文章编号：1006-4710(2013)02-0155-04

基于贝努力映射的混沌运算研究

陈曦，高勇，杨媛

(西安理工大学 自动化与信息工程学院，陕西 西安 710048)

摘要：基于混沌系统符号动力学原理，由贝努力映射函数可得信号的混沌符号序列，因此本研究探讨了一种能直接对所得混沌符号序列进行加、减及乘法运算的方法。通过数值实验表明，采用该方法运算得到的结果与直接采用十进制运算得到的结果完全相同，可应用于混沌信号处理系统。

关键词：混沌；混沌运算；贝努力映射

中图分类号：TP391.9　　**文献标志码**：A

Research on Chaotic Calculation Based on Bernoulli Mapping

CHEN Xi, GAO Yong, YANG Yuan

(Faculty of Automation and Information Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

Abstract: Based on the principle of symbol dynamics in chaotic systems, chaotic symbol sequences of signal can be obtained by Bernoulli mapping. An arithmetic method using chaotic sequences above-mentioned is studied in this paper, including addition, subtraction and multiplication. Numerical experiments indicate that the results obtained by using this method in operation are found to be completely the same as those obtained by directly adopting the decimal system. Accordingly, this method can be used in chaotic signal processing system.

Key words: chaos; chaotic calculat; Bernoulli mapping

混沌在自然界中普遍存在，随着人们对自然界中各种现象建立的数学模型，混沌动力学的理论和方法被越来越广泛地应用到自然科学和工程技术的各个领域中。目前，基于一维分段线性映射函数的混沌系统已在信息存储、检索、图像处理等方面得以应用[1-6]。混沌信号处理的关键是如何对由映射函数得到的符号序列进行运算，并使运算结果与直接对输入信号进行的相应运算结果一致。在这方面，文献[7-9]提出了对基于倒锯齿映射函数得到的符号序列直接进行简单四则运算的模型。与倒锯齿映射相比，贝努力映射所得到的符号序列是直接与输入相对应的二进制码，在符号序列运算原理上更直接，在电路实现上也更简单。

结合混沌符号动力学原理，本研究提出了利用贝努力映射函数所产生的混沌符号序列直接进行加、减及相乘运算的方法。为了验证该混沌运算模型的正确性，本研究基于贝努力映射函数产生输入数据的混沌符号序列，对相应的符号序列进行加、减及相乘运算，得到的结果根据初值估计公式计算初值，再与直接对输入数据进行运算的结果进行比较，若误差在一定范围内，则证明了运算模型的正确性。

1　混沌符号序列的产生

假设一般形式的线段 I 到自身的映射的数学模型为：

$$x_{n+1} = f(x_n),\quad x_n、x_{n+1} \in I \tag{1}$$

其中，$f(\cdot): I \to I$ 是一个非线性函数。取初值 x_0 代入(1)式，算出 x_1。将 x_1 作为新的输入，计算 x_2，……，如此迭代下去，便得到一条数值轨道为：

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f^{(2)}(x_0), \cdots, x_n = f(x_{n-1}) = f^{(n)}(x_0) \tag{2}$$

收稿日期：2012-08-20

基金项目：国家自然科学基金资助项目(61102017)；陕西省教育厅专项科研计划基金资助项目(12JK0499)；西安理工大学科学研究计划基金资助项目(105-210917)。

作者简介：陈曦，女，博士生，研究方向为新型集成电路设计。E-mail：cheenxi@163.com。
高勇，男，教授，博导，研究方向为半导体新型器件与集成电路。E-mail：gaoy@xaut.edu.cn。

根据符号动力学原理,令:

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 0, & x_n \le C \\ 1, & x_n \ge C \end{cases} \tag{3}$$

其中,C 为映射峰值。用初值 x_0 作为相应符号序列的名字,即:

$$x_0 = \varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n\cdots \tag{4}$$

这样,以 x_0 作为初值的数值轨道(2)式就转换为对应的符号序列(4)式。

对于贝努力映射在考虑满映射的情况下其动力学方程为:

$$X_{n+1} = B(X_n) = \begin{cases} 2X_n, X_n \in [0,0.5) \\ 2X_n - 1, X_n \in [0.5,1] \end{cases} \tag{5}$$

此时,(3)式可改写为:

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 0, X_n < 0.5 \\ 1, X_n \ge 0.5 \end{cases} \tag{6}$$

经数学推导知,贝努力映射的初值估计公式为:

$$X_0 \cong \sum_{i=0}^{N} \frac{\varepsilon_i}{2^{i+1}} \text{(}N\text{ 为迭代次数)} \tag{7}$$

如此即可由贝努力映射函数产生的符号序列计算出对应的初值。

2 混沌符号序列的运算

设有两个初值 x_0 和 y_0,利用(5)式和(6)式可得它们对应的符号序列分别为$\{a_i\}$和$\{b_i\}$($i=0,1,2,\cdots\cdots N$)。若满足 $(x_0+y_0)\in[0,1]$,则根据(7)式有 $(x_0+y_0)\cong\sum_{i=0}^{N}\frac{a_i+b_i}{2^{i+1}}$。由于$a_i,b_i\in\{0,1\}$,$(a_i+b_i)\in\{0,1,2\}$。若能将符号序列$\{(a_i+b_i)\}$转换成$\{0,1\}$范围内的$\{c_i\}$,就可以直接利用(7)式,计算出符号序列$\{c_i\}$所对应的初值。

假设对第 i 位进行符号转换时 s_{i+1} 表示低位向本位 s_i 的进位,则加法运算时$\{(a_i+b_i)\}\to\{c_i\}$的转换关系见表1。

根据表1可推得符号序列的转换关系为:

$$c_i = a_i\cdot\bar{b}_i\cdot\bar{s}_{i+1} + \bar{a}_i\cdot b_i\cdot\bar{s}_{i+1} + \bar{a}_i\cdot\bar{b}_i\cdot s_{i+1} + a_i\cdot b_i\cdot s_{i+1} = a_i\otimes b_i\otimes s_{i+1}$$

$$s_i = a_i\cdot\bar{b}_i\cdot s_{i+1} + \bar{a}_i\cdot b_i\cdot s_{i+1} + a_i\cdot b_i\cdot\bar{s}_{i+1} + a_i\cdot b_i\cdot s_{i+1} = a_i\oplus b_i\cdot s_{i+1} + a_i\cdot b_i \tag{8}$$

将$\{c_i\}$代入(7)式,即可得到 (x_0+y_0) 的估计值。

同理,当两个符号序列相减时有 $(x_0-y_0)\cong\sum_{i=0}^{N}\frac{a_i-b_i}{2^{i+1}}$,并满足 $(x_0-y_0)\in[0,1]$。由于$a_i,b_i\in\{0,1\}$,则$(a_i-b_i)\in\{-1,0,1\}$,将其转换成$\{d_i\}$,且有 $d_i\in\{0,1\}$。

同样,在对第 i 位进行转换时令 s_{i+1} 表示低位向本位 s_i 的借位,则减法运算时$\{(a_i+b_i)\}\to\{d_i\}$的转换关系见表2。

表1 加法运算时$\{(a_i+b_i)\}\to\{c_i\}$的转换关系

Tab.1 The conversion relation of $\{(a_i+b_i)\}\to\{d_i\}$ in addition calculation

a_i数值	b_i数值	s_{i+1}数值	c_i数值	s_i数值
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

表2 减法运算时$\{(a_i+b_i)\}\to\{d_i\}$的转换关系

Tab.2 The conversion relation of $\{(a_i+b_i)\}\to\{d_i\}$ in subtraction calculation

a_i数值	b_i数值	s_{i+1}数值	d_i数值	s_i数值
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

由表2可推得以下符号序列的转换关系,即:

$$d_i = a_i\cdot\bar{b}_i\cdot\bar{s}_{i+1} + \bar{a}_i\cdot b_i\cdot\bar{s}_{i+1} + \bar{a}_i\cdot\bar{b}_i\cdot s_{i+1} + a_i\cdot b_i\cdot s_{i+1} = a_i\otimes b_i\otimes s_{i+1}$$

$$s_i = \bar{a}_i\cdot\bar{b}_i\cdot s_{i+1} + a_i\cdot b_i\cdot s_{i+1} + \bar{a}_i\cdot b_i\cdot\bar{s}_{i+1} + \bar{a}_i\cdot b_i\cdot s_{i+1} = a_i\otimes b_i\cdot s_{i+1} + \bar{a}_i\cdot b_i \tag{9}$$

由此,可计算得到 $(x_0-y_0)\cong\sum_{i=0}^{N}\frac{d_i}{2^{i+1}}$。

在对两个符号序列进行相乘运算时,有:

$$(x_0\cdot y_0)\cong\left(\sum_{i=0}^{N}\frac{a_i}{2^{i+1}}\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{N}\frac{b_j}{2^{j+1}}\right) = \sum_{k=0}^{2N}\frac{f_k}{2^{k+2}}$$

其中,$k=i+j=0,1,2,\cdots\cdots,2N$,且:

$$f_k = f_{(i+j)} = \begin{cases} n, & a_i,b_j\text{ 均为 1 时} \\ 0, & \text{其它情况} \end{cases}$$

其中,n 为 f_k 不为 0 的个数。由于 $f_k\in\{0,1,2,$

……，$2N\}$，所以不能直接应用（7）式计算出初值，应将f_k转换成$\{e_i\}$，其中$e_i \in \{0,1\}$。转换方法为：令f_k除2的商为m，且$m \neq 0$，则进位到$(k-m)$位，而e_k的值为f_k除2的余数，这样就得到了新的符号序列$\{e_i\}$，将其代入（7）式即可得到与$(x_0 \cdot y_0)$对应的初值。

通过以上分析可知，在精度允许的范围内，初值的加、减、乘运算结果可直接由各初值对应的混沌符号序列的运算得到。

3 MATLAB 仿真

为了验证上述算法的正确性，笔者采用MATLAB软件进行数值实验。

对于加法和减法运算的算法验证，可先取两个初始值x_0和y_0，使$x_0, y_0 \in [0,1]$，对于加法和减法运算应分别满足$x_0 + y_0 < 1$和$x_0 - y_0 > 0$。由（5）式和（6）式（迭代次数N取16）可得与x_0和y_0对应的符号序列$\{a_i\}$和$\{b_i\}$，分别利用（8）式和（9）式计算出$\{c_i\}$和$\{d_i\}$，将$\{c_i\}$和$\{d_i\}$代入（7）式推算出其分别对应的初值，最后与(x_0+y_0)和(x_0-y_0)进行比较。

若取初值$y_0 = 0.100$，其对应的符号序列$\{b_i\}$为0001 1001 1001 1001，对于不同的x_0，其对应的加、减法运算结果如表3所示。

表3 基于符号序列的加、减法运算

Tab. 3 Addition and subtraction based on symbolic sequences

初值 x_0	初值 x_0 对应的符号序列 $\{a_i\}$	加法				减法			
		$\{c_i\}$	$\{c_i\}$ 对应的初值	x_0+y_0	误差	$\{d_i\}$	$\{d_i\}$ 对应的初值	x_0-y_0	误差
0.000	0000 0000 0000 0000	0001 1001 1001 1001	0.099 991	0.100	0.000 009	–	–	–	–
0.100	0001 1001 1001 1001	0011 0011 0011 0011	0.199 997	0.200	0.000 003	0000 0000 0000 0000	0.000 000	0.000	0.000 000
0.200	0011 0011 0011 0011	0100 1100 1100 1100	0.299 988	0.300	0.000 012	0001 1001 1001 1001	0.099 991	0.100	0.000 009
0.300	0100 1100 1100 1100	0110 0110 0110 0110	0.399 994	0.400	0.000 006	0011 0011 0011 0011	0.199 997	0.200	0.000 003
0.400	0110 0110 0110 0110	1000 0000 0000 0000	0.500 000	0.500	0.000 000	0100 1100 1100 1100	0.299 988	0.300	0.000 012
0.500	1000 0000 0000 0000	1001 1001 1001 1001	0.599 991	0.600	0.000 009	0110 0110 0110 0110	0.399 994	0.400	0.000 006
0.600	1001 1001 1001 1001	1011 0011 0011 0011	0.699 997	0.700	0.000 003	1000 0000 0000 0000	0.500 000	0.500	0.000 000
0.700	1011 0011 0011 0011	1100 1100 1100 1100	0.799 988	0.800	0.000 012	1001 1001 1001 1001	0.599 991	0.600	0.000 009
0.800	1100 1100 1100 1100	1110 0110 0110 0110	0.899 994	0.900	0.000 006	1011 0011 0011 0011	0.699 997	0.700	0.000 003
0.900	1110 0110 0110 0110	1111 1111 1111 1111	0.999 985	1.000	0.000 015	1100 1100 1100 1100	0.799 988	0.800	0.000 012
1.000	1111 1111 1111 1111	–	–	–	–	1110 0110 0110 0110	0.899 994	0.900	0.000 006

由表3所示的结果可知，对混沌符号序列进行加、减运算与直接对输入的十进制数值进行运算的误差保持在0.000 015（即$1/2^{16}$）范围内，即误差小于截断误差$1/2^N$（截断误差是由于在实际运算中迭

代次数 N 有限而产生的,无法避免),因此这两种运算是完全等效的。

由于乘法运算实际上是采用移位相加的方法得到的,运算模型与加法一致,因此对于乘法运算模型的验证文中不再累述。

4 结 论

从以上实验结果可知,在精度允许范围(即 $1/2^N$)内,通过对混沌符号序列直接进行加、减及相乘运算所得的结果与输入数据的十进制运算结果是完全相同的。因此,以上混沌运算模型为混沌符号序列直接进行数字处理奠定了基础,使得数字信号处理中的许多方法可以同样用在混沌系统中,从而为混沌态下进行信号处理提供途径。

参考文献:

[1] Dmitriev A S, Panas A I, Strakov S O. Storing and recognizing information based on stable cycles of one-dimensional map[J]. Physics Letters , 1991, 155: 494-499.

[2] Andreyev Y V, Belsky Y L, Dmitriev A S, et al. Information processing using dynamical chaos: neural network implementation[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1996, 7: 290-298.

[3] Andreyev Y V, Dmitriev A S, Starkov S O. Information processing in 1-D systems with chaos[J]. IEEE Transactions on Circuits System, 1997, 44(1): 21-28.

[4] 余群明, 王耀南. 混沌动力在智能信息处理中的应用[J]. 系统工程与电子技术, 2001, 23(5): 97-101.
Yu Qunming, Wang Yaonan. Chaos dynamics applied in intelligent information processing[J]. Systems Engineering and Electronics, 2001, 23(5): 97-101.

[5] 王金铭,虞飞华. 基于混沌符号动力学的图像加密研究[J]. 计算机工程,2011,37(2):132-135.
Wang Jinming, Yu Feihua. Research on image encryption based on chaotic symbol dynamics[J]. Computer Engineering, 2011,37(2):132-135.

[6] 王金铭,王章权. 基于混沌符号动力学的图像加密电路研究[J]. 电路与系统学报,2011,16(2):122-129.
Wang Jinming, Wang Zhangquan. Image encryption circuit with chaotic symbol dynamics[J]. Journal of Circuits and Systems, 2011,16(2):122-129.

[7] 童勤业, 金敏, 虞捷. "混沌"运算器的实现[J]. 电路与系统学报, 2002, 5(4): 33-37.
Tong Qinye, Jin Min, Yu Jie . Realization of calculator circuit with chaotic method[J]. Journal of Circuits and Systems, 2002, 5(4): 33-37.

[8] 金文光,王金铭. 基于符号动力学的混沌信号处理研究[J]. 电子与信息学报, 2006, 28(10): 1774-1777.
Jin Wenguang, Wang Jinming. Study on chaotic signal processing with symbol dynamics[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2006, 28(10): 1774-1777.

[9] 王金铭. 混沌符号动力学运算电路模型研究[J]. 电路与系统学报, 2010, 15(3) : 105-110.
Wang Jinming. Study on calculator circuit with chaotic symbol dynamics[J]. Journal of Circuits and Systems, 2010, 15(3) : 105-110.

(责任编辑 李虹燕)