

DOI:10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2016.02.019

基于牛顿迭代法的分形图像研究

任 露, 黄颖为

(西安理工大学 印刷包装与数字媒体学院, 陕西 西安 710048)

摘要: 通过调用牛顿迭代法绘制分形图像, 利用绘图参数和运算法则构造着色方案, 研究复平面分形图像结构特征并提供多个新的着色方案, 发现复平面分形图像结构有规律可循, 图像色彩难以揣测。

关键词: 牛顿迭代法; 分形图像; 结构特征; 着色方案

中图分类号: TP391.41

文献标志码: A

文章编号: 1006-4710(2016)02-0247-06

Research on the fractal image of Newton-Raphson method

REN Lu, HUANG Yingwei

(School of Printing, Packaging Engineering and Digital Media Technology, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

Abstract: The fractal image is mapped through Newton-Raphson method. The graphic parameters and operational rules are used to construct the coloring scheme. The structure characteristics of the fractal image on the complex plane are studied, and a number of new coloring schemes are provided in this paper. The research results indicate that on the complex plane, the structure of fractal images have laws to follow and colors of fractal images are difficult to estimate.

Key words: Newton-Raphson method; fractal image; structure feature; coloring scheme

分形^[1], 通常被定义为“一个粗糙或零碎的几何形状, 可以分成数个部分, 且每一部分都(至少近似地)是整体缩小后的形状”。即分形具有自相似特征, 可利用计算机迭代来生成。牛顿迭代法作为计算机迭代的主要方法之一, 绘制的分形图像结构具有对称性且有一定规律可循, 图像像素点色彩和迭代次数相对应。相比于实数迭代分形集, 在二维平面上, 牛顿迭代法生成的复迭代分形集结构更加复杂, 色彩更加丰富, 包含更多信息, 也具有更强的防伪特征^[2-3]。本文利用牛顿迭代法绘制基于复迭代公式 $f(Z) = Z^n - 1$ (其中 Z 为复平面上的点, n 为实数且 $n \geq 2$) 的广义 Julia 集, 研究实数 n 对图像结构的影响, 迭代参数及迭代参数与运算符的组合方式对图像色彩的影响, 为实现分形图像的个性化和多样化设计提供参考。

1 牛顿迭代法绘制复平面分形图像

根据牛顿迭代法^[4]求解复平面方程 $f(Z) = 0$, $f(Z)$ 的牛顿迭代函数为:

$$\phi(Z) = Z - \frac{f(Z)}{f'(Z)} \quad (1)$$

若 $\frac{f(Z)}{f'(Z)} = 0$, 给出的 $\phi(Z)$ 不动点则是 $f(Z)$ 的零点。若 $f'(Z) \neq 0$, 对式(1)求导:

$$\phi'(Z) = \frac{f(Z)f''(Z)}{[f'(Z)]^2} \quad (2)$$

此时 $f(Z)$ 的零点也是 ϕ 的超吸引不动点。当 $|Z|$ 较大时, $\phi(Z) \sim Z(1 - 1/n)$, n 为 $f(Z)$ 的阶, ∞ 是 $f(Z)$ 的斥性点, 则记 $A(\omega) = \{Z_0 : \phi(Z_k) \rightarrow \omega\}$, 其中 $A(\omega)$ 表示零点 ω 的吸引域, 即在牛顿迭代法下收敛于 ω 的初始点集。

牛顿迭代法绘制复平面分形图像的流程^[5]如图 1 所示。首先设置迭代方程, 然后在复平面上选择一点 Z_0 作为迭代初始点, 再进行着色处理, 最终生成分形图像。

具体过程^[6]如下。

设显示器的分辨率为 $A \times B$ 点, 可显示的颜色为 $k+1$ 种, 分别用 $0, 1, 2, \dots, k$ 表示。

1) 设置迭代方程 $f(Z) = z^n - 1$ 中 n 的取值;

收稿日期: 2015-06-02

作者简介: 任露, 女, 硕士生, 研究方向为印刷质量控制与防伪。E-mail: renlu_lenka@163.com

通讯作者: 黄颖为, 女, 教授, 研究方向为印刷质量控制与防伪。E-mail: huangyw12@163.com

2) 选择绘图区域坐标 $x_{\max}=2, y_{\max}=1.5, x_{\min}=-2, y_{\min}=-1.5$, 设当前迭代次数为 M , 最大迭代次数为 N , 迭代精度为 ϵ , $dx=(x_{\max}-x_{\min})/(A-1), dy=(y_{\max}-y_{\min})/(B-1)$;

3) 设定迭代初始点值 $Z_0=x_0+y_0i, x_0=x_{\min}+m_x * dx, y_0=y_{\min}+m_y * dy$, 其中 $m_x=0, 1, \dots, A-1, m_y=0, 1, \dots, B-1$ 。

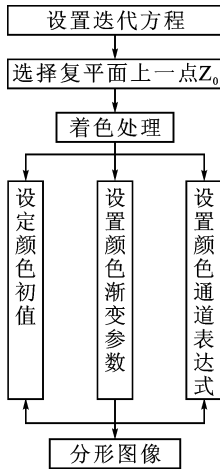


图 1 分形图像绘制流程

Fig. 1 The procedure of fractal images generated

对所有点作如下循环:

```

for (x=0; x<A; x++)
  for (y=0; y<B; y++)
  {
     $x_k=x_{\min}+x * dx;$ 
     $y_k=y_{\min}+y * dy;$ 
     $M=0;$ 
    do
    {
       $mod=|Z_{k+1}-Z_k|;$ 
       $Z_{k+1}=Z_k;k++;$ 
    } while ( $mod \geq \epsilon \& \& k < N$ );
    if ( $mod < \epsilon$ ) 用颜色  $k$  显示点  $(x_k, y_k)$ ;
    else if ( $M=N$ ) 用某一固定颜色显示点  $(x_k, y_k)$ ;
  }
  
```

2 复多项式 $f(Z)=Z^n-1$ 牛顿迭代分形图像结构特征

用牛顿迭代法求 $f(Z)=Z^3-1=0$ 的特解, 根据式(1), 该方程迭代函数为:

$$\phi(Z) = \frac{2Z^3+1}{3Z^2}$$

设 $\rho(Z)=Ze^{2\pi i/3}$, $\rho(Z)$ 是绕原点转动 120° 的旋转变换, 则:

$$\rho[\phi(Z)] = \frac{2Z^3+1}{3Z^2}e^{2\pi i/3}$$

$$\phi[\rho(Z)] = \frac{2(Ze^{2\pi i/3})^3+1}{3(Ze^{2\pi i/3})^2} = \frac{2Z^3+1}{3Z^2}e^{2\pi i/3}$$

$$\rho[\phi(Z)] = \phi[\rho(Z)]$$

由以上各式可见, ρ 是 ϕ 至自身的共轭变换。 $f(Z)$ 的三个零点 ω_0, ω_1 和 ω_2 分别为 $1, -1/2+(\sqrt{3}/2)i$ 和 $-1/2-(\sqrt{3}/2)i$, 绕原点 120° 的旋转变换把每个 ω 相应的 $A(\omega)$ 映射到 $A(\omega e^{2\pi i/3})$ 上。

根据牛顿迭代法绘制的 $f(Z)=Z^3-1$ 的 Julia 集如图 2 所示, 可以很明显地观察到图像有关于原点对称的 3 个部分, 3 条“链”分别对应 $f(Z)$ 的 3 个零点, 且每条“链”本身又具有无限精细结构。

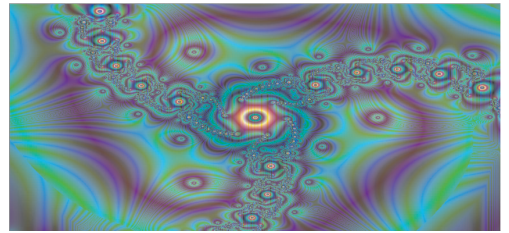


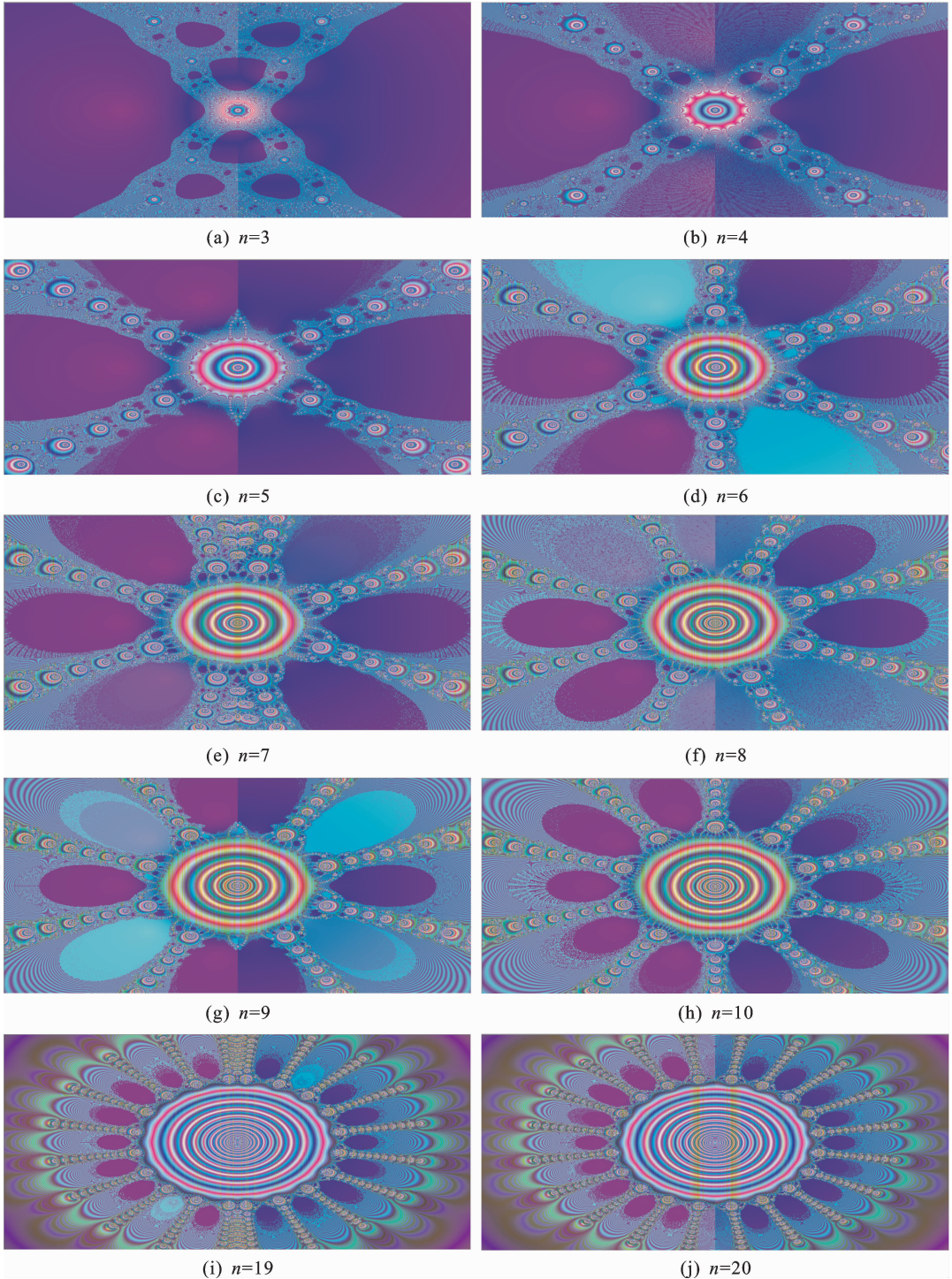
图 2 牛顿函数 $\phi(Z)=(2Z^3+1)/(3Z^2)$ 的 Julia 集

Fig. 2 Julia set of Newton-Raphson function $\phi(Z)=(2Z^3+1)/(3Z^2)$

图 2 采用的是图像迭代点色彩与迭代次数相对应的传统着色方案, 图像呈现出“链”结构特征。本文将分形图像迭代参数与各种运算符组合构造新型着色方案, 图 3(a)~(j) 所示为其中一种着色方案下, n 取不同值时, 方程 $f(Z)=Z^n-1=0$ 分别对应的分形图像。

经大量计算机试验后, 观察发现: 当 $n=4t$ 时 (t 为正整数), 图像左右两部分各有 $2t$ 条链, 且每条链结构相似; 当 $n=4t-1$ 时, 图像左右两部分各有 $(2t-2)$ 条独立的链, 垂直中心线处有两条交融链 (由左右两部分链交融形成); 当 $n=4t+1$ 时, 图像左右两部分各有 $2t$ 条完整的链, 垂直中心线处有两小段链; 当 $n=4t+2$ 时, 图像左右两部分各有 $2t$ 条链, 垂直中心线处有两条完整的链。

由此可知, 复多项式 $f(Z)=Z^n-1$ 中 n 的取值影响图像结构。按照上述规律绘制的分形图像可用于系列化产品包装, 实现装潢图形与图形之间的迭代变换和推移组合, 这种“自相似”的“重复”结构可强化包装设计的序列视觉变化效果^[7]。

图3 不同 n 值的分形图像Fig. 3 Images according to different values of n

3 复多项式 $f(Z) = Z^n - 1$ 牛顿迭代分形图像着色方案

图2和图3的着色方案中,迭代参数和多种运算符组合构成图像颜色通道表达式,具体描述如下。在牛顿迭代法绘图中,设定最大迭代次数 N 为13;当前迭代次数 M 为11;设定颜色渐变参数 a 为5,

以扩大图像色彩变化范围,且 a 为正数时色彩增强,反之减弱;此处设定颜色初始值 (C_1, C_2, C_3) 为 $(118, 158, 108)$;取复平面上 $Z_0 = x_0 + y_0i$ 为迭代初始点;迭代过程中可得第一次迭代移动距离 $l_1 = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$;第 k 次迭代移动距离 $l_2 = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}$;第 k 次迭代点距 $(0, 0)$ 点距离 $l_3 = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}$;迭代得到解距离精确解的

大概距离 l_4 (精确解取决于具体方程); 采用 4 个迭代过程参数 (l_1, l_2, l_3, l_4) , 2 个迭代初始参数 (N, M) , 3 个颜色初始值 (C_1, C_2, C_3) 和颜色渐变参数 a 以及 8 种运算符 (幂运算、取整、取余、取对数、加、减、乘、除) 构造颜色通道表达式, 并用矩阵变量 C 保存各像素点的 RGB 值 (0~255), 该方案的部分代码^[8] 展示如下。

```

N=13;
M=11;
C=RGB(255-abs((int)fabs(C1-(2*C2-
255)*pow((log(fabs(l1+l3+
0.01))) * 2,a))%510-255), 255-
abs((int)fabs(C2-(3*C3-255)*
pow((log(l2*0.1)) * 4, a)+N)%510-
255), 255-abs((int)fabs(C3-
(5*C1-255)*pow((log(fabs(l4+
0.001))) * 3+M,a))%510-255));
break;

```

由上述代码可知, 影响图像着色方案的因素分别为迭代初始参数 N 和 M 、颜色初始值 (C_1, C_2, C_3) 、颜色渐变参数 a 和颜色通道表达式。现以多项式 $f(Z) = Z^6 - 1$ 为例, 探讨这 5 个因素对着色效果的影响。

1) 迭代初始参数 N 不同, 其他参数相同。

当颜色初始值 RGB 为 (118, 158, 108), 颜色渐变参数 a 为 5, M 为 11, 颜色通道表达式同图 3, N 分别为 25 和 26 时, 对应图像如图 4(a) 和 (b) 所示。

2) 迭代初始参数 M 不同, 其他参数相同。

当颜色初值 RGB 为 (118, 158, 108), 颜色渐变参数 a 为 5, N 为 24, 颜色通道表达式同图 3, M 分别为 9 和 10 时, 对应图像如图 5(a) 和 (b) 所示。

3) 颜色初始值不同, 其他参数相同。

当 N 为 24, M 为 10, 颜色渐变参数 a 为 6, 颜色通道表达式同图 3, 颜色初值 RGB 分别为 (118, 158, 108) 和 (100, 210, 140) 时, 对应分形图像如图 6 (a) 和 (b) 所示。

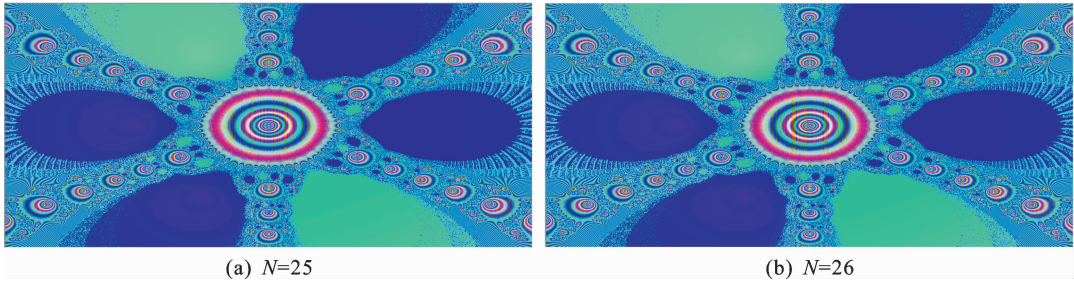


图 4 不同迭代初始参数 N 对应的分形图像

Fig. 4 Images according to different initial iterative parameter N

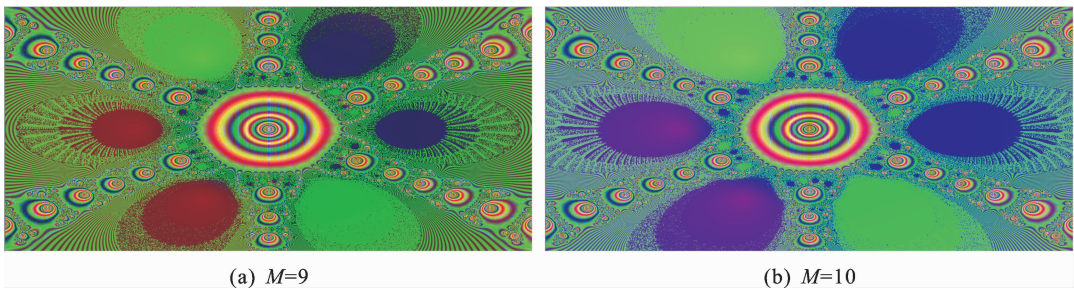


图 5 不同迭代初始参数 M 对应的分形图像

Fig. 5 Images according to different initial iterative parameter M

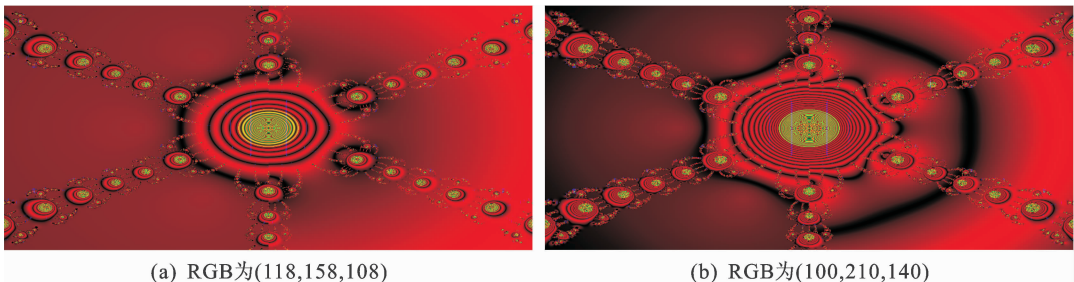


图 6 不同颜色初始值对应的分形图像

Fig. 6 Images according to different initial values of RGB

4) 颜色渐变参数不同,其他参数相同。

当 N 为 24, M 为 11, 颜色初值 RGB 为 (118, 158, 108), 颜色通道表达式同图 3, 颜色渐变参数 a 分别为 5 和 6 时, 对应图像如图 7(a) 和 (b) 所示。

5) 颜色通道表达式不同,其他参数相同

当 N 为 25, M 为 11, 颜色初始值 RGB 为 (118, 158, 108), 颜色渐变参数 a 为 6 时, 颜色通道表达式不同, 对应图像分别如图 8(a)~(d) 所示。

由图 4~8 可知, 对于同一多项式, 迭代初始参数、颜色初始值、颜色渐变参数或颜色通道表达式任何一个发生变化都会引起分形图像色彩变化。参数集与运算符的组合形式决定了着色方案, 几乎所有的运算符都可使用, 如取三角函数、取反三角函数等, 并且同一方案中各参数的取值又影响着具体的着色效果。利用上述结论, 将分形理论与计算机创作结合, 可实现分形图像的数字化和多样化设计^[9]。

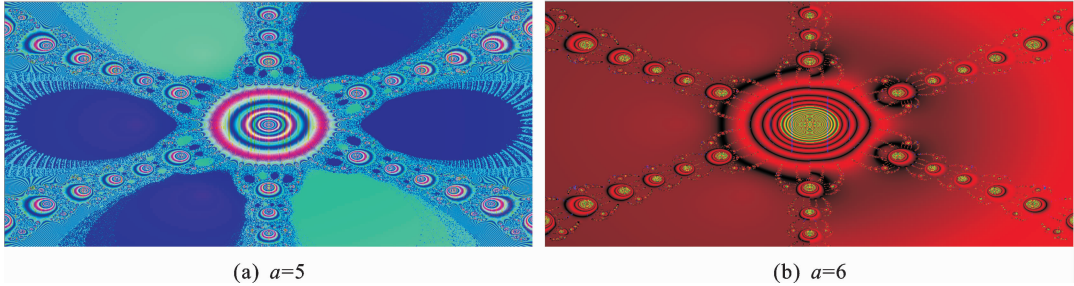


图 7 不同颜色渐变参数 a 对应的分形图像
Fig. 7 Images according to different values of color gradient parameter a

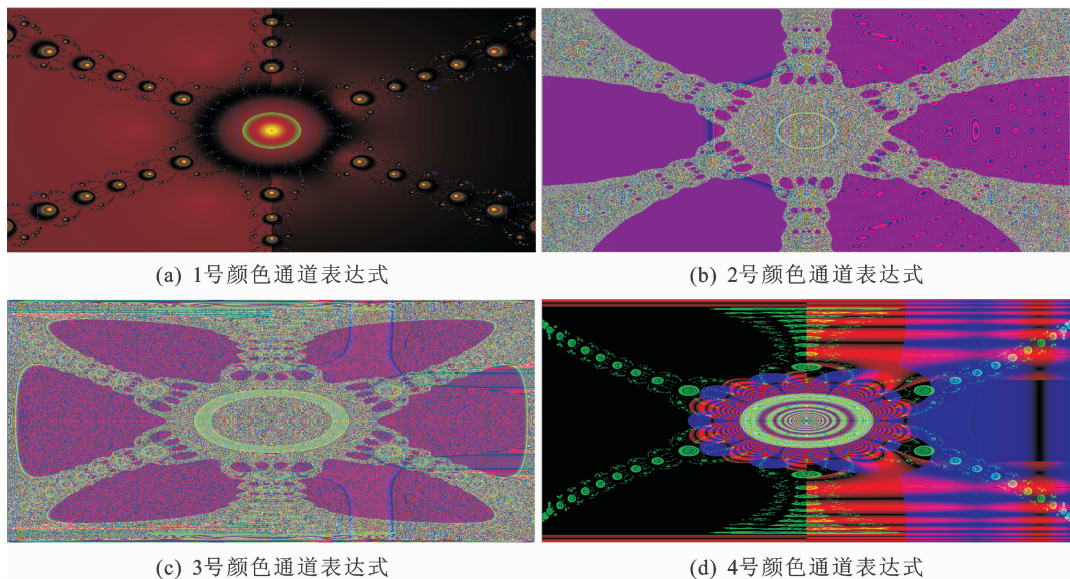


图 8 不同颜色通道表达式对应的分形图像
Fig. 8 Images according to different coloring programs

4 结 语

试验证明, 牛顿迭代法绘制的复多项式 $f(Z) = Z^n - 1$ 的分形图像结构与 n 的取值有关, 且有一定规律可循, 借用此规律可设计系列产品包装装潢图案, 建立个性化图像素材库; 着色方案中参数集或颜色通道表达式的变化均会引起图像色彩变化, 开发者可选择不同参数和运算符构造不同着色方案, 实现多样化设计, 最终将绘制的分形图像用于产品商标或包装以实现防伪。

参考文献:

- [1] MANDELBROT B B. The fractal geometry of nature [M]. New York: W. H. Freeman and Company, 1982.
- [2] 王文, 刘夏. 广义 Julia 集在防伪设计中的应用[J]. 山东建筑大学学报, 2013, 28(4): 386-389.
WANG Wen, LIU Xia. Application of Julia set to anti-counterfeiting design[J]. Journal of Shandong Jianzhu University, 2013, 28(4): 386-389.
- [3] 张静, 王化雨. 基于实数分形的图案设计[J]. 信息技术与信息化, 2010, (6): 24-26.
ZHANG Jing, WANG Huayu. The design of pattern

- based on real fractal[J]. *Information Technology & Informatization*, 2010, (6):24-26.
- [4] 叶家鸣, 蒋永花. 基于牛顿迭代算法的分形艺术图形设计[J]. *计算机技术与发展*, 2008, 18(4):88-91.
YE Jiaming, JIANG Yonghua. Design of fractal art graphics based on Newton iterative algorithm[J]. *Computer Technology and Development*, 2008, 18(4):88-91.
- [5] 田兴彦, 邓基园, 朱永娇. 基于 VS 的分形图形绘制[J]. *微计算机信息*, 2012, 28(1):1-3.
TIAN Xingyan, DENG Jiyuan, ZHU Yongjiao. Use Visual Studio to draw fractal graphic[J]. *Microcomputer Information*, 2012, 28(1):1-3.
- [6] 孙博文. 分形算法与程序设计: Visual C++ 实现[M]. 北京: 科学出版社, 2004:118-133.
- [7] 熊承霞. 解读当代包装设计中的分形结构创意[J]. *包装工程*, 2012, 33(18):1-4.
XIONG Chengxia. Interpretation of the fractal structure creativity in contemporary packaging design[J]. *Packaging Engineering*, 2012, 33(18):1-4.
- [8] 侯思松. 牛顿法解方程之混沌情况[EB/OL]. (2014-06-06) [2015-07-20]. <http://www.fractal.cn/supply/read.asp?supplyid=134>.
- [9] 靳晓晓, 陈晨. 分形开拓数字化图形设计新思路[J]. *包装工程*, 2013, 34(22):9-12, 23.
JIN Xiaoxiao, CHEN Chen. New thinking of digital graphic design of fractal expanding[J]. *Packaging Engineering*, 2013, 34(22):9-12, 23.
- (责任编辑 王卫勋, 王绪迪)

(上接第 217 页)

- [7] LOWE D G. Distinctive image features from scale-invariant keypoints[J]. *International Journal of Computer Vision*, 2004, 60(2):91-110.
- [8] BAY H, TUYTELAARS T, VAN GOOL L. SURF: Speeded up robust features[C]//9th European Conference on Computer Vision, Graz, Austria, 2006:404-417.
- [9] ROSTEN E, DRUMMOND T. Machine learning for high-speed corner detection[C]//9th European Conference on Computer Vision, Graz, Austria, 2006:430-443.
- [10] 杜杰, 刘亚秋, 孙焱. 基于仿射不变闭合区域和 SURF 的图像匹配算法[J]. *计算机应用研究*, 2014, 31(1):295-298.
DU Jie, LIU Yaqiu, SUN Yao. Image matching algorithm based on affine-invariant closed region and SURF [J]. *Application Research of Computers*, 2014, 31(1):295-298.
- [11] 尧思远, 王晓明, 左帅. 基于 SURF 的特征点快速匹配算法[J]. *激光与红外*, 2014, 44(3):347-350.
YAO Siyuan, WANG Xiaoming, ZUO Shuai. Fast feature point matching algorithm based on SURF[J]. *Laser & Infrared*, 2014, 44(3):347-350.
- [12] 罗天健, 刘秉瀚. 融合特征的快速 SURF 配准算法[J]. *中国图象图形学报*, 2015, 20(1):95-103.
LUO Tianjian, LIU Binghan. Fast SURF key-points image registration algorithm by fusion feature [J]. *Journal of Image and Graphics*, 2015, 20(1):95-103.
- [13] BRADSKI G. *Learning OpenCV*[M]. 南京: 东南大学出版社, 2009:20.
- (责任编辑 王绪迪, 王卫勋)