

DOI:10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2020.01.010

随机需求环境下多级库存优化问题的改进 GSA 研究

李 鹏, 陈菊红, 吴 迪

(西安理工大学 经济与管理学院, 陕西 西安 710054)

摘要: 针对服务时间保证法 (Guaranteed-Service Approach, GSA) 在求解多级库存优化问题时未考虑订货成本和柔性成本的局限性, 本文研究了一类随机需求环境下的两级分销系统, 构建了改进的 GSA 库存优化型, 针对目标函数及非线性约束的复杂性特点, 提出基于线性搜索的最优化方法对模型进行求解, 实验结论验证了模型及算法的有效性及收敛性。

关键词: 库存管理; 多级库存系统; 服务时间保证法; (R, Q) 策略

中图分类号: C931

文献标志码: A

文章编号: 1006-4710(2020)01-0072-08

Study of multi-echelon inventory optimization using improved guaranteed-service approach under stochastic demand

LI Peng, CHEN Juhong, WU Di

(School of Economics and Management, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China)

Abstract: For the limitation of guaranteed-service approach (GSA) in solving the multi-echelon inventory optimization problem without considering fixed order cost and operating flexibility cost, this paper studies a two-echelon distribution system with the stochastic customer demand, with an improved GSA optimization model established. For the complexity of the objective function and nonlinear constraints, an optimization procedure based on line search is proposed to solve the problem. Experimental results demonstrate the effectiveness and convergence by the model and algorithm.

Key words: inventory management; multi-echelon inventory system; guaranteed-service approach; (R, Q) policy

随着经济的全球化发展, 企业之间传统的单个竞争逐渐转变为供应链之间的竞争, 库存管理作为供应链管理的重要内容之一, 其优劣直接影响供应链的敏捷性以及供应链价值增值的实现。多级库存优化作为一类供应链资源全局性优化控制方法, 在单级库存控制理论的基础上, 通过重新定义供应链上各节点的库存数据, 根据供应链上、下节点的库存信息, 对整个供应链的库存进行分析和优化, 以实现整个供应链的利润最大化^[1]。因此, 在供应链环境下研究多级库存优化问题, 寻求一种在减少供应链库存成本、提高产品流通效率的同时, 保证较高的顾客服务水平, 具有十分重要的现实意义。

目前, 研究多级库存优化问题的方法主要归于两类: 服务时间随机法 (Stochastic-Service Ap-

proach, SSA) 和服务时间保证法 (Guaranteed-Service Approach, GSA)。一般来说, 这两类方法的主要区别体现在系统的补货策略和提前期特征上, 这里的提前期是指顾客从发出订单到收到订货的时间间隔。SSA 方法作为经典的多级库存控制方法, 假设每个库存点均保有一定量的存货以应对顾客的随机需求, 当系统存货不足以满足需求时将发生缺货, 产生缺货损失, 而未满足的需求将以延期交货或丢失处理。这里以延期交货为例, 由于交货时间具有一定的随机性和不确定性, 因此未满足需求的提前期也将是随机的。由于此类问题模型的复杂性特点, 目前大多采用近似算法或启发式算法求解, 难以获得全局最优解^[2-6]。相反地, 针对顾客随机需求的复杂性特点, GSA 方法首先提出一个有限

收稿日期: 2019-05-27; 网络出版日期: 2020-04-24

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1294.N.20200423.1918.012.html>

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71401133); 陕西省社会科学资助项目(2018S44); 陕西省自然科学基金资助项目(2015JQ7280); 西安理工大学人文社科创新团队资助项目(105-451215007)

第一作者: 李鹏, 女, 讲师, 研究方向为供应链优化。E-mail: lipenggn@xaut.edu.cn

需求上界假设,即假设每个库存点均存在一个预先可求的需求上界,所有在此上界内的顾客需求将得到 100% 满足,不存在缺货现象。有限需求上界假设不同于大多数的随机库存控制模型,它的重要意义在于能够为系统安全库存的设置提供策略指导,即安全库存往往被设置为覆盖需求上界内所有需求的满足上,一旦需求超过此上界,表明安全库存设置数量不足,在这种情况下,超出部分则采取其他策略满足,这里简称为柔性策略,例如加班、提高生产效率、外包等,并产生相应的柔性成本。相较于经典的 SSA 方法,GSA 方法将复杂的随机库存控制问题转化为确定型数学规划问题进行求解,从而简化了模型本身,因此具有一定的优势。

GSA 最早由 Kimball^[7]于 1955 年提出(其研究成果重新发表于 1988 年),他研究了一类采用基本库存控制策略的单级库存优化问题,并提出有限需求上界的关键性假设,即系统存在一个可求的需求上界,所有在此上界内的需求将得到满足,研究表明系统的最佳库存水平能够通过此上界确定。Simpson^[8]在 Kimball 模型的基础上研究了线性库存系统,提出最优的库存控制策略。Graves 和 Willem^[9]建立了具有一般适用性的 GSA 库存控制模型,并提出基于生成树结构的动态规划算法对模型进行求解,其研究成果具有里程碑的意义。之后,Howard 和 Klosterhalfen 等^[10-12]在此模型的基础上做了进一步的探讨。近年来不少学者积极探索了关于 GSA 方法的拓展研究。Grah^[13]提出通过区分系统服务时间解决安全库存的设置问题,并提出启发式算法对模型进行求解。Puga 等^[14-15]构建了基于 GSA 方法的选址-库存联合模型,探讨了不同顾客服务水平对系统效率的影响。尽管上述研究在一定程度上丰富了 GSA 的理论成果,但仍然存在一定的局限性,主要表现在两个方面:一是上述模型仅强调了柔性策略对于满足额外需求的必要性,但并未在模型中对其进行定量描述;二是在优化系统库存总成本时仅考虑了存货成本,并未考虑订货成本和采取柔性策略时产生的柔性成本,这也是 GSA 没有得到广泛应用的重要原因之一。针对上述问题,不少学者进行了探索性研究。Rambau 等^[16]研究了一类带有资源约束的多级库存系统,模型假设系统通过外包作业满足额外需求,并对其进行了定量分析,提出随机 GSA 库存控制模型;Rambau 等^[17]还提出考虑外包能力限制的 GSA 库存控制模型,并与 Dogru 等^[18]提出的 SSA 模型进行对比分析,结果表明所提出的模型更具成本效益。Li 等^[19]研究

了一类同时存在柔性成本和订货成本的线性多级库存系统,建立了此类问题的数学模型,实验结果验证了模型的有效性。

经过上述文献梳理,不难发现:1) 现有关于 GSA 方法的研究大多未考虑发生缺货时产生的柔性成本,尽管有学者针对这类问题进行了拓展研究,但仍以定性分析为主,缺乏定量研究;2) 构建带有订货成本的多级库存优化模型大大增加了模型的复杂性,现有研究多忽略此成本,仅有 Li 等^[19]针对线性系统提出了包含订货成本和柔性成本的库存优化模型;3) 现有研究多以线性系统和装配型系统作为研究对象,针对更为复杂的分配型多级库存系统研究较少。

综上所述,本文主要研究一类包含一个分销商和多个零售商的两级分销系统,系统采用连续盘点的(R, Q)库存控制策略,通过改进 GSA 方法构建包含订货成本、存货成本以及柔性成本的多级库存控制模型,提出有效的最优化方法对此类问题进行求解,在此基础上运用 C++ 软件对所提出的模型及算法进行验证。

1 模型的假设

本文考虑一类包含一个分销商和 N 个零售商的两级分销系统,见图 1。

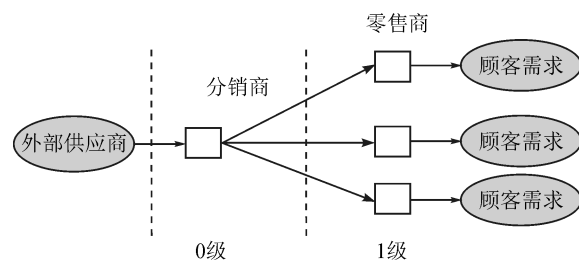


图 1 包含一个分销商和 N 个零售商的两级分销系统
Fig. 1 A two-echelon distribution system with one warehouse and N retailers

为了便于讨论,采用统一的变量符号,节点 0 表示分销商,节点 i 表示第 i 个零售商, $i=1,2,\dots,N$ 。系统采用集中控制策略,即通过引入“级库存”取代“节点库存”,根据供应链上、下游库存点信息,实现整个库存系统协调统一管理库存的目的。这里的“级”是相对于节点的概念,在一个库存系统中,每一个阶段或层称为一级,某一节点的级库存是指包含该节点及其下游所有节点的库存。分销商和零售商均采用连续盘点的(R, Q)库存策略。具体地,对于分销商来说,当其级持有库存(分销商的节点持有库存+在途库存+各零售商的节点持有库存)在盘点时刻降到订货点 R_0 以下,就向外部供应商发出批量为 Q_0 的订货;而对于零售商 i ,如果其级持有库存

(即零售商的节点库存)降到订货点 R_i 以下,则向分销商发出批量为 Q_i 的订货。

顾客对零售商的需求是随机的,服从参数为 λ 的 Poisson 分布,不同零售商的 λ 不同,且各零售商之间的需求相互独立。

Graves 和 Willems 提出的有限需求上界假设被用来设置系统安全库存,该库存被设置为能够满足所有需求上界内的顾客需求,一旦需求超过此上界,未满足的需求将采取柔性策略,例如加急、加班以及分包等。由于安全库存的设置往往与系统的顾客服务水平密切相关,这里的服务水平被定义为顾客需求被满足的概率。因此,根据顾客服务水平可对有限需求上界进行量化。具体地,对于任意节点 i 来说,假设 $d[t_1, t_2)$ 为从时刻 t_1 到 t_2 的顾客总需求(不包含 t_2 且 $t_2 \geq t_1$),订货提前期为 τ ($\tau \geq 0$),则其提前期总需求为 $d_i[t-\tau, t)$,在给定顾客服务水平为 α_i 的条件下,需求上界可被定义为满足如下概率条件下的最小 $D_i(\tau)$:

$$p\{d_i[t-\tau, t) \leq D_i(\tau)\} \geq \alpha_i \quad (1)$$

对于本文所考虑的两级分销系统,其顾客需求为服从参数为 λ_i 的 Poisson 分布。因此,进一步可以得到:

$$\sum_{k=0}^{D_i(\tau)} \frac{(\lambda_i \tau)^k e^{-\lambda_i \tau}}{k!} \geq \alpha_i, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (2)$$

式中, $D_i(\tau)$ 为满足上述约束条件的最小整数。

由于系统采用集中控制策略,对于分销商(节点 0)来说,其顾客服务水平 α_0 需考虑所有零售商的需求水平,采用式(3)进行计算。

$$\alpha_0 = \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i \alpha_i}{\sum_{i=1}^N \lambda_i} \quad (3)$$

除此之外, GSA 假设每个节点 i 存在出库服务时间 S_i 、生产时间 T_i 以及入库服务时间 SI_i 。出库服务时间 S_i 为节点 i 保证满足其直接下游节点需求的时间,也就是说,当节点 i 在时刻 t 收到其直接下游节点发来的订货需求时,这部分需求必须在时刻 $t+S_i$ 满足。入库服务时间 SI_i 则是库存节点 i 从其直接上游节点获得所有投入(订购货物)并开始生产的时间,这里要求,节点 i 的生产只有当所有需要投入的生产资料都收到之后才能够开始。生产时间 T_i 是给定的,表示节点 i 从投入生产材料到生产完成所需的时间间隔,值得注意的是,在生产完成的时刻,节点 i 由生产数量补充其库存,可用于需求的满足。

考虑如下订单流程。在时刻 t , 节点 i 观察到来自其下游节点的需求 $d_i(t)$, 开始为需求补充库存,它向上游节点下达一定数量的订单,并在时刻 $t+SI_i+T_i$ 补充需求。根据 GSA, 节点 i 必须保证在时刻 $t+S_i$ 满足其下游节点的需求。这意味着如果 $t+S_i \geq t+SI_i+T_i$, 节点 i 总能够及时满足需求,而如果 $t+S_i < t+SI_i+T_i$, 节点 i 必须存储一定数量的库存以满足时刻 $t+S_i$ 到时刻 $t+SI_i+T_i$ 之间的部分需求,这里将时间间隔 $SI_i+T_i-S_i$ 称为节点 i 的净提前期。

2 模型的构建

为了便于模型构建,首先给出本文所用到的变量符号,见表 1。

表 1 符号定义

Tab. 1 Notations

符号	描述
$I_i(t)$	节点 i 的本地持有库存
$I_i^e(t)$	节点 i 的级持有库存,等于节点 i 的本地持有库存转移给后续节点的库存之和
$IL_i^e(t)$	节点 i 的级库存水平,等于节点 i 的级持有库存减去其后续节点的缺货之和
$IP_i^e(t)$	节点 i 的级库存位势,等于节点 i 的级库存水平与转移或给后续节点的库存之和
R_i	零售商 i 的订货点
Q_i	零售商 i 的订货量
R_0	分销商的订货点
Q_0	分销商的订货量
λ_i	零售商 i 的平均顾客需求率
λ_0	分销商的平均顾客需求率
L_i	节点 i 的订货提前期, $L_i = SI_i + T_i - S_i$
α_i	节点 i 的顾客服务水平
β_i	节点 i 的顾客需求通过本地持有库存满足而未采用柔性策略的概率
c_i	节点 i 的单位订货成本
h_i^e	节点 i 的单位库存持有成本
p_i	节点 i 的单位柔性成本

本文的研究目标是在满足一定顾客服务水平的同时,实现系统总成本最小化,具体包括订货成本、库存持有成本以及柔性成本。订货成本与订货次数有关,表示为 $\frac{c_i \lambda_i \beta_i}{Q_i}$ 。库存持有成本与其持有的库存数量存在正相关关系,表示为 $h_i^e \times E[I_i^e]$ 。节点 i 的柔性成本表示为 $p_i \lambda_i (1 - \beta_i)$,其中, $1 - \beta_i$ 为超过需求上界的额外需求通过柔性策略满足的概率。

因此,系统总成本如下:

$$\sum_{i=0}^N \left[\frac{c_i \lambda_i \beta_i}{Q_i} + h_i^e \times E[I_i^e] + p_i \lambda_i (1 - \beta_i) \right] \quad (4)$$

接下来,对 $E[I_i^e]$ 做进一步分析。

对于任意节点 i ,所有在时刻 $t - L_i$ 或之前的订单最迟都将在时刻 t 入库,即:

$$IL_i^e(t) = IP_i^e(t - L_i) - d_i[t - L_i, t] \quad (5)$$

根据 GSA,所有需求上界内的顾客需求都将 100% 得到满足,因此, $IL_i^e(t) = I_i^e(t) \geq 0$,即:

$$I_i^e(t) = IP_i^e(t - L_i) - d_i[t - L_i, t] \geq 0 \quad (6)$$

$$IP_i^e(t - L_i) \geq d_i[t - L_i, t] \quad (7)$$

由于不允许缺货,则要求节点 i 的本地持有库存 $I_i(t)$ 为非负。对于任意零售商 i ,由于本地库存 $I_i(t)$ 等于级库存 $I_i^e(t)$,因此,本地持有库存 $I_i(t)$ 非负约束通过式(7)即可满足。而对于分销商(节点 0)来说,本地持有库存 $I_0(t)$ 表示为:

$$\begin{cases} R_i = D_i(SI_i + T_i - S_i) - 1, & \text{对于零售商 } i, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ R_0 = \sum_{i=1}^N (R_i + Q_i) + D_0(SI_0 + T_0 - S_0) - 1, & \text{对于分销商} \end{cases} \quad (13)$$

由于 $IP_i^e (i = 0, 1, 2, \dots, N)$ 服从 $[R_i + 1, R_i + Q_i]$ 的均匀分布,因此,系统状态为 $R_i + j$ 时, $j = 1, \dots, Q_i$ 的均值可以从下式获得:

$$I_0(t) = I_0^e(t) - \sum_{i=1}^N IP_i^e(t) \quad (8)$$

进一步可以得到:

$$IP_0^e(t - L_0) \geq \sum_{i=1}^N IP_i^e(t) + d_0[t - L_0, t] \quad (9)$$

在一定的随机初始条件下,能够证明 IP^e 是从 S^e 的均匀分布,这里将 $IP^e = (IP_j^e), j = 0, 1, \dots, N$ 定义为包含所有 N 个 IP 的列向量, S^e 作为 IP^e 的状态空间且 $S^e = \{S_j, j = 1, 2, \dots, N \mid S_j \in \{R_j + 1, R_j + 2, \dots, R_j + Q_j\}\}$ 。

基于上述分析,为了确保式(7)对于任何需求均成立,必须满足:

$$R_i \geq D_i(SI_i + T_i - S_i) - 1, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

对于节点 0 来说,为了确保式(9)对于任何需求成立,必须满足:

$$R_0 + 1 \geq \sum_{i=1}^N (R_i + Q_i) + D_0(L_0) \quad (11)$$

进而得到:

$$R_0 \geq \sum_{i=1}^N (R_i + Q_i) + D_0(SI_0 + T_0 - S_0) - 1 \quad (12)$$

为了实现系统总成本最小化,得到最优的 (R, Q) 库存策略,必须满足如下等式:

$$E[IP_i^e] = \frac{1}{Q_i} \sum_{j=1}^{Q_i} (R_i + j) = R_i + \frac{1 + Q_i}{2}, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (14)$$

根据式(6), $E[I_i^e]$ 可以表示为:

$$E[I_i^e] = \lim_{t \rightarrow \infty} E[IP_i^e(t - SI_i - T_i + S_i) - d[t - SI_i - T_i + S_i, t]] = R_i + \frac{1 + Q_i}{2} - \lambda_i \beta_i (SI_i + T_i - S_i) \quad (15)$$

将式(14)带入式(15)可得:

$$E[I_i^e] = \begin{cases} D_i(SI_i + T_i - S_i) - \lambda_i \beta_i (SI_i + T_i - S_i) + \frac{Q_i - 1}{2}, & i = 1, 2, \dots, N \\ \sum_{i=1}^N D_i(SI_i + T_i - S_i) - \lambda_0 \beta_0 (SI_0 + T_0 - S_0) + \frac{Q_0 - 1}{2} + \sum_{i=1}^N Q_i - N \end{cases} \quad (16)$$

根据式(4)和式(16),将所研究问题构建为最小化 P 的非线性规划模型:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^N \left\{ \frac{c_i \lambda_i \beta_i}{Q_i} + h_i^e \times [(D_i(SI_i + T_i - S_i) - \lambda_i \beta_i (SI_i + T_i - S_i) + \frac{Q_i - 1}{2})] + \right. \\ & \left. h_0^e \times [\sum_{i=1}^N D_i(SI_i + T_i - S_i) + \sum_{i=1}^N Q_i - N] + p_i \lambda_i (1 - \beta_i) \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

其约束为:

$$\begin{cases} Q_0 = m_i \times Q_i, & i = 1, 2, \dots, N \\ SI_i + T_i - S_i \geq 0, & i = 0, 1, \dots, N \\ SI_i \geq S_0, & i = 1, 2, \dots, N \\ 0 \leq S_i \leq s_i, & i = 1, 2, \dots, N \\ Q_i \geq 0, \text{且取整}, & i = 1, 2, \dots, N \\ SI_i, S_i \geq 0, \text{且取整}, & i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (18)$$

在上述模型中,目标函数(17)为系统库存总成本,决策变量为每个节点的订货量 Q_i 、出库服务时间 S_i 以及入库服务时间 $SI_i, i=0, 1, 2, \dots, N$ 。约束条件(18)依次分别表示:分销商订货量 Q_0 与零售量订货量 Q_i 之间存在整数约束、库存节点订货提前期的非负性、零售商的 SI_i 一定不小于分销商的 S_0 、所有零售商的出库服务时间 S_i 存在上界约束以及所有的决策变量均为非负。

经过分析,当 β_i 均为已知时,模型 P 可以分解为两个子问题,分别为决策最优订货量子问题和决策最优订货量子问题(以下简称为 R -子问题和 Q -子问题)。具体地, R -子问题的目标函数为上述目标函数中与 SI 和 S 相关的部分,约束条件为式(18)中的条件 2、3、4 和 6,类似地, Q -子问题的目标函数为上述目标函数中与 Q 相关的部分,约束条件为式(18)中的条件 1 和 5。

3 模型的求解

3.1 R -子问题求解

本文将采用 Graves 和 Willems 提出的基于生成树结构的动态规划算法(Dynamic Programming, 以下简称 DP 算法)对 R -子问题进行求解,以寻求系统最优的出库服务时间(S_i)和入库服务时间(SI_i), $i=0, 1, \dots, N$ 。算法流程描述为如下。

首先,对于图 1 中的两级分销系统中的所有节点进行标记。具体地,设 U 表示未标记的节点集合, n 表示分配给最新一个标记项的编号。节点标记过程从系统 BOM 的最高级节点开始,每一步都从 U 中选取一个 BOM 中与另一节点最为接近的一个节点 $i \in U$,将该节点标记为 $n+1$,并将其从 U 中移除。重复此过程直至集合 U 为空。

在生成树结构中,节点 0(分销商)和任意节点 i (零售商 i)之间通过有向弧连接,假设 $N(i)$ 表示连接到生成树结构中节点 i 的节点子集,则 $N(0) = \{0\}$, $N(i) = \{0, i\}, i=1, 2, \dots, N$ 。

接着,遵循标记后的节点顺序,对所有节点 i 的功能函数 $C_i(S, SI)$ 进行递归求值。这里定义 $f_i(S)$ 为当节点 i 的出库服务时间为 S 时,其节点子集 $N(i)$ 的库存总成本。

$$C_i(S, SI) = h_i^e \cdot \left[\sum_{j=1}^i D(SI_j + T_j - S_j) - \lambda_i \beta_i \cdot (SI_i + T_i - S_i) \right] + \min_{0 \leq y \leq SI_i} [f_{P(i)}(y)] \quad (19)$$

上述函数包含两个部分。其中,第一项为节点 i 的库存成本,是 S_i 和 SI_i 的函数,第二项为节点 i 的节点子集 $P(i)$ 的最小成本之和,这里 $P(i)$ 是指节点 i 的上游节点集合,即 $P(0) = \{\emptyset\}$, $P(i) = \{0\}, i=1, 2, \dots, N$ 。在此基础上, $f_i(S)$ 通过式(20)最优化问题进行求解。

$$f_i(S) = \min_{SI} \{C_i(S, SI)\} \quad (20)$$

其约束为:

$$\max(0, S - T_i) \leq SI \leq M_i - T_i \quad (21)$$

式中, M_i 是节点 i 的最大补货时间, $M_i = T_i + \max\{M_j / j \in P(i)\}$ 。此外,如果节点 i 为零售商,则其出库服务时间 S_i 存在最大服务时间约束,即 $S_i \leq s_i$ 。

基于上述分析, R -子问题的求解步骤为如下。

步骤 1: 对于 $i=0$ 至 N , 计算 $f_i(S)$, 其中 $S = 0, 1, \dots, M_i$ 。

步骤 2: 最小化 $f_N(S)$, 得到 R -子问题的最优解。

步骤 3: 从节点 N 回溯至节点 $N-1, \dots$, 节点 2 至节点 1, 节点 1 至节点 0, 得到各节点 i 的最优入库服务时间 SI_i 和最优出库服务时间 $S_i, i=0, 1, \dots, N$ 。

3.2 Q -子问题求解

对于 Q -子问题,本文提出改进的 DP 算法进行求解。首先,对于任意节点 i , 计算 Q_i 的上界和下界,分别记为 $Q_i^{\max}$ 、 $Q_i^{\min}$ 。其次,采用 DP 算法进行反向递归,得到最优解。

1) $Q_i^{\max}$ 、 $Q_i^{\min}$ 的计算

$$\text{令 } f_i(Q_i) = \frac{c_i \lambda_i \beta_i}{Q_i} + \frac{H_i}{2} \times Q_i, \text{ 其中:}$$

$$H_i = \begin{cases} h_0^e \\ h_i^e + 2h_0^e, & i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (22)$$

$$\text{将 } Q_i = \sqrt{\frac{2c_i \lambda_i \beta_i}{H_i}} \text{ 带入 } f_i(Q_i), i=0, 1, \dots, N,$$

得到下式:

$$z_i = \frac{c_i \lambda_i \beta_i}{\sqrt{\frac{2c_i \lambda_i \beta_i}{H_i}}} + \frac{H_i}{2} \sqrt{\frac{2c_i \lambda_i \beta_i}{H_i}}, i = 0, 1, \dots, N \quad (23)$$

然后计算总成本的下界值 $L = \sum_{i=0}^N z_i$, 运用启发式算法计算总成本的上界 U 。再次,根据 L 和 U , 运用式(24)计算节点 i 的成本 $f_i(Q_i)$ 。

$$\frac{c_i \lambda_i \beta_i}{Q_i} + \frac{H_i}{2} Q_i = z_i + U - L \quad (24)$$

最后,求解上述问题得到 Q_i 的可行上界和下界,标记为 Q_i^U 和 Q_i^L ,并根据式(25)得到 Q_i 的最优上界和下界, $Q_i^{\min}$ 和 $Q_i^{\max}$, $i=0,1,\dots,N$,这里 $s(i)$ 是指节点 i 的下游节点集合:

$$\begin{cases} Q_i^{\min} = \max(Q_i^L; Q_m^L), & m \in s(i) \\ Q_i^{\max} = \min(Q_i^U; Q_m^U), & m \in P(i) \end{cases} \quad (25)$$

2) DP 算法

为了便于分析,这里定义 W_i 为所有 Q_i 的可行值集合,根据之前的分析可以得到:

$$W_i = [Q_i^{\min}, Q_i^{\max}] \quad (26)$$

状态转移方程为:

$$Q_0 = m_i \times Q_i, i = 1, 2, \dots, N \quad (27)$$

假设 $g_i(Q_i)$ 为当节点 i 的状态为 Q_i 时,节点 i 及其所有后续节点的库存总成本。因此,递归函数可以描述为:

$$\begin{cases} g_i(Q_i) = d_i(Q_i), Q_i \in W_i, i = 1, 2, \dots, N \\ g_0(Q_0) = d_0(Q_0) + \sum_{j=1}^N \min_{k \in V_j(Q_0)} g_j(k), Q_0 \in W_0 \\ g_{-1}(0) = \min_{Q_0} g_0(Q_0), Q_0 \in W_0 \end{cases} \quad (28)$$

$$\beta_i = 1 - \frac{1}{Q_i} \sum_{j=R_i+1k=j+1}^{R_i+Q_i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda_i L_i)^k e^{-\lambda_i L_i}}{k!} \times \frac{k-j}{k} = 1 - \frac{1}{Q_i} \sum_{j=R_i+1k=j+1}^{R_i+Q_i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda_i L_i)^k e^{-\lambda_i L_i}}{k!} + \frac{1}{Q_i} \sum_{j=R_i+1k=j+1}^{R_i+Q_i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda_i L_i)^k e^{-\lambda_i L_i}}{k!} \times \frac{j}{k} \quad (30)$$

基于上述分析,模型 P 的最优化过程为如下。

第一步:定义 $\beta_i = a_i, i=0,1,\dots,N$ 。

第二步:分别求解 R -子问题和 Q -子问题以得到节点 i 的最优 (R_i, Q_i) 策略。

第三步:对于给定的 (R_i, Q_i) 库存策略,计算最优的订单满足率 β_i 。

第四步:若 $\sum_{i=0}^N |\beta_i^* - \beta_i| \leq \epsilon$ (ϵ 是任意给定的极小正数),停止;或者,令 $\beta_i = \beta_i^*$ 对于 $i=0,1,\dots,N$ 且回到第一步。

$$h_i^s \in U[1,5], \quad c_i = h_i^s \times U[10,20], \quad \lambda_i \in U[1,50], \quad T_i \in U[1,10], \quad s_i \in U[1,3] \quad (31)$$

首先,针对 R -子问题和 Q -子问题,分别产生 10 个随机算例,评估其最大计算时间和平均计算时间,计算结果见表 2。

表 2 表明对于 R -子问题和 Q -子问题,随着系统规模的逐渐增大,计算时间有所增加,但仍然很短,这表明算法具有很好的有效性和适应性。

式中:

$$d_i(Q_i) = \frac{c_i \lambda_i \beta_i}{Q_i} + \frac{H_i}{2} \times Q_i \quad (29)$$

这里, $d_i(Q_i)$ 为节点 i 的状态为 Q_i 时的库存成本, $V_i(Q_0)$ 为当节点 0 的状态为 Q_0 时, Q_i 的所有可行值集合, $Q_0 \in W(0)$ 。通过逆向递归,对于节点 i ,计算 $g_i(Q_i), i=N, N-1, \dots, 0, -1$, 其中, $g_{-1}(0)$ 即为 Q -子问题的最优解。在此基础上,通过回溯,得到各节点 i 的最优订货量 Q_i 。

3.3 最优化过程

根据之前的分析,模型 P 分解为 R -子问题和 Q -子问题是基于 β_i 为已知的假设,然而 β_i 往往是未知的。基于此,本部分首先提出在给定 (R, Q) 库存策略时计算 β_i 的方法,在此基础上,提出求解模型 P 的最优化方法。

首先,对于任意节点 $i(i=0,1,2,\dots,N)$ 来说,其净提前期 L_i 可以通过 3.1 节中对 R -子问题的求解得到。每当节点 i 发出订货后,其库存位势将到达 j 且 $j \in \{R_i+1, R_i+2, \dots, R_i+Q_i\}$, 订货将在提前期 L_i 之后到达。如果提前期的顾客总需求(表示为 k)超过库存位势 j , 即 $k \geq j+1$, 则必须通过柔性措施满足额外需求, 即 $k-j$ 。由于节点 i 的库存位势达到 j 的概率为 $1/Q_i$, 根据均匀分布的特性, β_i 可以通过下式计算:

4 算例分析

本节通过算例分析评估改进 GSA 模型及算法的有效性,这里采用 Visual Studio 6.0 编译器的 C++ 进行编码,所有算例均为系统随机产生。

4.1 改进 GSA 模型算例分析

为了检验改进 GSA 模型针对不同规模库存系统均有效,分别选取 $N=10, 20$ 和 50 三类库存系统进行验证,系统中参数的选取遵循式(31)的均匀分布函数随机产生。

表 2 R -子问题和 Q -子问题计算结果

Tab. 2 Computation results of R -problem and Q -problem

系统规模 N	最大计算时间(s) / 平均计算时间(s)	
	R -子问题	Q -子问题
10	0.003 13/0.002 02	0.004 7/0.004 2
20	0.005 12/0.003 03	0.017 4/0.011 7
50	0.081 88/0.016 88	0.017 8/0.013 8

其次,为了验证最优化过程算法的有效性,对于每类系统,分别计算其在顾客服务水平 α 为 0.8, 0.9 以及 0.98 下的最优解。针对随机产生的 10 个

算例,分别计算其最大计算时间、平均计算时间、最大迭代次数以及平均迭代次数,计算结果见表 3。

表 3 最优化过程计算结果

Tab. 3 Computation results of the optimization procedure

系统规模 N	顾客服务水平	最大结算时间(s)/平均结算时间(s)	最大迭代次数/平均迭代次数
10	0.80	0.279 9/0.119 3	4/3.8
	0.90	0.241 2/0.111 3	4/3.2
	0.98	0.157 5/0.116 5	3/3
20	0.80	1.472 6/0.708 4	4/4
	0.90	2.528 5/0.846 5	4/3.5
	0.98	1.359 9/0.570 6	3/3
50	0.80	4.476 0/3.218 1	4/4
	0.90	7.362 8/4.132 3	4/4
	0.98	5.382 3/3.804 5	3/3

通过表 3 可以看出,对于不同规模的库存系统,本文提出的模型及算法均能有效地求解问题,获得最优解。此外,迭代次数随系统服务水平的提高而降低,且最大迭代次数不超过 4,这表明算法具有很好的收敛性。

4.2 改进 GSA 与 SSA 方法对比分析

为了进一步检验本文模型和算法的有效性,这里采用 Li 和 Wu^[20]提出的 SSA 库存控制模型进行对比分析,通过两种方法分别计算系统的最优订货点 R 和最优订货量 Q ,评估其计算时间,并分别计算系统的最优柔性成本。计算结果见表 4 和表 5。

表 4 两种方法求解 R -子问题和 Q -子问题的计算结果

Tab. 4 Computation results of two methods for solving R -problem and Q -problem

模型	最大计算时间(s)/平均计算时间(s)	
	R -子问题	Q -子问题
SSA	0.074/0.051	0.083 / 0.72
改进 GSA	0.003 13/0.002 02	0.004 7 / 0.004 2

表 5 系统柔性成本的计算结果

Tab. 5 Computation results of the operation flexibility cost

α	p	柔性成本	
		SSA	改进 GSA
0.8	15	9.28	9.6
	50	20.93	20.4
	75	52.27	51.15
0.9	15	3.57	3.84
	50	6.93	6.8
	75	15.37	15.5

研究结论表明,在算法的计算时间上,本文提出的改进 GSA 模型具有一定的优势(见表 4);在最优解性质上,两种方法计算得出的系统柔性成本差异较小(见表 5),且最优柔性成本随着顾客服务水平 α 和单位柔性成本 p 的增加均呈现递减趋势。

5 结 论

本文研究了一类包含一个分销商和多个零售商的两级分销系统,顾客需求服从 Poisson 分布。与经典 GSA 方法仅考虑存货成本不同的是,本文构建了包含订货成本、存货成本和柔性成本的改进 GSA 方法的多级库存优化模型,这大大增加了模型的复杂度;其次,提出改进的动态规划算法和最优化方法对模型进行求解,实验结果验证了模型及算法的有效性。

为了进一步验证模型及算法的性能,今后的研究方一方面将考虑更为复杂的多级库存系统,例如三级分销系统、一般系统等;另一方面将考虑包含产品回收的闭环供应链结构。

参考文献:

- [1] CLARK A, SCARF H. Optimal policies for a multi-echelon inventory problem[J]. Management Science, 1990, 6(4):475-490.
- [2] 张道宏. 多周期随机性库存控制模型与方法[J]. 西安理工大学学报,1994,10(2):134-139.
ZHANG Daohong. The model and method of multi-cycle random inventory control[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 1994, 10(2): 134-139.
- [3] 邵帅,戴明强,张肖. 基于遗传算法的随机条件下多级库存管理研究[J]. 计算机与数字工程,2015,43(11): 1924-1928,1967.

- SHAO Shuai, DAI Mingqiang, ZHANG Xiao. Military multi-echelon inventory in random condition based on genetic algorithm[J]. *Computer & Digital Engineering*, 2015, 43(11): 1924-1928, 1967.
- [4] 宋志兰,徐七龙,孔民警,等. 供应链环境下多级库存成本优化模型研究[J]. *物流科技*, 2018, 41(6): 126-132.
- SONG Zhilan, XU Qilong, KONG Mingjing, et al. Study on optimization model of inventory cost based on the multi-echelon supply chain[J]. *Logistics Sci-Tech*, 2018, 41(6): 126-132.
- [5] 于明华,李弘,王建国. 供应链多级库存成本优化研究[J]. *物流工程与管理*, 2018, 40(7): 106-108.
- YU Minghua, LI Hong, WANG Jianguo. Study on multi-level inventory cost optimization of supply chain [J]. *Logistics Engineering and Management*, 2018, 40 (7): 106-108.
- [6] DE KOK T, GROB C, LAUMANN S M, et al. A typology and literature review on stochastic multi-echelon inventory models[J]. *European Journal of Operational Research*, 2018, 269(3): 955-983.
- [7] KIMBALL G. General principles of inventory control [J]. *Journal of Manufacturing and Operations Management*, 1998: 119-130.
- [8] SIMPSON JR K F. In-process inventories[J]. *Operations Research*, 1958, 6(6): 863-873.
- [9] GRAVES S, WILLEMS S. Optimizing strategic safety stock placement in supply chain[J]. *Manufacturing and Service Operations Management*, 2000, 2(1): 68-83.
- [10] HOWARD C, MARKLUND J. Evaluation of stock allocation policies in a divergent inventory system with shipment consolidation[J]. *European Journal of Operational Research*, 2011, 211(2): 298-309.
- [11] KLOSTERHALFEN S, DITTMAR D, MINNER S. An integrated guaranteed- and stochastic-service approach to inventory optimization in supply chains[J]. *European Journal of Operational Research*, 2013, 231 (1): 109-119.
- [12] KLOSTERHALFEN S, MINNER S. Safety stock optimization in distribution systems: a comparison of two competing approaches[J]. *International Journal of Logistics: Research and Applications*, 2010, 13 (2): 99-120.
- [13] GRAHL J, MINNER S, DITTMAR D. Meta-heuristics for placing strategic safety stock in multi-echelon inventory with differentiated service times[J]. *Annals of Operations Research*, 2016, 242(2): 489-504.
- [14] PUGA M S, MINNER S, TANCRES J S. Two-stage supply chain design with safety stock placement decisions[J]. *International Journal of Production Economics*, 2019, 209: 183-193.
- [15] PUGA M S, TANCRES J S. A heuristic algorithm for solving large location-inventory problems with demand uncertainty[J]. *European Journal of Operational Research*, 2017, 259(2): 413-423.
- [16] RAMBAU J, SCHADE K. The stochastic guaranteed service model with recourse for multi-echelon warehouse management[J]. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 2010, 36(3): 783-790.
- [17] RAMBAU J, SCHADE K. The stochastic guaranteed service model with recourse for multi-echelon warehouse management[J]. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2014, 79(3): 293-326.
- [18] DOGRU M K, DE KOK A G, VAN HOUTUM G J J A N. Optimal control of one-warehouse multi-retailer systems with discrete demand[R]. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, 2004.
- [19] LI Peng, CHEN Haoxun, CHE Ada. Optimal batch ordering policies for assembly systems with guaranteed service[J]. *International Journal of Production Research*, 2013, 51(20): 6275-6293.
- [20] LI Peng, WU Di. A comparison study of stochastic- and guaranteed- service approaches on safety stock optimization for multi serial systems[C]//IOP Conference Series: Earth and Environmental Science (ESMA 2017), 2017: 1-6.

(责任编辑 王绪迪)