波的水力特性[J]. 武汉水利电力大学学报,1995,28(3):274-278.  
TIAN Shihao, FANG Yanjun. Hydraulic characteristics of the shock wave of a spouting chute[J]. Journal of Wuhan University of Hydraulic and Electrical Engineering,1995,28(3):274-278.
- [20] 李建中,宁利中. 高速水力学[M]. 西安:西北工业大学出版社,1994:29-31.
- [21] 王如云,张长宽,张君伦,等. 亚临界角下的急流冲击波快速收敛计算方法[J]. 水动力学研究与进展,2002, 17(1):1-8.  
WANG Ruyun, ZHANG Changkuan, ZHANG Junlun, et al. Fast-convergent computational method for torrent shock wave under subcritical angle condition[J]. Chinese Journal of Hydrodynamics,2002,17(1):1-8.
- [22] 黄细彬. 急流冲击波的计算及分析[J]. 河海大学学报,1994,22(3):96-100.  
HUANG Xibin. The calculation and analysis of shock wave [J]. Journal of Hohai University, 1994, 22(3): 96-100.

(责任编辑 周 蓓)