

文章编号: 1006-4710(2011)01-0107-05

# 带源项二维浅水方程正问题和反问题的求解

刘文涛<sup>1</sup>, 闵涛<sup>2</sup>, 郝竹林<sup>1</sup>, 冯民权<sup>1</sup>

(1. 西安理工大学 水利水电学院, 陕西 西安 710048; 2. 西安理工大学 理学院, 陕西 西安 710054)

**摘要:** 考虑到求解二维浅水方程的正问题及反问题的复杂性, 建立高分辨率的有限元格式对正问题进行模拟, 运用最佳摄动量法对反问题进行了研究, 通过对两类溃坝问题进行数值模拟及文献对比, 验证了有限元方法具有较高的离散精度同时又避免了数值解的伪震荡, 并运用最佳摄动量法对正问题算例进行糙率率定, 模拟结果较为理想。

**关键词:** 浅水方程; 有限元法; 最佳摄动量法; 糙率率定

**中图分类号:** TV139.2      **文献标志码:** A

## The Solution to Forward and Inverse Problems of 2-D Shallow Water Equation with Source Terms

LIU Wentao<sup>1</sup>, MIN Tao<sup>2</sup>, HAO Zhulin<sup>1</sup>, FENG Minquan<sup>1</sup>

(1. Faculty of Water Resources and Hydroelectric Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China;

2. Faculty of Science, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China)

**Abstract:** In considering the complexity of solved problems and inverse problems of the two-dimensional shallow water equations, a high-resolution finite element scheme is established to simulate the forward problem, and the optimal perturbation method is used to study the inverse problem. The finite element method with high discrete accuracy and pseudo-shock to avoid numerical solution is tested via the numerical simulation and literature contrast of dam-break problems of two types; and the optimal perturbation method is used to calibrate the roughness of the algorithm cases of the forward problem. Accordingly, the simulated results are realistic.

**Key words:** shallow water equation; finite element method; optimal perturbation method; roughness identification

浅水方程属于非线性双曲型方程, 不管初始值如何光滑, 其解都可能产生间断<sup>[1]</sup>。浅水方程正问题关注的是对自然现象的预测, 反问题则是关注于对自然现象的控制<sup>[2-3]</sup>。目前国内外学者提出和研究了一系列算法并将其应用于对实际问题的模拟中。对浅水方程正问题数值模拟大多使用有限差分法(Finite Difference Method, FDM)及有限体积法(Finite Volume Method, FVM)来计算, 但是有限差分法在处理复杂几何形状问题方面存在困难, 对于不同类型方程式必须采用不同的差分格式才能达到稳定收敛要求。有限体积法常需要利用迎风格式(Upwinding)或是纽曼解(Riemann Solver)来配合计算, 较为繁复。采用有限元伽辽金法(Galerkin Meth-

od)来计算流体时, 其速度和压力需要以不同阶数的形函数(shape function)来插值, 使得在形函数上的速度必须比压力降一阶以满足LBB(Ladyzhenskaya-Babuslaa-Brezzi)条件, 计算规模稍微一大便难以求解<sup>[4-7]</sup>。相比之下, 有限元法提供了一个即简单又统一的数值计算模式, 可以有效解出很多类型的偏微分方程, 可直接求解代表守恒定律的一阶偏微分方程, 且能在较短的时间内求解, 计算过程也较为容易。

本文采用有限元法对带源项的二维浅水方程进行求解, 并对两类溃坝决堤问题进行数值模拟。

近年来, 工程水力学反问题以其高性能、高效率、高通用性正越来越受到国内外学者的关注。目前国内外研究成果零散且不成体系, 目前一些较好

收稿日期: 2010-11-29

基金项目: 陕西省教育厅基金资助项目(08JK388)。

作者简介: 刘文涛(1984-), 男, 陕西宝鸡人, 硕士生。E-mail: baojicarol@163.com。

闵涛(1963-), 男, 陕西西安人, 博士, 教授, 研究方向为水环境反问题。E-mail: mintao@xaut.edu.cn。

的算法,如脉冲谱技术、蒙特卡罗法及逆散射反演法等广泛应用于反问题的求解中<sup>[8-9]</sup>。国内外学者在参数反演方面的研究已有了一定成果,但还不完善,具体到浅水方程参数识别反问题方面的研究还为数不多且不成熟,有待进一步深入研究。本文应用基于正则化方法的最佳摄动量法对一维浅水方程参数反问题进行了研究,并得出了行之有效的数值解法。

## 1 正问题求解

### 1.1 控制方程

二维浅水流动的控制方程<sup>[10]</sup>由式(1)给出:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma} = \mathbf{F} \quad (1)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} z \\ zu \\ zv \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} zu & zv \\ (zu^2 - E \frac{dzu}{dx}) & (zuv - E \frac{dzu}{dy}) \\ (zuv - E \frac{dzv}{dx}) & (zv^2 - E \frac{dzv}{dy}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ -gz \frac{dz}{dx} - gz \frac{dz_f}{dx} + fzv - Tu \\ -gz \frac{dz}{dy} - gz \frac{dz_f}{dy} + fzu - Tv \end{bmatrix}$$

式中,  $z$  为水深,  $u, v$  分别为  $x$  方向和  $y$  方向的流速,  $g$  为重力常数,  $E$  为弥散系数,  $T$  为阻力系数,  $f$  为柯式力系数,  $z_f$  为底床高程,  $z$  与  $z_f$  关系如图 1 所示。

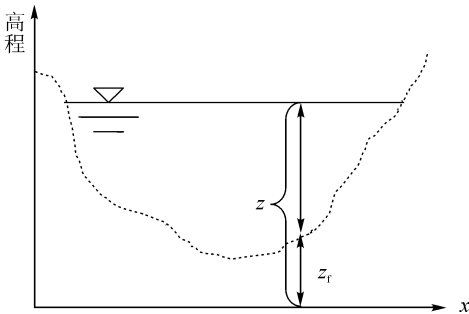


图 1 河床断面示意图

Fig.1 The diagram of bed cross-section

由曼宁公式可得:

$$T = g((zu)^2 + (zv)^2)^{1/2} / (zC_h^2)$$

其中谢才系数  $C_h = z^{1/6}/n$ ,  $n$  为曼宁系数。

### 1.2 数值解法

采用有限元法对式(1)进行数值求解,  $\mathbf{U}$  为定义在区域  $\Omega$  和时间区域  $J = [0, T]$  上的向量。为了

将区域  $\Omega$  离散化,先设  $\Lambda_h$  为近似一致逼近的三角剖分,且每个三角单元  $\max_{\tau \in \Lambda_h} \text{diam} \tau \leq h$ 。定义  $S_h$  为在  $\Omega$  上的连续函数组成的有限维空间映射到  $\Lambda_h$  中的每个三角区域的线性函数。这个半离散问题相当于映射  $\mathbf{U}: J \rightarrow S_h$ , 即:

$$\left( \frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial t}, v \right) - (\nabla \mathbf{\Gamma}, v) = (\mathbf{F}, v), \forall v \in S_h, t \in J \quad (2)$$

通过分部积分,得:

$$\left( \frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial t}, v \right) - (\mathbf{\Gamma}_h, \nabla v) = (\mathbf{F}, v), \forall v \in S_h, t \in J \quad (3)$$

其中  $(\cdot, \cdot)$  为定义在  $L^2(\Omega)$  的内积。初始条件  $\mathbf{U}_h(0) = \mathbf{f}_h$ ,  $\mathbf{f}_h$  为  $\mathbf{f}$  在  $S_h$  的近似值。

方程(3)的解可表示为:

$$\mathbf{U}(t, x, y) = \sum_{j=1}^{N_h} \mathbf{U}_j(t) \mathbf{\Phi}_j(x, y) \quad (4)$$

其中  $\{\mathbf{\Phi}_j(x, y)\}_{j=1}^{N_h}$  为标准基, 方程(4)可以改写为非线性常微分方程<sup>[4]</sup>:

$$\sum_{j=1}^{N_h} \mathbf{U}'_j(t) (\mathbf{\Phi}_j, \mathbf{\Phi}_k) - \sum_{j=1}^{N_h} \mathbf{U}_j(t) (\mathbf{\Gamma}, \nabla \mathbf{\Phi}_k) = (\mathbf{F}, \mathbf{\Phi}_k) \quad k = 1, 2, \dots, N_h \quad (5)$$

设  $\mathbf{U} = (U_1(t), U_2(t), \dots, U_{N_h}(t))$ , 引入质量矩阵  $\mathbf{A}$ 、刚度矩阵  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{A}_{k,j} = (\mathbf{\Phi}_j, \mathbf{\Phi}_k)$$

$$\mathbf{B}_{k,j} = (\mathbf{\Gamma}, \nabla \mathbf{\Phi}_k)$$

$$\mathbf{C}_{k,j} = (\mathbf{F}, \mathbf{\Phi}_k)$$

则方程(5)可以写成矩阵形式:

$$\mathbf{A}\mathbf{U}' - \mathbf{B}\mathbf{U} = \mathbf{C}, t \in [0, T], \mathbf{a}(0) = \boldsymbol{\gamma} \quad (6)$$

其中  $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{N_h})$ ,  $\mathbf{f}_h = \sum_{l=1}^{N_h} \gamma_l \mathbf{\Phi}_l$ 。

$$\mathbf{L} = \mathbf{A}\mathbf{U}' - \mathbf{B}\mathbf{U} - \mathbf{C} = 0, t \in [0, T] \quad (7)$$

用牛顿迭代法求解非线性方程(7)就可以计算出在任意时刻区域内任一点的函数值。

## 2 反问题求解

### 2.1 二维浅水方程参数反问题模型

正问题控制方程(1)同样作为二维浅水方程参数反问题的数学模型,谢才系数  $C_h(x)$  为方程中唯一存在的参数,且由经验公式曼宁方程式表达:  $C_h(x) = z^{1/6}/n$ , 其中  $n$  为曼宁系数,也称糙率。当  $C_h(x)$  已知,对  $z(x, t)$ 、 $zv(x, t)$ 、 $zu(x, t)$  求解构成二维浅水方程正问题。需要求解参数  $C_h(x)$  时,构成二维浅水方程反问题。求解反问题需要一个附加条

件(8)：

$$\begin{cases} z(x,y,T) = a(x,y) \\ zv(x,y,T) = b(x,y) \\ zu(x,y,T) = c(x,y) \end{cases} \quad (8)$$

其中  $a(x,y)$ 、 $b(x,y)$ 、 $c(x,y)$  为已知函数,可以通过测量获得。

### 2.2 二维浅水方程参数反问题的最佳扰动量法

定义  $\varphi(x,y) = [a(x,y), b(x,y), c(x,y)]^T$ ,  $\mathbf{h}(x,y) = [z(x,y,t), zv(x,y,t), zu(x,y,t)]^T$ , 得到二维浅水方程反问题附加条件(8)后,假设  $C_h$  的精确解为  $C_h^*$ , 相应于式(1)的解为  $\mathbf{h}^*(x,y,t)$ 。设  $K$  为一线性完备的实函数空间,其中  $C_h^*(x) \in K$ ,  $K$  上的一个基函数组为  $\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y), \dots$ , 则：

$$C_h^*(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i^* \varphi_i(x,y) \quad (9)$$

取有限项进行逼近,得：

$$C_h^*(x,y) \approx \sum_{i=1}^n k_i^* \varphi_i(x,y) \quad (10)$$

式中  $n$  的大小取决于逼近精度的要求。

因此,这类反问题的求解就是要确定一个  $n$  维实向量：

$$\boldsymbol{\kappa}^T = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbf{R}^n \quad (11)$$

使得函数：

$$C_h(x,y) = \sum_{i=1}^n k_i \varphi_i(x,y) = \boldsymbol{\kappa}^T \boldsymbol{\Phi}(x,y) \quad (12)$$

其中  $\boldsymbol{\Phi}(x,y) = (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y), \dots, \varphi_n(x,y))^T$  同时满足式(1)和式(8)。

把  $C_h(x,y)$  对应于式(1) 记为：

$$\mathbf{h}(C_h(x,y); x,y,t)$$

$$C_{h_0}(x,y) = \sum_{i=1}^n k_i^0 \varphi_i(x,y) = \boldsymbol{\kappa}_0^T \boldsymbol{\Phi}(x,y)$$
 为

$C_h^*(x,y)$  附近的一个函数,即对  $C_h^*(x,y)$  的初始猜测。对  $C_{h_0}(x,y)$  增加一个微小的扰动量：

$$\delta C_{h_0}(x,y) = \sum_{i=1}^n \delta k_i^0 \varphi_i(x,y) = \delta \boldsymbol{\kappa}_0^T \boldsymbol{\Phi}(x,y)$$

对应于  $C_{h_0}(x,y) + \delta C_{h_0}(x,y)$ , 式(1) 记为  $\mathbf{h}(C_{h_0}(x,y) + \delta C_{h_0}(x,y); x,y,t)$ 。所以, 确定  $C_h(x,y)$  可以转化为确定  $\delta \boldsymbol{\kappa}_0$  的问题,  $\delta \boldsymbol{\kappa}_0$  可由下列目标函数的局部最小值来确定：

$$\mathbf{F}[\delta \boldsymbol{\kappa}_0] = \|\mathbf{h}(C_{h_0}(x,y) + \delta C_{h_0}(x,y); x,y,t) - \boldsymbol{\varphi}(x,y)\|_{[\alpha,\beta]}^2 + \alpha S(\delta \boldsymbol{\kappa}_0)$$

其中  $\alpha$  为正则化参数,  $S(\delta \boldsymbol{\kappa}_0)$  为  $\delta \boldsymbol{\kappa}_0$  的稳定性函数。

为了识别未知函数  $C_h$ , 常通过对  $\mathbf{h}(x,y,t)$  的某种观测, 把它转化为一个优化问题。记解为：

$$\mathbf{h}(C_h; x^*, y^*, t)$$

则反问题便可归为如下优化问题。

目标函数为：

$$\min \|\mathbf{h}(x^*, y^*, t) - \mathbf{h}(C_h; x^*, y^*, t)\|^2$$

基本迭代过程为：① 应用有限元方法求解初边值问题的数值解  $\mathbf{h}(C_{h_0}; x^*, y^*, t)$  及  $\mathbf{h}(C_{h_0}(t) + \delta C_{h_0}(t); x^*, y^*, t)$ ；② 求解方程组, 并求得扰动量  $\delta C_{h_0}(t)$ , 取新的初始猜测值为  $C_{h_1}(t) = C_{h_0}(t) + \delta C_{h_0}(t)$ 。重复上述过程, 到指定迭代次数  $L$  为止。

由经验公式谢才方程表达式  $C_h = z^{1/6}/n$ , 结合正问题求得的值  $z$  与反问题求得的  $C_h$  对糙率可以进行率定： $n = z^{1/6}/C_h$ 。

## 3 算例模拟

### 3.1 瞬间溃坝问题

考虑一个瞬间溃坝问题, 计算区域为  $100 \text{ m} \times 50 \text{ m}$  的矩形区域, 坝体位于横向  $50 \text{ m}$  处。河床轮廓设为：

$$z_f = (0) \times (x < 52) + (\sin(x) \times \cos(y)/10) \times (x \geq 52)$$

初始时刻上下游水深分别是  $10 \text{ m}$  和  $3 \text{ m}$ 。建立几何模型, 将其剖分成  $504$  个不规则三角形, 如图 2 所示。溃坝后  $5.4 \text{ s}$  时的水位等势线、速度场和自由水面水位图分别如图 3 ~ 5 所示。

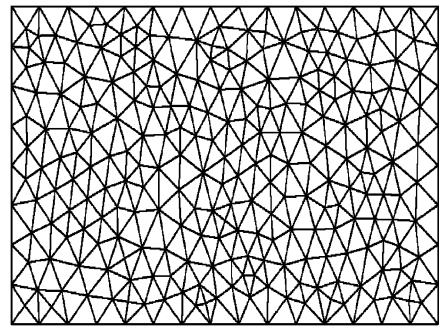


图 2 溃坝几何模型网格剖分图

Fig. 2 The grid map of break-dam geometric model

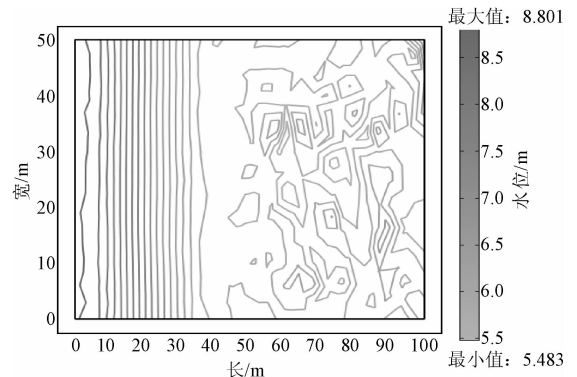


图 3 溃坝  $5.4 \text{ s}$  时的水位等势线

Fig. 3 Water level equipotential line at  $t = 5.4 \text{ s}$

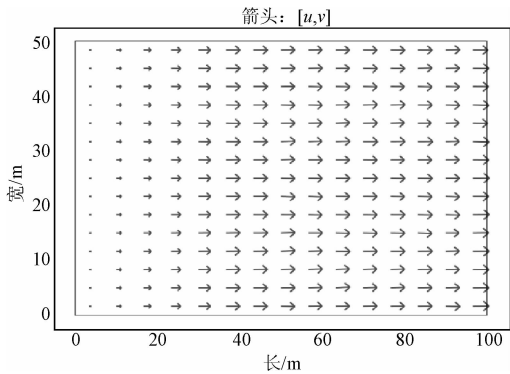


图4 溃坝 5.4 s 时的流速场图  
Fig. 4 Velocity field at  $t = 5.4$  s

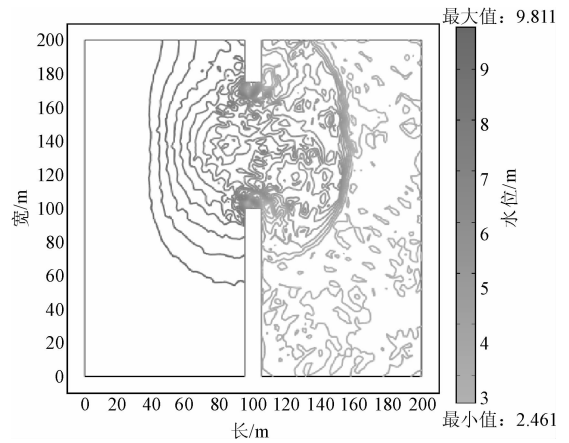


图7 溃坝 6 s 时的水位等势线  
Fig. 7 Water level equipotential line at  $t = 6$  s

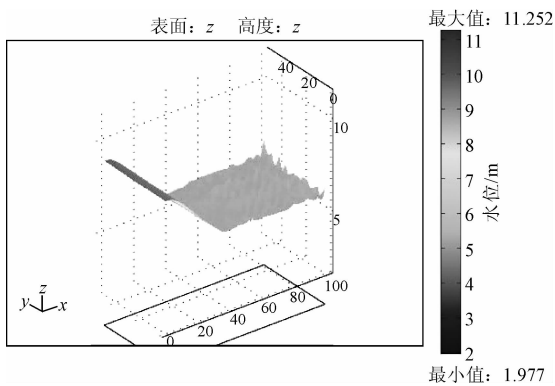


图5 溃坝 5.4 s 时自由水面的水位图  
Fig. 5 Water level chart at  $t = 5.4$  s

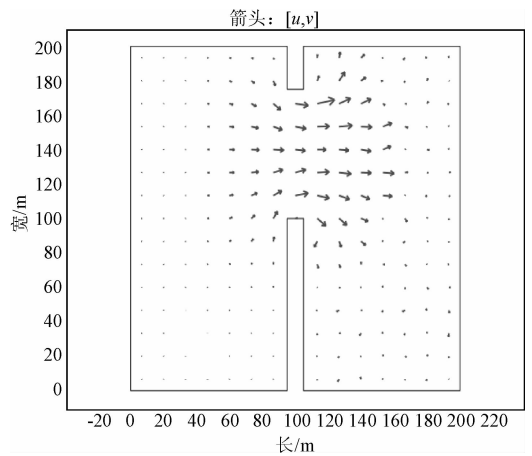


图8 溃坝 6 s 时的流速场  
Fig. 8 Velocity field at  $t = 6$  s

### 3.2 瞬间半溃溃坝问题

考虑一个部分溃坝问题。

计算区域为  $200\text{ m} \times 200\text{ m}$  的矩形区域, 坝厚  $10\text{ m}$ , 溃口宽  $75\text{ m}$ , 溃口距右岸  $95\text{ m}$ , 距左岸  $30\text{ m}$ 。初始时刻上下游水深分别是  $10\text{ m}$  和  $3\text{ m}$ 。

建立几何模型, 将其剖分成  $952$  个不规则三角形, 如图 6 所示。

溃坝  $6\text{ s}$  时的水位等势线、速度场和自由水面水位图分别如图 7~9 所示。

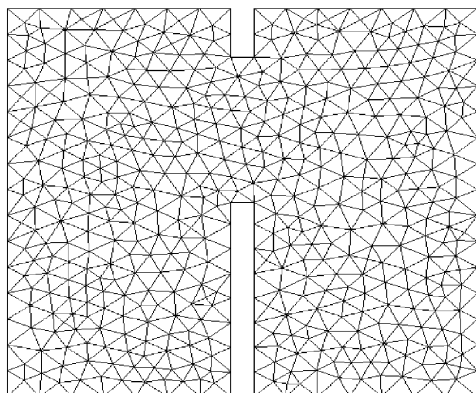


图6 部分溃坝几何模型网格剖分图  
Fig. 6 The grid map of partial break-dam geometric model

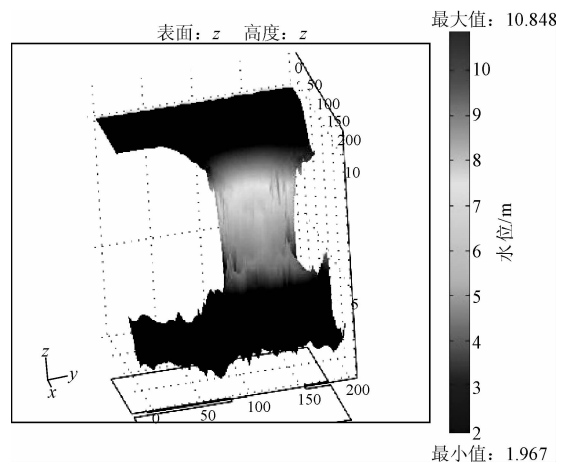


图9 溃坝 6 s 时的自由水面水位图  
Fig. 9 Water level chart at  $t = 6$  s

### 3.3 糙率反演算例

考虑以下模型, 利用上述反问题算法和已知条件可以率定糙率  $n$ 。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dz}{dt} + \nabla(zu, zv) &= 0 \\ \frac{d(zu)}{dt} + \nabla(zu^2, zuv) - E \nabla(zu_x, zu_y) &= \\ fzv - gzz_x + gz \frac{dz_f}{dx} - Tu \\ \frac{d(zv)}{dt} + \nabla(zuv, zv^2) - E \nabla(zv_x, zv_y) &= \\ fzu - gzz_y + gz \frac{dz_f}{dy} - Tv \end{aligned} \right.$$

边界条件为:

$$z(0, t) = 0, zv(0, t) = 0, zu(0, t) = 0$$

初始条件为:

$$z(x, 0) = \begin{cases} 10 & x < 50 \text{ m} \\ 3 & x \geq 50 \text{ m} \end{cases}$$

附加条件为:

$$h(x_i, 0.5) (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$x_i = ih; h = 1/n; n = 10$$

假定正问题模拟中用到的糙率值为真值,对糙率率定进行比较,结果见表1。

表1 糙率率定结果

Tab.1 The result of roughness identification

| 糙率 $n$ 真值 | 迭代次数 | 糙率反演值   | 绝对误差    |
|-----------|------|---------|---------|
|           | 100  | 0.027 7 | 0.002 7 |
| 0.025     | 150  | 0.027 4 | 0.002 4 |
|           | 200  | 0.026 8 | 0.001 8 |

## 4 结 论

由于模型是非线性的,目前无法获得算例3.1和算例3.2的解析解。由图2~9可以看出,对于全溃和半溃的溃坝问题模拟过程,本文方法较好地避免了数值解的伪震荡,具有较高的稳定性。应用本文方法计算的结果与采用高分辨率差分法<sup>[11]</sup>或有限体积法<sup>[12]</sup>计算的结果吻合较好,尽管它们离散方式不同。通过与文献[11]同类问题的模拟结果对比可知,本文采用的方法具有较高的精度。通过对糙率反演算例的模拟,由表1可看出,反演值与真值间绝对误差较为理想,表明了该算法在解决二维浅水方程反问题时的有效性,同时也为解决此类反问题提供了一个可行方法。

## 参考文献:

[1] Bradford S F, Katopodes N D. Finite volume model for

nonlevel basin irrigation [J]. *Irrig Drain*, 2001, 127(4): 216-223.

[2] Gottardi G, Venutelli M. Central schemes for two-dimensional dam-break flow simulation [J]. *Advances in Water Resources*, 2004, 27: 259-268.

[3] Liang Lin, Ni Jinren, Borthwick A G L, et al. Simulation of dam-break processes in the Yellow River [J]. *Science in China (Series E)*, 2002, 45(6): 606-619.

[4] Zienkiewicz O C, Taylor R L 著. 有限元方法(流体动力学) [M]. 符松, 刘扬扬, 译. 北京: 清华大学出版社, 2008.

[5] 何杰, 徐志扬, 辛文杰. 浅水方程 Roe 型格式的平衡性 [J]. *河海大学学报: 自然科学版*, 2009, 37(4): 450-456.

He Jie, Xu Zhiyang, Xin Wenjie. Balance of shallow water equations by use of Roe scheme [J]. *Journal of Hohai University (Natural Sciences)*, 2009, 37(4): 450-456.

[6] 韩涛, 逢勇, 翟金波, 等. 浅水方程的间断有限元解法 [J]. *中国农村水利水电*, 2007, 9(23): 23-29.

Han Tao, Pang Yong, Zhai Jinbo, et al. DG FEM for shallow water equations [J]. *China Rural Water and Hydropower*, 2007, 9(23): 23-29.

[7] 汪晓东, 朱庆勇. 求解带源项双曲守恒律方程的 IGVC 格式 [J]. *中山大学学报: 自然科学版*, 2008, 47(2): 131-135.

Wang Xiaodong, Zhu Qingyong. IGVC scheme for hyperbolic conservation laws with source terms [J]. *ACTA Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 2008, 47(2): 131-135.

[8] 刘晓东, 姚琪, 薛红琴, 等. 环境水力学反问题研究进展 [J]. *水科学进展*, 2009, 20(6): 885-893.

Liu Xiaodong, Yao Qi, Xue Hongqin, et al. Advance in inverse problems of environmental hydraulics [J]. *Advances In Water Science*, 2009, 20(6): 885-893.

[9] 苏超伟. 偏微分方程逆问题的数值解法及其应用 [M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1995.

[10] Dong Liyun, Lu W Z, Leung A Y T. Finite Volume Method on Simulating 1D Shallow-Water Flow over Uneven Bottom; *Computational Mechanics Wccm VI in Conjunction with APCOM'04* [C]. Beijing: 2004.

[11] Fennema R J, Chaudhry M H. Explicit methods for 2D transient free-surface flows [J]. *JHE*, 1990, 116(8): 1013-1034.

[12] Randall J, Le Veque. Finite volume methods for hyperbolic problem [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002: 100-232.

(责任编辑 王卫勋)