

文章编号: 1006-4710(2011)01-0056-06

动力机器基础振动的 Lysmer 理论与有限元法的对比研究

范留明¹, 朱飞²

(1. 西安理工大学 水利水电学院, 陕西 西安 710048; 2. 青海省环境地质勘察局, 青海 西宁 810007)

摘要: 采用有限元数值方法与理论计算法的对比研究, 提出了一种验证动力机器基础 Lysmer 理论适用性的分析方法。首先根据二阶常系数非齐次微分方程理论, 推求得到 Lysmer 方程的理论解, 建立了动力基础的理论模型和相同条件下有限元数值试验模型, 并分别采用有限元数值计算和理论计算得到在相同外周期动荷载作用下两种模型的位移历时曲线。计算结果发现, 两种位移历时曲线的总体形状、初始相位和振动频率均非常接近, 振幅之间存在明显的线性关系, 反映出两者之间具有良好的可比性。

关键词: 动力机器基础; Lysmer 方程; 动力有限元; 位移时程

中图分类号: TU435 **文献标志码:** A

Comparison of Lysmer Equation Method with FEM for Vibration of Dynamic Machine Foundation

FAN Liuming¹, ZHU Fei²

(1. Faculty of Water Resources and Hydroelectric Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China; 2. Administration of Environment Geology Survey of Qinghai Province, Xining 810007, China)

Abstract: An adaptable analysis method for testing Lysmer theory of dynamic machine foundation is suggested using the comparative research algorithm of FEM numerical method and theoretical computation method in this paper. The theoretical solution to Lysmer equation is deduced based on the non-homogeneous differential equation theory of the second-order constant coefficient, and then the theoretical model for vibration of dynamic machine foundation and the finite element numerical model under the same condition are built. The two displacement curves of the models under the moving loading action in the same outside cycle have been calculated and obtained respectively. It has been found via the calculation results that total shape, initial phase and vibration frequency of displacement time intervals of two kinds are very close and that there exists an obvious linear relationship among the vibration frequencies, whereby reflecting that there is a better comparison between the both.

Key words: dynamic machine foundation; Lysmer equation; FEM; displacement time interval

在动力机器基础设计的理论和方法中,经典的振动理论体系有两类:质-阻-弹模式和弹性半空间模式^[1-5]。随着以有限单元法为代表的数值模拟方法^[4,6]的日益普及和广泛应用,一些更复杂的计算模型不断被提出来,其中具有代表性的模型有两类:可考虑机器-基础-地基相互作用的集总参数模型、考虑地基刚度及阻尼随频率变化的频变参数模型。这些模型因更接近实际而大大提高了计算精

度,适宜于解决复杂条件下重要建筑地基基础问题。但是,这些模型和弹性半空间理论一样,在实际应用上存在参数多、计算复杂、工作量大等问题,不易被一般工程技术人员掌握,难以像质-阻-弹模型理论一样,在地基基础工程领域被广泛采用。为此,一些学者曾致力于研究复杂动力基础模型与质-阻-弹模式之间的理论联系,期望得到更简便的应用方法。赖斯默(J. Lysmer)应用“比拟法”,得到了对

收稿日期: 2010-05-17

基金项目: 陕西高校省级重点实验室重点科研项目基金资助项目(2010JS085)。

作者简介: 范留明(1968-),男,河南焦作人,博士,教授,研究方向为岩土力学与工程。E-mail: fanliuming@xaut.edu.cn。

半空间理论实用化的 Lysmer 方程式,从而将复杂的半空间问题转化为简单的等效质-阻-弹模型,为弹性半空间理论在工程上的推广应用提供了一个新的途径。在此模型中,基础被看作一个无结构的质点,基础的运动则简化为质点的受迫振动,此模型方法简单、概念清晰、使用方便^[3,7-8]。但是,应用数值方法对理论模型进行对比验证的研究工作较少。为此,笔者采用有限元数值模型与 Lysmer 理论模型进行了验证分析,提出了一种验证动力机器基础 Lysmer 理论模型适用性的分析方法,这一研究方法对研究非均匀介质条件下动力基础的 Lysmer 理论模型的适用性有重要的借鉴作用。

1 Lysmer 方程理论解

1.1 Lysmer 方程的理论推导^[10]

对于均匀各向同性的圆柱基础,在竖向均布周期荷载作用下,其圆心处的竖向位移 z 由赖斯纳 (Reissner) 导出:

$$z = \frac{Q_0 e^{i\omega t}}{Gr_0} (f_1 + i f_2) \quad (1)$$

式中, Q_0 为作用在圆心基础上的荷载振幅, ω 为竖向周期荷载圆频率, G 为地基土剪切刚度, r_0 为弹性半无限空间半径, f_1 、 f_2 为赖斯纳位移函数。

1962 年谢 (Hsich) 利用赖斯纳解答,推导了弹性半无限空间表面上半径为 r_0 的无重量刚性圆板的振动方程。在推导过程中,假定作用在圆板上的外周期荷载为:

$$Q = Q_0 e^{i\omega t} \quad (2)$$

对式(1)求时间导数 \dot{z} ,可得:

$$\dot{z} = \frac{Q_0 \omega e^{i\omega t}}{Gr_0} (i f_1 - f_2) \quad (3)$$

据式(1)和式(3),可得:

$$f_1 \omega z - f_2 \dot{z} = \frac{Q_0 \omega e^{i\omega t}}{Gr_0} (f_1^2 + f_2^2) \quad (4)$$

据式(2)和(4),可得到关于 Q 的表达式:

$$Q = -\frac{Gr_0}{\omega} \frac{f_2}{f_1^2 + f_2^2} \dot{z} + Gr_0 \frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2} z \quad (5)$$

对于刚性圆柱形基础,如果底面半径为 r_0 ,质量为 m (如图 1 所示),基础表面荷载为:

$$P = P_0 e^{i\omega t} \quad (6)$$

根据力学平衡关系,可得如下形式的动力学平衡方程式:

$$m\ddot{z} + \frac{Gr_0}{\omega} \left(\frac{-f_2}{f_1^2 + f_2^2} \right) \dot{z} + Gr_0 \left(\frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2} \right) z = P_0 e^{i\omega t} \quad (7)$$

式中, z 、 \dot{z} 、 \ddot{z} 分别是圆心的位移、速度和加速度。

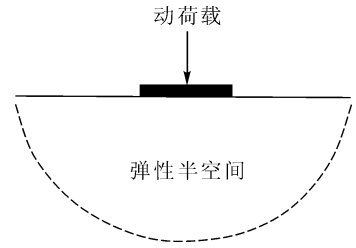


图 1 圆柱基础的动力响应模型

Fig. 1 Dynamic response model of a rigid circular footing

Lysmer 研究发现,如果将赖斯纳位移乘以关于地基土泊松比 μ 的常数 $4/(1-\mu)$,则式(7)有更大的适用范围。取:

$$\begin{cases} F_1 = \frac{4}{1-\mu} f_1 \\ F_2 = \frac{4}{1-\mu} f_2 \end{cases} \quad (8)$$

将式(8)代入式(7),整理得:

$$m\ddot{z} + \frac{4Gr_0}{(1-\mu)\omega} \left(\frac{-F_2}{F_1^2 + F_2^2} \right) \dot{z} + \frac{4Gr_0}{1-\mu} \left(\frac{F_1}{F_1^2 + F_2^2} \right) z = P_0 e^{i\omega t} \quad (9)$$

对于式(9),若取:

$$\begin{cases} \frac{F_1}{F_1^2 + F_2^2} = 1.0 \\ \frac{-F_2}{F_1^2 + F_2^2} = 0.85\omega r_0 \sqrt{\rho/G} \end{cases} \quad (10)$$

则可得到在竖向周期力作用下,弹性半空间刚性圆柱基础圆心处的振动方程为:

$$m\ddot{z} + C_z \dot{z} + K_z z = P_0 e^{i\omega t} \quad (11)$$

式中:

$$C_z = \frac{3.4Gr_0^2}{1-\mu} \sqrt{\rho/G} \quad (12)$$

$$K_z = \frac{4Gr_0}{1-\mu} \quad (13)$$

式(11)就是著名的 Lysmer 简化比拟运动方程。这一方法还可推广至动力基础的扭转振动、摇摆振动和滑移振动等情形。

1.2 Lysmer 方程的理论解

为了避免复数运算,Lysmer 方程外周期荷载采取正弦实函数形式,结合定解条件,则 Lysmer 方程理论解的定解问题为:

$$\begin{cases} m\ddot{z} + C_z \dot{z} + K_z z = P_0 \sin\omega t \\ z|_{t=0} = 0 \\ \dot{z}|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

式(14)是二阶常系数非齐次线性微分方程,其解在形式上分通解和特解两部分。

1.2.1 通解计算

根据微分方程含义可知,当 $C_z^2 - 4mK_z \geq 0$ 时, Lysmer 方程的位移呈指数形式变化,不会出现振动现象,本文只考虑当 $C_z^2 - 4mK_z < 0$ 的情形。由二阶常系数微分方程的求解方法可知, Lysmer 方程的通解表达式为:

$$z_1(t) = e^{-\beta t} (c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t) \quad (15)$$

式中, c_1 、 c_2 为待定常数,由初始条件确定, β 和 ω_0 的表达式为:

$$\beta = \frac{C_z}{2m}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{2m} \sqrt{4mK_z - C_z^2}$$

取:

$$A_1 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

$$\tan \varphi_1 = c_2 / c_1$$

则式(15)可表达为如下形式:

$$z_1(t) = A_1 e^{-\beta t} \sin(\omega_0 t + \varphi_1) \quad (16)$$

式(16)表示一种随时间衰减的阻尼振动,其中 A_1 表示振幅, φ_1 为初相位, β 为衰减系数, ω_0 为振动频率。

1.2.2 特解计算

将特解形式 $z_2(t) = c_3 \cos \omega t + c_4 \sin \omega t$ 代入 Lysmer 方程式(14),结合初始条件,得:

$$-(ma - K_z a - C_z b) \cos \omega t - (mb + C_z a - K_z b) \sin \omega t = P_0 \sin \omega t \quad (17)$$

对比可得到关于待定系数 c_3 和 c_4 的方程组:

$$\begin{cases} (K_z - m)c_3 + C_z c_4 = 0 \\ -C_z c_3 + (K_z - m)c_4 = P_0 \end{cases} \quad (18)$$

求解式(18)得:

$$\begin{cases} c_3 = -\frac{C_z P_0}{(m - K_z)^2 + C_z^2} \\ c_4 = \frac{(K_z - m)P_0}{(m - K_z)^2 + C_z^2} \end{cases} \quad (19)$$

取:

$$A_2 = \sqrt{c_3^2 + c_4^2}$$

$$\tan \varphi_2 = c_4 / c_3$$

则式(14)特解的表达形式为:

$$z_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \quad (20)$$

1.2.3 常数 c_1 和 c_2 的确定

据式(16)和(20), Lysmer 方程式的理论解表达式为:

$$z(t) = A_1 e^{-\beta t} \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \quad (21)$$

式(21)表明,在简谐周期力作用下,由 Lysmer 方程描述的基础竖向振动可以分成 $z_1(t)$ 和 $z_2(t)$ 两部分,其中 $z_1(t)$ 是一种随时间衰减的阻尼振动,振动频率 ω_0 与衰减系数 β 仅仅与地基土的弹性性质有关,而与外荷载无关; $z_2(t)$ 是由外荷载决定的胁迫振动。随着时间的增大, $z_1(t)$ 所起的作用逐渐减小,最终趋近于零。

式(21)中, A_1 、 φ_1 由待定常数 c_1 、 c_2 决定,结合初始条件,可得关于待定常数 c_1 和 c_2 的方程组:

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ -\beta c_1 + \omega_0 c_2 = -\omega c_4 \end{cases} \quad (22)$$

解方程组(22),得:

$$\begin{cases} c_1 = -c_3 \\ c_2 = -\frac{c_3 \beta + c_4 \omega}{\omega_0} \end{cases} \quad (23)$$

2 理论计算

2.1 模型算例

为了研究动力基础附加质量对 Lysmer 方程的影响,建立如下动力基础计算模型。模型采用横截面 $2.4 \text{ m} \times 2.4 \text{ m}$ 、埋置深度为 1 m 的实体基础,密度为 2000 kg/m^3 ;地基弹性模量为 45 MPa ,泊松比为 0.34 ,地基密度为 1650 kg/m^3 ,基础半径采用等效半径。据此可确定 Lysmer 方程中的计算参数:

$$r_0 = \sqrt{\frac{2.4 \times 2.4}{\pi}} = 1.35 \text{ m}$$

$$G = \frac{0.5 \times 45}{1 + 0.34} = 16.8 \text{ MPa}$$

$$m = 2.4 \times 2.4 \times 1 \times 2000 = 11520 \text{ kg}$$

$$C_z = \frac{3.4 \times 1.35^2}{1 - 0.34} \sqrt{2 \times 10^3 \times 16.8 \times 10^6} = 1.72 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$K_z = \frac{4 \times 16.8 \times 10^6 \times 1.35}{1 - 0.34} = 1.38 \times 10^8 \text{ Pa}$$

外部周期采用振幅 100 kN 、频率为 10 Hz 正弦周期力,振动持续时长为 600 ms 。

2.2 计算结果

将计算所得参数 m 、 C_z 和 K_z 代入式(21),即可计算出基础中心处的振动位移,计算结果如图2所示。图中有3条位移时程曲线,分别为基础自振位移 $z_1(t)$ 、胁振位移 $z_2(t)$ 和总位移 $z(t)$ 。由图可见, $z_1(t)$ 是一种随时间衰减的阻尼振动,在初始振动的 20 ms 内位移较大,呈迅速衰减趋势,约至 50 ms 后

渐趋于零。 $z_2(t)$ 振动频率由外荷载决定,呈现出非零相位的简谐周期振动特征,其值在 0 ms 处与 $z_1(t)$ 互为相反数。总体振动位移 $z(t)$ 在初始振动的 20 ms 内略呈非平稳性,约至 50 ms 后呈现出周期振动特征。

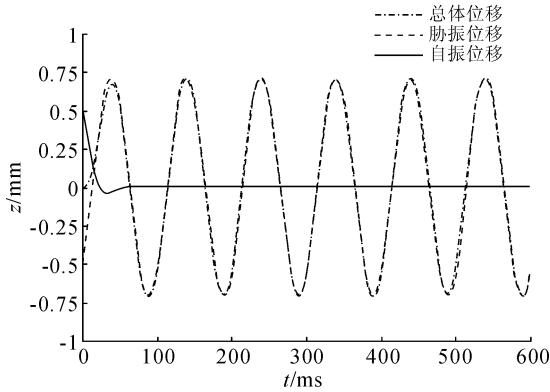


图2 动力基础振动的理论位移

Fig. 2 Theory displacement based on Lysmer equation

3 有限元计算

3.1 计算模型

为了便于与理论计算结果进行对比分析,对上述算例又采用了三维动力有限元数值计算。有限元方程采用如下形式:

$$[M]\{\ddot{\delta}_i\} + [C]\{\dot{\delta}_i\} + [K]\{\delta_i\} = \{F_i\} \quad (24)$$

式(24)中, $[M]$ 为质量矩阵, $[C]$ 为阻尼矩阵, $\{F_i\}$ 为单元载荷列阵, $\{\delta_i\}$ 为位移列阵。在实际计算中,位移为三维矢量,有三个自由度,位移值取基础中心处竖直方向位移 Z_s 。

有限元数值法与 Lysmer 理论法的主要差别在于对基础参数的处理上。在 Lysmer 理论法中,基础被作为质点考虑,只考虑质量即可。而在有限元数值法中,基础是有大小的,不能够再作为质点看待。有限元模型由基础和地基两部分组成,其中,基础全部埋置在地基土中,并忽略基础顶面到地面的距离(见图3)。基础尺寸与理论算例相同,弹性模量为 9 500 MPa,泊松比为 0.2,基础密度为 2 000 kg/m³;地基土模型采用横截面为 10 m × 10 m,高 40 m 的正四棱柱体,其他参数与理论计算模型相同。外部周期取振幅 100 kN、频率为 10 Hz 的正弦周期力,匀布荷载作用于基础顶面上。在实际计算中,利用模型的对称性,采用 1/4 模型进行计算。阻尼采用瑞利阻尼,参数选取采用文献[9]提出的方法。边界条件除模型顶面采用自由边界外,其它均采用透

射界条件(参见文献[11])。

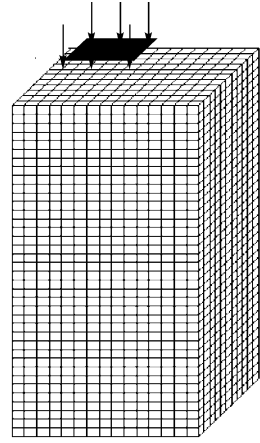


图3 动力基础有限元模型

Fig. 3 FEM Model for a dynamic foundation

3.2 计算结果对比分析

三维有限元数值计算结果如图4与图5所示。图4是约 10 ms 时刻的最大主应力等相位面图,直观地反映了基础振动产生地震波的传播方式。

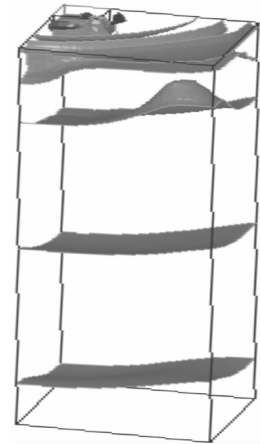


图4 10 ms 时最大主应力等相位图

Fig. 4 Equivalent phase surface of the first principal stress when $t = 10$ ms

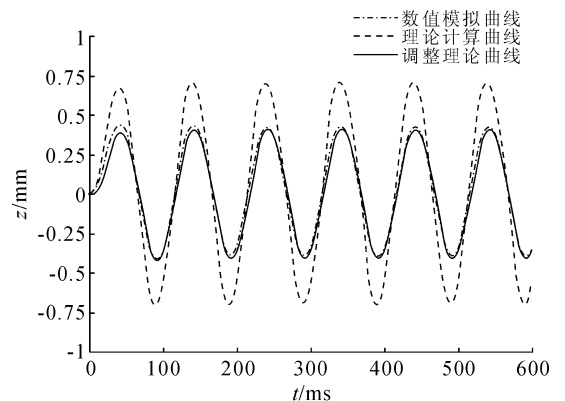


图5 基于 FEM 的动力基础振动位移

Fig. 5 Numerical displacement based on FEM

图5是基础中心点处的位移历时曲线(简称模拟位移曲线)。为了便于对比分析,同时将上一模型算例中由 Lysmer 方程解得的位移历时曲线(简称理论位移曲线)也表示在图5中。由图可见,有限元模拟位移曲线也呈现出类似周期振动的特征,除振幅略有差别外,两者之间的相位、频率非常接近,说明由两种不同方法计算得到的位移结果具有可比性。

为了确定两种位移振幅的差别及其相互关系,取600个时间点对,进行了位移交会图分析,位移交会图如图6所示。图中,横轴为模拟位移,用 z_s 表示,单位mm;纵轴为理论位移,用 z_t 表示,单位mm。由图可见,图像呈正比例函数关系,直线斜率约1.7,均方误差为:

$$\delta = \frac{\sum_{i=0}^{600} [1.7z_s(i\Delta t) - z_t(i\Delta t)]^2}{600} = 0.00172 \quad (25)$$

式中, Δt 为时间采样步长(ms)。由计算结果可知,均方误差很小,体现出两者良好的线性相关性。如果将原位移理论曲线振幅缩小为原来的10/17,则称其为调整理论曲线,则由图5可见,除初始时间段略有差别外,调整理论位移曲线与模拟位移曲线整体吻合很好,体现了两者之间具有良好的线性相关性。

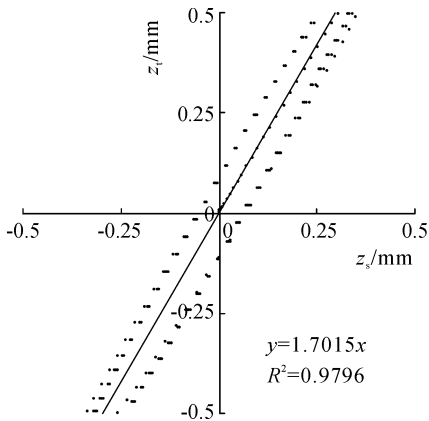
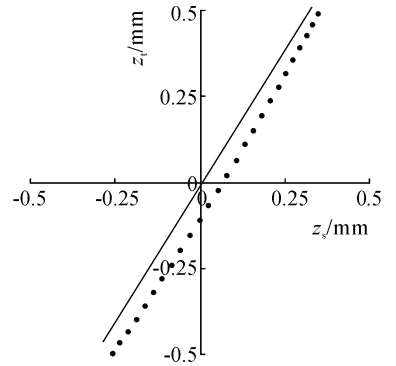


图6 理论位移与模拟位移交会图

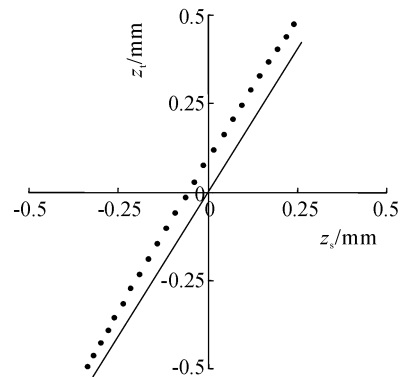
Fig.6 Cross-plot of two kinds of displacements

由图6还可看出,交会图上的点可分两组,一组在拟合线 $y = 1.7x$ 的上方,另一组在下方。每组样点近似呈线性排列,两组点构成的直线近似平行。研究发现,点集的这种分布特点与两种方法之间的计算误差有关。由图5可见,在位移的上升段,位移值单调增加,调整后的理论位移较模拟位移小;而在位移的下降段,位移值单调减小,调整后的理论

位移较模拟位移大。为了证实这一结论,本文选择了部分上升段和下降段部分样点,分别进行了交会图分析,计算结果如图7所示。图中, z_t 为调整后的理论位移, z_s 为数值模拟位移。交会图上也表现出如图5相似的特征,即表现为在位移的上升段,样点偏向拟合线的下方;而在位移的下降段,样点却偏向拟合线的上方。



(a) 上升段位移交会图



(b) 下降段位移交会图

图7 位移交会分解图

Fig.7 Disassemble cross-plot of displacements

4 结论

1) 理论计算表明,在简谐外荷载作用下,Lysmer方程的理论解由两类振动组成:随时间衰减的自由振动和呈周期变化的胁迫振动。其中,自由振动的频率和衰减系数完全取决于地基基础的特性,胁迫振动的频率则取决于外部荷载。

2) 通过Lysmer理论位移和三维动力有限元模拟位移的对比分析发现,两种位移历程曲线的总体形状、相位和频率非常接近,振幅之间存在明显的线性关系。

3) 应用有限元数值方法与理论计算法对比分析相同条件的动力机器基础模型,实践证明是一种有效可行的研究方法,不仅为验证动力基础Lysmer理论的适用性提供了一条新方法,而且对研究非均

匀介质条件下其他相关动力基础理论有重要的借鉴作用。

参考文献:

- [1] 王锡康. 动力机器基础振动学科在我国的发展及需研究的若干问题[J]. 工业建筑, 2007, 37(6): 83-90.
Wang Xikang. Development of discipline for vibration of machinery foundation in China and some problems being studied[J]. Industrial Construction, 2007, 37(6): 83-90.
- [2] 侯兴民, 马小燕, 吴汉生, 等. 动力机器基础振动与设计若干问题的讨论[J]. 地震工程与工程振动, 2008, 28(8): 131-137.
Hou Xingmin, Ma Xiaoyan, Wu Hansheng, et al. Some problems about vibration and design of dynamic machine foundation[J]. Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2008, 28(8): 131-137.
- [3] 谷音, 刘晶波. 大型动力机器-基础-桩土相互作用分析的集中参数模型[J]. 福建建筑, 2007, 113(8): 52-55.
Gu yin, Liu Jingbo. A lump-parameter model for the large dynamic machine foundation-soil system[J]. Fujian Architecture and Construction, 2007, 113(8): 52-55.
- [4] 刘晶波, 王振宇, 张克峰, 等. 考虑土-结构相互作用大型动力机器基础三维有限元分析[J]. 工程力学, 2002, 19(3): 34-38.
Liu Jingbo, Wang Zhenyu, Zhang Kefeng, et al. 3D finite element analysis of large dynamic machine foundation considering soil-structure interaction[J]. Engineering Mechanics, 2002, 19(3): 34-38.
- [5] 王宏伟, 陈啸, 刘斌, 等. 动力基础频变参数模型及设计[J]. 建筑科学与工程, 2008, 25(1): 55-59.
Wang Hongwei, Chen Xiao, Liu Bin, et al. Frequency variable parameters model and design of dynamic foundations[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2008, 25(1): 55-59.
- [6] 蒋东旗, 谢定义. 动力机器基础设计的数值方法研究[J]. 土木工程学报, 2002, 35(1): 74-78.
Jiang Dongqi, Xie Dingyi. Numerical simulation method for foundation design of dynamic machine[J]. China Civil Engineering Journal, 2002, 35(1): 74-78.
- [7] Chen Shishuenn, Shi Junyang. Simplified model for vertical vibrations of surface foundations[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2006, 132(5): 651-655.
- [8] Pradhan P K, Mandal A, Baidya D K, et al. Dynamic response of machine foundation on layered soil [J]. Geotechnical and Geological Engineering, 2008, 26(4): 453-468.
- [9] Li Ning. Wave Propagation Problems in the Jointed Rock Mass[M]. Xi'an: Press of Northwest University of Technology, 1993.
- [10] 谢定义. 土动力学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1988.
- [11] 廖振鹏. 工程波动理论导引[M]. 北京: 科学出版社, 1996.
- [12] 简政, 杨芳, 李爱国. 相邻机器基础动力相互作用研究[J]. 西安理工大学学报, 2006, 22(3): 265-268.
Jian Zheng, Yang Fang, Li Aiguo. Research on dynamic interaction between adjacent machine foundations [J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2006, 22(3): 265-268.

(责任编辑 王卫勋)