

文章编号: 1006-4710(2011)01-0092-05

# H 桥逆变器的离散建模及混沌现象的仿真研究

孙媛, 李敏远

(西安理工大学 自动化与信息工程学院, 陕西 西安 710048)

**摘要:** 以 SPWM-H 桥逆变器为研究对象, 采用离散映射方法建立该逆变器离散映射模型, 研究电路参数与发生混沌现象的关系, 直观地展示了逆变器分岔和混沌现象的动态演化过程。仿真研究结果表明该电路中混沌现象确实存在, 并且给出了避免系统进入混沌状态的电路稳定运行参数域。

**关键词:** H 桥逆变器; 离散模型; 分岔; 混沌

**中图分类号:** TM461      **文献标志码:** A

## Simulation Research on the Discrete Model and Chaos in H-Bridge Inverter

SUN Yuan, LI Minyuan

(Faculty of Automation and Information Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

**Abstract:** With SPWM-H bridge inverter as the research objective, the discrete reflection method is adopted to establish the discrete reflection model for this inverter in this paper. The relationship between the electric circuit parameters and chaos occurrence is studied, whereby the dynamic evolution process of inverter bifurcation and chaos phenomena can be directly exhibited. The results from the simulation study indicate there exists the chaos in electric circuit and suggests the parameter range for electric circuit stable operation so as to avoid the system entering into chaos state.

**Key words:** H-bridge converter; discrete model; bifurcation; chaos

电力电子电路是一个强的非线性时变系统, 当中存在着丰富的非线性现象。对于 DC/DC 变换器中的非线性行为的研究, 自上世纪 90 年代起已经在国际上展开。人们发现了不同类型的 DC/DC 变换器中所出现的分岔和混沌现象<sup>[1-2]</sup>, 并形成了一套较为有效的研究方法<sup>[3-13]</sup>。但这些成果大部分都局限于单开关拓扑电路, 对多开关 H 桥逆变器中非线性行为的研究却较少涉及。近年来 Robert 等人首次介绍了采用比例控制的 H 桥逆变器电路中出现的分岔和混沌现象, 他们选择参考电流  $i_{ref}$  为直流, 主要研究了混沌控制中关于不稳定周期轨道的稳定控制问题。2009 年王学梅、张波等也对该逆变器随参考电流  $i_{ref}$  变化时产生的边界碰撞分岔和混沌演化过程进行了探索<sup>[14]</sup>。

本研究选择正弦参考电流进一步研究 SPWM-H 桥的动态特性随控制系统参数(比例系数  $k$ 、开关周

期  $T_s$ ) 改变的具体过程。首先根据 H 桥逆变器运行过程和工作状态, 选用离散映射法建立其离散数学模型, 在此基础上分析电路参数对系统运行稳定性的影响, 并通过仿真来展示当系统参数超出稳定运行域后系统逐渐分岔并走向混沌的演化过程。

## 1 SPWM-H 桥的数学建模及仿真

H 桥逆变器作为一个分段线性系统有两种工作模态。在选择建模方法时平均法虽然被广泛应用但只能捕捉系统的长期动态, 无法描述开关变换器单个周期内的开关动态, 因此无法满足研究需要。离散模型补充了这点不足, 通过采用时间离散映射的方法将变换器状态从上一个采样时刻映射到相邻的下一个采样时刻, 由此来建立模型。

本文主要研究 SPWM-H 桥的一阶离散映射, 其电路如图 1 所示。

收稿日期: 2010-11-02

作者简介: 孙媛(1985-), 女, 陕西薄城人, 硕士生, 研究方向为检测技术与自动化装置。E-mail: sunyuan\_tz@163.com。

李敏远(1957-)男, 陕西西安人, 教授, 研究方向为现代电源技术与智能测控系统。

E-mail: liminyuan@xaut.edu.cn。

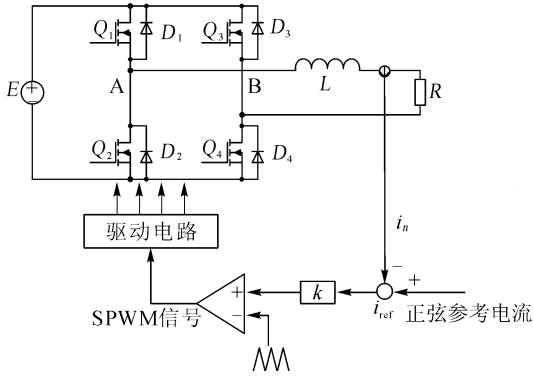


图 1 正弦 SPWM-H 桥电路  
Fig.1 SPWM-H-bridge inverter

其中主电路由电压源  $E$ , 开关管  $Q_1 \sim Q_4$  (带四个反并联二极管), 以及阻感性负载  $R, L$  组成。其中  $i$  为电感电流,  $u$  为负载电压,  $i_{ref}$  为电流反馈控制给定的参考电流,  $k$  是逆变器比例反馈系数。该逆变器存在两种工作模式, 模式 1 为  $Q_1, Q_4$  导通,  $Q_2, Q_3$  截止, 电流指数上升。模式 2 为  $Q_2, Q_3$  导通,  $Q_1, Q_4$  截止, 电流方向改变且指数下降。

根据离散建模思路可以得到系统在任一模式运动的状态方程形式为:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i e(t), t_{i-1} \leq t < t_i (i = 1, 2) \quad (1)$$

其中,  $x(t)$  为状态变量,  $A_i, B_i$  为系统不同模式时的系数,  $e(t)$  为系统输入电压,  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$  表示每个模式的运行时间。求解每个模式的微分方程, 得到:

$$x(t) = f_i(x(t_{i-1}), t) = e^{A_i(t-t_{i-1})} (x(t_{i-1}) + \int_{t_0}^t e^{A_i(t_i-\tau)} B_i E d\tau) \quad (2)$$

要得到离散映射模型, 需要每个周期对状态变量采样一次得到序列  $\{x_{n+1}\}$ , 考虑本系统存在两种工作模式, 即得到从上一周期到下一周期之间的关系表达式为:

$$x_{n+1} = f_2(f_1(x_n, \Delta t_1), \Delta t_2) \quad (3)$$

其中,  $\Delta t_1 = d_n T_s, \Delta t_2 = (1 - d_n) T_s, T_s$  为开关周期。开关周期占空比由下式确定为:

$$f(d_n) = D - k(i_n - i_{ref}) \quad (4)$$

式(4)中, 当  $f(d_n) \leq 0$  时,  $d_n = 0$ ; 当  $f(d_n) \geq 1$  时,  $d_n = 1$ ; 当  $0 < f(d_n) < 1$  时,  $d_n = f(d_n)$ 。  $D$  是稳态工作时开关占空比,  $d_n$  是第  $n$  个开关周期占空比。

对于一阶 H 桥逆变器, 状态方程系数为:  $A_1 = -\frac{R}{L}, B_1 = \frac{1}{L}, A_2 = -\frac{R}{L}, B_2 = -\frac{1}{L}, e(t) = E$ , 将其带入式(2)、(3), 即可求解得到本系统的离散映射模

型为:

$$x_{n+1} = e^{A_2 \Delta t_2} \left\{ e^{A_1 \Delta t_1} \left[ x(t_n) + \int_{t_n}^{t_n + \Delta t_1} e^{A_1(t_n - \tau)} B_1 E d\tau \right] + \int_{t_n + \Delta t_1}^{t_{n+1}} e^{A_2(t_n + \Delta t_1 - \tau)} B_2 E d\tau \right\} = \left( x(t_n) - \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{T_s R}{L}} + 2 \frac{E}{R} e^{-(d_n - 1) \frac{T_s R}{L}} - \frac{E}{R} \quad (5)$$

结合控制方程最终得到离散数学模型为:

$$i_{n+1} = \begin{cases} \left( i_n - \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{T_s R}{L}} + 2 \frac{E}{R} e^{-\frac{T_s R}{L}} - \frac{E}{R} & (d_n < 0) \\ \left( i_n - \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{T_s R}{L}} + \frac{E}{R} & (d_n > 1) \\ \left( i_n - \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{T_s R}{L}} + 2 \frac{E}{R} e^{-(D-1-K(i_n-i_{ref})) \frac{T_s R}{L}} - \frac{E}{R} & (\text{其它}) \end{cases} \quad (6)$$

根据上面数学模型, 在 Simulink 仿真环境下建立仿真模型(见图 2)。选择电路参数为:  $E = 400 \text{ V}, R = 20 \Omega, L = 20 \text{ mH}, D = 0.5, i_{ref} = 10 \sin 100 \pi t, T_s = 100 \mu\text{s}, k = 0.4$ 。仿真结果如图 3 所示。

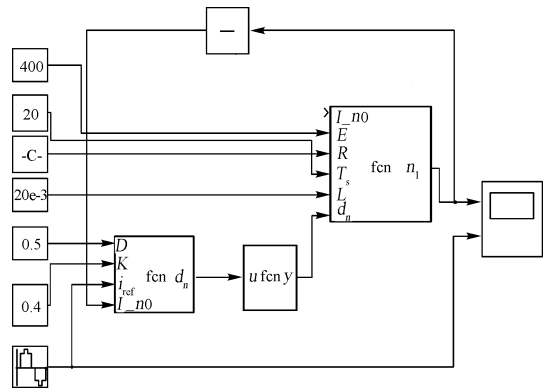


图 2 Simulink 仿真模型  
Fig.2 Simulink simulation model

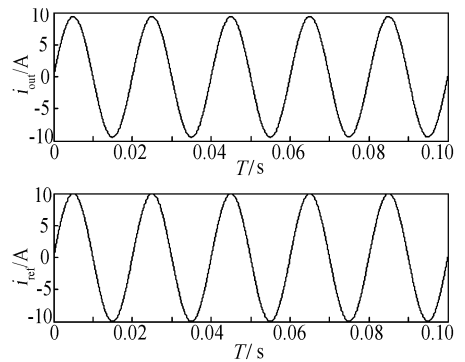


图 3 数学模型的仿真波形  
Fig.3 Simulation result of model diagram

对比参考电流知, 该数学模型合理正确的反映了系统的运行状态, 对于 SPWM-H 桥电路中混沌现

象的分析可以在该数学模型的基础上进行。

## 2 稳定性分析

当系统主电路参数确定后,系统的稳定性直接取决于控制系统的设计。为此本文将就比例反馈系数  $k$  以及开关周期  $T_s$  对单相逆变器运行稳定性的影响进行分析。

首先,确定离散映射  $i_{n+1} = f(i_n, u)$  在  $u$  取相应值时的不动点  $i^*$ , 有函数关系如下:

$$i^* = f(i^*, u) \quad (7)$$

其次,确定系统稳定性的一种通常方法是对系统解的扰动量做泰勒级数展开,即对稳定点  $i^*$  来说,考虑  $\Delta i_{n+1}$  在稳定点展开泰勒级数为:

$$\Delta i_{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left. \frac{\partial^k f(i, u)}{\partial i^k} \right|_{i=i^*} (\Delta i_n)^k \quad (8)$$

其中  $\Delta i_{n+1} = i_n - i^*$ 。当系统扰动  $\Delta i_n$  很小时,(8)式中的高阶项可以忽略,所以系统的稳定性可近似由(8)式中的第一项来表示。即可得到其稳定性判据为:

$$|\lambda| = \left| \frac{\partial i_{n+1}}{\partial i_n} \right| = \left| \frac{\partial f(i_n, u)}{\partial i_n} \right|_{i=i^*} \leq 1 \quad (9)$$

参数  $u$  不断变化时  $\lambda$  的值也会随之改变。 $|\lambda| = 1$  时为系统的稳定边界,特别的当  $\lambda = -1$  时,系统将发生倍周期分岔。本文将通过考察  $\lambda = -1$  处的参数  $u$  来定位系统由周期1到周期2的分岔点。而考虑  $d_n \leq 0, d_n \geq 1$  时,均有  $\lambda < 1$ ,所以要确定系统进行第一次分岔的位置只需要考虑  $0 < d_n < 1$  的情况即可。

按式(7)、(9)分析计算,可分别得出  $T_s = 100 \mu\text{s}$  和  $k = 0.45$  情况下的数据,如表1所示。

表1 当  $T_s = 100 \mu\text{s}$  时的特征乘子及工作状态

Tab.1 The calculated results of characteristic multipliers when  $T_s = 100 \mu\text{s}$

$k$	$i^*/\text{A}$	$\lambda$	工作状态
0.48	1.462 7	-0.930 5	周期1
0.49	1.464 7	-0.968 7	周期1
0.50	1.465 5	-1.007 6	周期2
0.51	1.467 0	-1.045 1	周期2
0.52	1.470 2	-1.083 5	周期2

当  $k, T_s$  较小时,特征值  $\lambda$  的模比较小,系统工作在稳定的周期1。随着参数的增大,  $\lambda$  的值逐渐接近  $-1$ 。可以看出,表1中当  $k = 0.5$  时,  $\lambda = -1.007 6$ ; 表2中当  $T_s = 110.7 \mu\text{s}$  时,  $\lambda = -1$ , 此时系统均发生了由周期1到周期2的倍周期分岔,据此就可以

定位系统的分岔点,指导控制系统的系数设计,观察它的分岔及混沌现象。

表2 当  $k = 0.45$  时的特征乘子及工作状态

Tab.2 The calculated results of characteristic multipliers when  $k = 0.45$

$T_s/\mu\text{s}$	$i^*/\text{A}$	$\lambda$	工作状态
100	1.455 9	-0.815 7	周期1
110	1.453 25	-0.988 9	周期1
110.7	1.453 57	-1.000 0	周期2
111	1.451 6	-1.007 7	周期2
112	1.452 72	-1.023 0	周期2

## 3 分岔和混沌现象动态演化过程分析

$i_n$  是逆变器的电感电流,作为系统的状态变量,它的变化可以反映出系统的运行状态的改变。本文主要通过分析输出电流  $i_n$  随反馈系数  $k$ 、开关周期  $T_s$  的分别改变而产生变化的情况,以及其分别改变时的 lyapunov 指数图来分析系统的动态。

### 3.1 当 $T_s = 100 \mu\text{s}$ 时参数 $k$ 变化时的混沌演化过程

按照以上参数进行计算机仿真迭代,当  $T_s = 100 \mu\text{s}$  时,得到  $k$  变化时的分岔和混沌现象的动态演化过程,如图4所示。

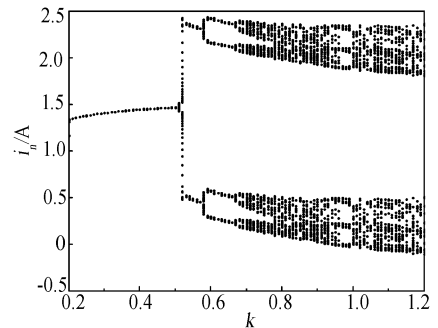


图4  $T_s = 100 \mu\text{s}$  时  $k$  变化的分岔图

Fig.4 The bifurcation diagram as the variation of  $k$  when  $T_s = 100 \mu\text{s}$

由图4可以看出当  $k < 0.5$  时迭代重合,系统处于稳定运行状态,输出电流与计算得到相应稳定电流的大小一致;当  $k \approx 0.5$  时迭代分为两点,系统由周期1进入周期2产生倍周期分岔现象;当  $k$  增大至  $0.57$  时系统再次分岔;当  $k > 0.65$  时系统最终进入混沌状态。

为了验证分岔及混沌出现的位置,笔者进一步计算了对应的 lyapunov 指数谱,即本系统的最大 lyapunov 指数谱。如图5所示。

由图5可以看出,当  $k < 0.5$  时,lyapunov 指数

一直为负,逆变器处于稳定运行的周期状态;当  $k \approx 0.5$  时 lyapunov 指数增大至 0,再变为负,则系统进行第一次分岔,这一结果与稳定性分析结果及分岔图一致;当  $k$  逐渐增大至 0.57 时 lyapunov 指数再次增大至 0 又减小,系统再次分岔;当  $k > 0.65$  时 lyapunov 指数由负变正,混沌现象出现。

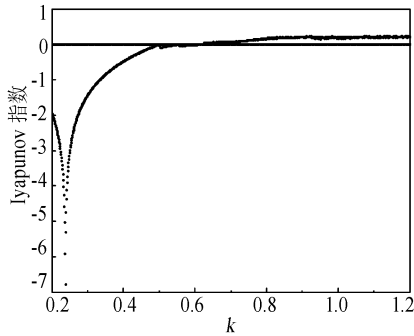


图5  $T_s = 100 \mu\text{s}$  时  $k$  变化的 lyapunov 指数

Fig. 5 The lyapunov exponent diagram as the variation of  $k$  when  $T_s = 100 \mu\text{s}$

### 3.2 当 $k = 0.45$ 时伴随参数 $T_s$ 变化的混沌演化过程

当  $k = 0.45$  时开关周期  $T_s$  变化对应的系统稳定工作域为  $0 < T_s < 110.7 \mu\text{s}$ 。 $T_s$  的改变也会影响系统运行的稳定性, $k = 0.45$  时  $T_s$  变化的分岔图、lyapunov 指数图分别如图 6 和图 7 所示。

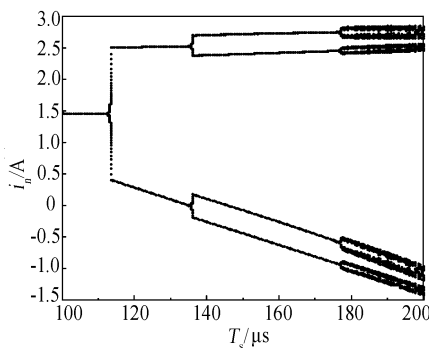


图6  $k = 0.45$  时  $T_s$  变化的分岔图

Fig. 6 The bifurcation diagram as the variation of  $T_s$  when  $k = 0.45$

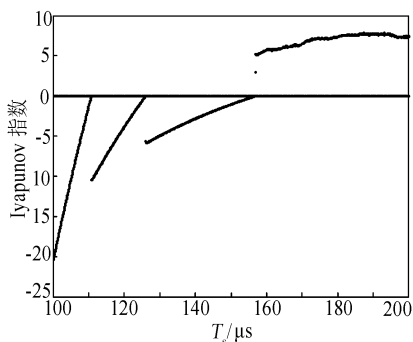


图7  $k = 0.45$  时  $T_s$  变化的 lyapunov 指数

Fig. 7 The lyapunov exponent diagram as the variation of  $T_s$  when  $k = 0.45$

$T_s$  的变化超出稳定工作域后,系统由倍周期分岔逐渐走向混沌。当  $T_s < 110.7 \mu\text{s}$  时电流始终是周期 1 解,系统稳定。当  $T_s = 110.7 \mu\text{s}$  时,电流第一次分岔,产生两个稳定点。随着  $T_s$  的增大,系统不断分岔,最终进入混沌。在系统进入混沌状态的时间上图 6 和图 7 稍有偏差,但是减小步长增加描点个数后就会得到相一致的时间点。

分岔图和 lyapunov 指数作为展现和判断混沌的方法,是直观有效的。对两组图进行对比可见,其分别展示的分岔点位置一致,与稳定性分析部分得到的临界稳定点相同。虽然  $k$ 、 $T_s$  的变化对系统稳定性的具体影响不同,但当参数改变超出其各自的稳定范围后,系统都将失去稳定并逐渐走向混沌。

## 4 结 论

1) 离散数学模型能分析系统比较完整的运行特征,虽然方法复杂却能更精确、更全面真实的反应系统每个开关周期的动态情况。

2) SPWM-H 桥逆变器是一个非线性系统,本文中参数开关周期  $T_s = 110.7 \mu\text{s}$  时,系统不再运行于稳定的周期 1,开始分岔,同样反馈系数  $k$  取 0.5 时,系统也开始产生分岔。虽然系统的动态特征对  $T_s$  的改变比对  $k$  更加敏感,但是当其分别超出稳定运行范围后,系统都将由分岔最终走向混沌。

本文的研究结果对于逆变器控制电路参数的选择具有一定的参考作用,为 H 桥逆变器实际应用中的稳定性设计及混沌控制研究做了必要的铺垫。

## 参考文献:

- [1] Baillieul J, Brockett R W, Washburn R B. Chaotic motion in nonlinear feedback systems [J]. IEEE Transaction on Circuits and Systems I, 1980, 27(11): 990-997.
- [2] 马西奎,李明,戴栋. 电力电子电路与系统中的复杂行为研究综述 [J]. 电工技术学报, 2006, 21(12): 1-11.  
Ma Xikui, Li Ming, Dai Dong. Reviews of research on complex behavior of power electronic circuits and systems [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2006, 21(12): 1-11.
- [3] Tse C K. Flip bifurcation and chaos in the three-state boost switching regulators [J]. IEEE Transaction on Circuits and Systems I, 1994, 41(1): 16-23.
- [4] Banerjee S, Chakrabarty K. Nonlinear modeling and bifurcations in the boost converter [J]. IEEE Transaction on Power Electronics, 1998, 13(2): 252-260.
- [5] David C H, Jonathan H B D, David J. Modeling of chaotic DC-DC converters by iterated nonlinear mappings [J]. IEEE Transaction on Power Electronics, 1992, 7(1): 25-36.

- [6] Enric F O. Study of chaos in the buck converter[J]. IEEE Transaction on Circuits and Systems I,1996,43(1):13-25.
- [7] 张波,曲颖. BUCK DC/DC 变换器分岔和混沌的精确离散模型及实验研究[J]. 中国电机工程学报,2003,23(12):99-103.  
Zhang Bo, Qu Ying. Study on the experiment and precise mode of bifurcation and chaos for BUCK DC/DC converter [J]. Proceedings of the CSEE,2003,23(12):99-103.
- [8] 刘伟增,张浩,马西奎. 基于频闪映射的 Boost PFC 变换器中的间歇性分岔和混沌现象分析[J]. 中国电机工程学报,2005,25(1):43-48.  
Liu Weizeng, Zhang Hao, Ma Xikui. Analysis of intermittent bifurcations and chaos phenomena in boost PFC converters by stroboscopic map [J]. Proceedings of CSEE, 2005,25(1):43-48.
- [9] Jonathan R W. Chaos;a real phenomenon in power electronics[J]. IEEE,1989,89(3):115-124.
- [10] Iu H H C, Robert B. Control of chaos in a PWM current model H bridge inverter using timedelayed feedback[J]. IEEE Transaction on Circuits and Systems I, 2003, 50(8):1125-1129.
- [11] 张波. 电力电子变换器非线性混沌现象及其应用研究[J]. 电工技术学报,2005,20(12):1-6.
- Zhang Bo. Study of nonlinear chaos phenomena of power converters and their applications[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2005,20(12):1-6.
- [12] 张波,李萍,齐群. DC-DC 变换器分叉和混沌现象的建模和分析方法[J]. 中国电机工程学报,2002,22(11):81-86.  
Zhang Bo, Li Ping, Qi Qun. Method for analyzing and modeling bifurcation and chaos in DC-DC converters[J]. Proceedings of CSEE,2002,22(11):81-86.
- [13] 吕延军,曹治军,黑隼. 具有陀螺效应的转子-轴承系统的非线性动力学行为[J]. 西安理工大学学报,2010,26(1):13-19.  
Lv Yanjun, Cao Zhijun, Hei Di. Nonlinear dynamic behaviors of unsymmetrical rotor bearing system with gyroscopic effect[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2010,26(1):13-19.
- [14] 王学梅,张波. H 桥直流斩波变换器边界碰撞分岔和混沌研究[J]. 中国电机工程学报,2009,29(9):22-27.  
Wang Xuemei, Zhang Bo. Mechanism of border-collision bifurcations and chaos in H-bridge direct current copper [J]. Proceedings of CSEE,2009,29(9):22-27.

(责任编辑 李虹燕)

## 简讯

### 西安理工大学承担的一国家自然科学基金重点项目通过中期评估检查

国家自然科学基金委员会于 2011 年 3 月 10 日在西安组织专家召开了重点项目中期评估检查会议,对西安理工大学承担的重点项目“高功率高重复频率 GaAs 光电导开关关键技术研究”和清华大学、复旦大学、中国工程物理研究院共同承担的重点项目“高功率重复脉冲开关的关键技术”进行了中期评估检查。

我校施卫教授代表“高功率高重复频率 GaAs 光电导开关关键技术研究”项目组成员汇报了该项目前两年的研究工作情况。专家组审查了项目的中期总结报告及相关资料,进行了质询和讨论,一致认为,西安理工大学承担的此重点项目前两年的研究工作,全面完成了项目计划书中提出的研究计划,研究工作取得了较为突出的进展和结果。同时,专家组就该项目后两年的研究方案、技术路线等提出了宝贵的建议。

(摘自西安理工大学新闻网 2011-03-15)