

DOI:10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2020.01.011

Navier-Stokes/Navier-Stokes 耦合方程的时间解耦局部并行方法

张蕊¹, 张 翀², 李 剑¹

(1. 陕西科技大学 文理学院, 陕西 西安 710021;

2. 宝鸡文理学院 陕西省灾害监测与机理模拟重点实验室, 陕西 宝鸡 721013)

摘要: 针对 Navier-Stokes/Navier-Stokes 耦合方程, 本文提出了基于空间非迭代 Newton 格式的时间解耦局部并行方法。首先, 解耦耦合区域, 将耦合区域内 Navier-Stokes/Navier-Stokes 耦合方程的求解转换为子区域内非定常 Navier-Stokes 方程的求解。其次, 在空间上运用非迭代 Newton 格式线性校正, 时间上直接求解广义线性 Stokes 问题, 从而使得非线性方程转换为线性方程。最后, 剖分解耦后的两个子区域, 将子区域内单一非定常 Navier-Stokes 方程的求解转换为并行区域内的各自求解。数值实验表明: 与空间非迭代 Newton 格式的欧拉时间推进方法相比, 时间解耦的局部并行方法在保证精度的情况下, 运行时间较短, 在一定程度上提高了耦合问题的求解效率, 保证了其高效性。

关键词: Navier-Stokes/Navier-Stokes 耦合方程; 非定常 Navier-Stokes 方程; 空间非迭代的 Newton 格式; 欧拉时间推进方法; 时间解耦的局部并行方法

中图分类号: O241.82 **文献标志码:** A **文章编号:** 1006-4710(2020)01-0080-08

Local and parallel decoupled time stepping method for the Navier-Stokes/Navier-Stokes equations

ZHANG Rui¹, ZHANG Chong², LI Jian¹

(1. School of Arts and Sciences, Shaanxi University of Science and Technology, Xi'an 710021, China;

2. Shaanxi Key Laboratory of Disasters Monitoring and Mechanism Simulation, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721013, China)

Abstract: For the Navier-Stokes/Navier-Stokes coupling equations, a local and parallel decoupled time stepping method based on the spatial non-iterative Newton scheme is proposed. Firstly, the coupling domain is decoupled, the purpose of which is to convert the solution of the Navier-Stokes/Navier-Stokes coupling equation in the coupling domain into the solution of the nonstationary Navier-Stokes equations in the subdomains. Secondly, the non-iterative Newton scheme is used in the space for linear correction, with the generalized linear Stokes problem directly solved in time, thus the nonlinear equations being converted into the linear equations. Finally, the two subdomains after decoupling are decomposed. The solutions of a single nonstationary Navier-Stokes equations in the subdomains are transformed into the respective solutions in the parallel domain. Numerical experiments show that, compared with the Euler space-time method based on the spatial non-iterative Newton scheme, the local and parallel decoupled time stepping method has a shorter running time in ensuring accuracy. Therefore, the efficiency of solving the coupling problem is improved to a certain extent with its efficiency ensured.

Key words: Navier-Stokes/Navier-Stokes equations; nonstationary Navier-Stokes equations; spa-

收稿日期: 2019-12-18; 网络出版日期: 2020-04-23

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1294.n.20200423.0859.002.html>

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11771259); 陕西省科技厅自然科学基金基础研究计划资助项目(2018JQ4039)

第一作者: 张蕊, 女, 硕士生, 研究方向为偏微分方程的数值解法。E-mail: 970446107@qq.com

通信作者: 李剑, 男, 教授, 博导, 博士, 研究方向为不可压缩流高效稳定有限元及有限体积方法、新能源流体耦合问题计算方法、流体计算深度学习。E-mail: jiaaali@gmail.com

tial non-iterative Newton scheme; Euler time stepping method; local and parallel decoupled time stepping method

Navier-Stokes 方程^[1-2]描述的是粘性不可压缩流体动量守恒的运动方程,反映了粘性流体流动的基本力学规律,是粘性不可压缩流体的经典模型。复杂的自然现象不是单一 Navier-Stokes 方程所能刻画的,许多重要应用^[3]需要一种流体与另一种流体的多域、多物理耦合的数值解,因此了解多物理耦合的复杂模型是必不可少的,如描述两种流体耦合的 Navier-Stokes/Navier-Stokes 耦合方程。Navier-Stokes/Navier-Stokes 耦合方程是两个非定常 Navier-Stokes 方程在接口界面上通过耦合条件得到的复杂方程组,主要出现在气象学和海洋学等理论研究中。

至今,基于不同的格式与技术,国内外许多学者和科研人员提出了 Navier-Stokes/Navier-Stokes 耦合模型的串行求解方法^[4-9]。例如:Connors 等^[4]基于传统的非线性格式,运用解耦方法通过分析方法的稳定性与数值解收敛性,最终得到 Navier-Stokes/Navier-Stokes 耦合问题的数值解;Connors 等^[5]提出了 Navier-Stokes/Navier-Stokes 耦合方程的完全离散化形式,并证明该耦合方程在每个时间步长都保持稳定性等四条特性;Li 等^[7]运用空间非迭代的 Oseen 格式一步校正非线性项,将非线性问题转换为线性问题,从而求解 Navier-Stokes/Navier-Stokes 耦合方程的数值解;而 Zhang 等^[8]运用经典 Newton 迭代格式,采用相对应的解耦方法分析了流体耦合问题的稳定性与误差估计,理论证明了该解耦方法不仅无条件稳定并且长时间稳定,数值实验证明了方程数值解的收敛性。

对于含有接口边界条件的耦合方程,在数值模拟的过程中存在三大难点:较大的数据存储空间、较长的计算时间以及耦合信息的相互牵制。因此,随着社会的发展与科技的更新,需要借助计算机的并行计算技术实现快速求解,从而达到减少求解时间的目的。经典 Navier-Stokes 方程的并行方法^[10-15]已有很多,如 Liu 等^[11]提出了一种基于 Newton 迭代格式求解包含时间和空间 Navier-Stokes 方程的方法,通过比较不同时间步长的能量来选择合适的步长;尚月强等^[13]基于完全重叠型区域分解技巧,提出三种求解非定常 Navier-Stokes 方程的有限元并行算法;而 Zheng 等^[14]通过划分粗细网格,结合粗网格上的全局解与细网格上的局部解,提出了基于单元划分的局部和并行有限元算法,从而得到

定常 Navier-Stokes 方程的数值解。

目前,经典 Navier-Stokes 方程的并行方法越来越成熟,而对于 Navier-Stokes/Navier-Stokes 耦合方程,串行方法已有发展,但并行方法却研究较少。因此,根据两网格的单元划分局部并行方法^[14-15],基于空间非迭代 Newton 格式,提出一种求解 Navier-Stokes/Navier-Stokes 耦合方程的时间解耦局部并行方法。通过解耦复杂区域、处理边界条件以及划分并行区域,最终提出三个数值实验,以此验证空间非迭代 Newton 格式的优越性以及时间解耦局部并行方法的高效性。

1 Navier-Stokes/Navier-Stokes 耦合方程

考虑的 Navier-Stokes/Navier-Stokes 耦合方程为:

$$u_{i,t} - \nu_i \Delta u_i + u_i \cdot \nabla u_i + \nabla p_i = f_i \quad \text{in } \Omega_i, \quad (1)$$

$$-\nu_i n_i \cdot \nabla u_i \cdot \tau = \kappa |u_i - u_j| (u_i - u_j) \cdot \tau \quad \text{on } I, \quad (2)$$

$$u_i \cdot n_i = 0 \quad \text{on } I, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot u_i = 0 \quad \text{in } \Omega_i, \quad (4)$$

$$u_i(x, 0) = u_i^0(x) \quad \text{in } \Omega_i, \quad (5)$$

$$u_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_i = \partial \Omega_i \setminus I. \quad (6)$$

子区域 $\Omega_i \subset R^d, i = 1, 2, d = 2, 3$, 耦合区域 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, 其中 I 为接口界面, n_1, n_2 为单位外法向量。给定参数 κ , 粘性系数 $\nu_i > 0$ 。速度 $u_i: \Omega_i \times [0, T] \rightarrow R^d$, 压力 $p_i: \Omega_i \times [0, T] \rightarrow R$, 体积力 $f_i: [0, T] \rightarrow [H^1(\Omega_i)]^d$ 。方程的耦合区域如图 1 所示。

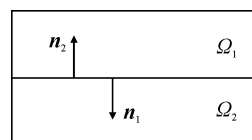


图 1 区域耦合图

Fig. 1 The coupled domain

为了求解 Navier-Stokes/Navier-Stokes 耦合方程,提出 Hilbert 空间:

$$X_i = \{v_i \in [H^1(\Omega_i)]^d : v_i = 0 \text{ on } \Gamma_i; v_i \cdot n_i = 0 \text{ on } I\},$$

$$M_i = \left\{ q_i \in L^2(\Omega_i) : \int_{\Omega_i} q_i \, d\Omega_i = 0 \right\}.$$

运用格林公式,有式(1)~(6)的变分形式:求解 $(u_i, p_i) \in X_i \times M_i$ 使得 $(v_i, q_i) \in X_i \times M_i$ 满足:

$$(u_{i,t}, v_i) + a(u_i, v_i) + \int_I \kappa |[\mathbf{u}]| [\mathbf{u}] v_i ds + (7)$$

$$b(u_i, u_i, v_i) - d(v_i, p_i) = (f_i, v_i), \\ d(u_i, q_i) = 0. \quad (8)$$

其中 $(u_{i,t}, v_i) = \int_{\Omega_i} \frac{\partial u_i}{\partial t} v_i dx$, $[\cdot]$ 表示指示量在接口界面 I 的跳跃,即 $[\mathbf{u}] = |u_i - u_j|, i, j = 1, 2$ 。

双线性项 $a(\cdot, \cdot)$ 与 $d(\cdot, \cdot)$ 定义在 $X_i \times X_i$ 与 $X_i \times M_i$ 上:

$$a(u_i, v_i) = \nu_i (\nabla u_i, \nabla v_i), u_i, v_i \in X_i, \\ d(v_i, q_i) = -(v_i, \nabla q_i) = (\operatorname{div} v_i, q_i), v_i \in X_i, q_i \in M_i. \\ \text{并且满足条件:}$$

$$|a(u_i, v_i)| \leq \nu_i \|\nabla u_i\|_0 \|\nabla v_i\|_0, \\ |d(v_i, q_i)| \leq C \|\nabla v_i\|_0 \|q_i\|_0, \\ \sup_{v_i \in X_i} \frac{|d(v_i, q_i)|}{\|\nabla v_i\|_0} \geq \beta \|q_i\|_0, \forall q_i \in M_i.$$

这里, C 为常数, $\beta > 0$ 。

三线性项 $b(\cdot, \cdot, \cdot)$ 定义在 $X_i \times X_i \times X_i$ 上:

$$b(u_i, v_i, w_i) = (u_i \cdot \nabla v_i, w_i) + \frac{1}{2} ((\operatorname{div} u_i) v_i, w_i) = \\ \frac{1}{2} (u_i \cdot \nabla v_i, w_i) + \frac{1}{2} (u_i \cdot \nabla w_i, v_i).$$

并且有性质:

$$b(u_i, v_i, w_i) \leq N \|\nabla u_i\|_0 \|\nabla v_i\|_0 \|\nabla w_i\|_0, \\ b(u_i, v_i, w_i) = -b(u_i, w_i, v_i), u_i, v_i, w_i \in X_i.$$

$$\text{其中, } N = \sup_{u, v, w \in X_i} \frac{|b(u, v, w)|}{\|\nabla u\|_0 \|\nabla v\|_0 \|\nabla w\|_0}.$$

解决实际问题是需要考虑多方面因素的,针对 Navier-Stokes/Navier-Stokes 耦合模型,本文仅讨论模型的并行算法。

2 空间非迭代 Newton 格式的欧拉时间推进方法

定义区域网格剖分: $h > 0$ 表示网格尺度, τ_h 表示正则三角形剖分。有限元 $K \in \tau_h$ 满足 $h = \max \operatorname{diam}(K)$, 有限元序对 $P_1 b - P_1$ 空间的定义为:

$$X_i^h = \{v_i \in X_i : \forall K \in \tau_h, v_i|_K \in P_1 \oplus \operatorname{Span}\{\lambda_0^k, \lambda_1^k, \lambda_2^k\}\}, \\ M_i^h = \{q_i \in M_i : \forall K \in \tau_h, q_i|_K \in P_1\}.$$

并且满足有限元逼近性质:

1) 对于 $v_i \in X_i, q_i \in H^1(\Omega_i) \cap M_i$, 有限元的逼近 $I_h v_i \in X_i^h, J_h q_i \in M_i^h$ 使得

$$|v_i - I_h v_i|_1 \leq Ch \|\nabla v_i\|_0, \quad \|q_i - J_h q_i\|_0 \leq Ch \|\nabla q_i\|_1.$$

2) 对于任意的 $v_i^h \in X_i^h, q_i^h \in M_i^h$, 有逆不等式成立

$$|v_i^h|_1 \leq Ch^{-1} \|v_i^h\|_0, \quad |q_i^h|_1 \leq Ch^{-1} \|q_i^h\|_0.$$

设置时间步长为 $\Delta t > 0$, 其中 $t^n = n\Delta t, n = 0, 1, \dots, N, \Delta t = T/N$ 。令耦合方程的近似解 $(u_i^n, p_i^n) := (u_{i,h}^n, p_{i,h}^n)$, 并且有

$$\|u_{i,\Delta t}(t) - u_{i,\Delta t}\|_{L^2(\Omega)} := \\ \left(\Delta t \sum_{j=0}^n \|u_i(t^{j+1}) - u_i^{j+1}\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

针对 Navier-Stokes/Navier-Stokes 耦合模型, 本文在每个时间步长上采用空间非迭代的形式, 即在每个时间步长的求解过程中取消了计算相邻两次迭代数值解 u_i, p_i 的误差。而对于三线性项, 主要运用 Newton 格式 $b(u^n, u^{n+1}, v) + b(u^{n+1}, u^n, v) - b(u^n, u^n, v)$ 、一步线性校正非线性项 $b(u^{n+1}, u^{n+1}, v)$ 以及运用标准几何平均跳跃^[4] $u_i^n |u_i^n - u_i^{n+1}|^{\frac{1}{2}} |u_i^{n-1} - u_i^{n+1}|^{\frac{1}{2}}$ 来处理耦合边界式(2)。

算法 1 (空间非迭代 Newton 格式的欧拉时间推进方法)

第 1 步 求解 $(u_i^0, p_i^0) \in X_i^h \times M_i^h$, 使得 $(v_i, q_i) \in X_i^h \times M_i^h$ 满足线性 Stokes 方程:

$$a(u_i^0, v_i) - d(v_i, p_i^0) + d(u_i^0, q_i) = (f_i, v_i).$$

第 2 步 令体积力 $f_i \in [H^{-1}(\Omega_i)]^d$, 求解 $(u_i^{n+1}, p_i^{n+1}) \in X_i^h \times M_i^h$ 使得 $(v_i, q_i) \in X_i^h \times M_i^h$ 满足

$$\left(\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}, v_i \right) + a(u_i^{n+1}, v_i) + \\ b(u_i^n, u_i^{n+1}, v_i) + b(u_i^{n+1}, u_i^n, v_i) - b(u_i^n, u_i^n, v_i) + \\ \kappa \int_I |[\mathbf{u}^n]| u_i^{n+1} v_i ds - \kappa \int_I |[\mathbf{u}^n]|^{\frac{1}{2}} |[\mathbf{u}^{n-1}]|^{\frac{1}{2}} u_i^n v_i ds - \\ d(v_i, p_i^{n+1}) + d(u_i^{n+1}, q_i) = (f_i(t^{n+1}), v_i). \quad (9)$$

3 时间解耦的局部并行方法

基于空间非迭代 Newton 格式的欧拉时间推进方法, 给出其对应格式的时间解耦局部并行方法。

通过解耦接口界面 I , 将耦合区域 Ω 内 Navier-Stokes/Navier-Stokes 方程的求解转换为子区域 Ω_i 内非常常 Navier-Stokes 方程的求解。方程解耦后的区域如图 2 所示。

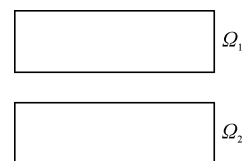


图 2 区域解耦图

Fig. 2 The decoupled domain

定义 $\bar{u}_i^{h,0} = P_h u_i^0$, 其中 P_h 为 L^2 -正交投影: $[L^2(\Omega)]^d \rightarrow X_i^h$, 并且满足:

$$(P_h w, v_h) = (w, v_h), \quad \forall w \in [L^2(\Omega)]^d, v_h \in X_i^h.$$

对于子区域 Ω_i , 需要求解的非定常 Navier-Stokes 方程为:

求解 $(\bar{u}_i^{h,n+1}, \bar{p}_i^{h,n+1}) \in X_i^h \times M_i^h$, 使得 $(v_i, q_i) \in X_i^h \times M_i^h$ 满足:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\bar{u}_i^{h,n+1} - \bar{u}_i^{h,n}}{\Delta t}, v_i \right) + a(\bar{u}_i^{h,n+1}, v_i) + b(\bar{u}_i^{h,n}, \bar{u}_i^{h,n+1}, v_i) + \\ & b(\bar{u}_i^{h,n+1}, \bar{u}_i^{h,n}, v_i) - b(\bar{u}_i^{h,n}, \bar{u}_i^{h,n}, v_i) - \\ & d(v_i, \bar{p}_i^{h,n+1}) + d(\bar{u}_i^{h,n+1}, q_i) = (f_i(t^{n+1}), v_i). \end{aligned}$$

设子区域 Ω_i 中的并行区域为 $\Omega_{i,k_i}, k_i = 1, \dots, N_i$, 其上的区域分解基函数为 $\{\varphi_{i,k_i}\}_{k_i=1}^{N_i}$, 并且满足条件^[16]:

$$\begin{aligned} \Omega_i &= \bigcup_{k_i=1}^{N_i} \Omega_{i,k_i}, \quad i = 1, 2, \\ \text{supp} \varphi_{i,k_i} &\subseteq \bar{\Omega}_{i,k_i}, \\ \sum_{k_i=1}^{N_i} \varphi_{i,k_i} &\equiv 1 \text{ on } \Omega_i. \end{aligned}$$

而针对解耦后的接口界面, 根据耦合区域 Ω 和子区域 Ω_i 的边界条件方程(2)、(3)、(6)式, 设置并行区域 Ω_{i,k_i} 的边界条件:

1) 并行区域为耦合边界, 设置式(2)为并行区域的边界条件;

2) 并行区域为人工边界, 则由如下的第一类边界条件代替:

$$\{u_i^{n+1} \mid \partial \Omega_{i,k} = u_i^n, u_i^n, u_i^{n+1} \in X_i^h, i = 1, 2\}. \quad (10)$$

3) 并行区域为混合边界, 结合耦合边界式(2)与人工边界式(10)进行求解。

为了区别耦合方程的计算, 定义残差:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_i^{n+1} &= \bar{u}_i^{h,n+1} - \bar{u}_i^{h,n}, i = 1, 2, \\ \bar{\eta}_i^{n+1} &= \bar{p}_i^{h,n+1} - \bar{p}_i^{h,n}, n = 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

则子区域 Ω_i 内的方程为: 求解 $(\bar{\epsilon}_i^{n+1}, \bar{\eta}_i^{n+1}) \in X_i^h \times M_i^h$ 使得 $(v_i, q_i) \in X_i^h \times M_i^h$ 满足:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\bar{\epsilon}_i^{n+1}}{\Delta t}, v_i \right) + a(\bar{\epsilon}_i^{n+1}, v_i) + b(\bar{u}_i^{h,n}, \bar{\epsilon}_i^{n+1}, v_i) + \\ & b(\bar{\epsilon}_i^{n+1}, \bar{u}_i^{h,n}, v_i) - b(\bar{u}_i^{h,n}, \bar{u}_i^{h,n}, v_i) - \\ & d(v_i, \bar{\eta}_i^{n+1}) + d(\bar{\epsilon}_i^{n+1}, q_i) = (f_i(t^{n+1}), v_i) - \\ & a(\bar{u}_i^{h,n}, v_i) - d(\bar{u}_i^{h,n}, q_i) + d(v_i, \bar{p}_i^{h,n}) - \\ & b(\bar{u}_i^{h,n}, \bar{u}_i^{h,n}, v_i) - b(\bar{u}_i^{h,n}, \bar{u}_i^{h,n}, v_i). \end{aligned} \quad (11)$$

基于叠加原理, 式(11)转换为如下问题之和: 求

解 $(\bar{\epsilon}_{i,k_i}^{n+1}, \bar{\eta}_{i,k_i}^{n+1}) \in X_i^h(\Omega_{i,k_i}) \times M_i^h(\Omega_{i,k_i})$ 使得 $(v_i, q_i) \in X_i^h(\Omega_{i,k_i}) \times M_i^h(\Omega_{i,k_i})$ 满足:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\bar{\epsilon}_{i,k_i}^{n+1}}{\Delta t}, v_i \right) + a(\bar{\epsilon}_{i,k_i}^{n+1}, v_i) - d(v_i, \bar{\eta}_{i,k_i}^{n+1}) + d(\bar{\epsilon}_{i,k_i}^{n+1}, q_i) + \\ & b(\bar{u}_i^{h,n}, \bar{\epsilon}_{i,k_i}^{n+1}, v_i) + b(\bar{\epsilon}_{i,k_i}^{n+1}, \bar{u}_i^{h,n}, v_i) - b(\bar{u}_i^{h,n}, \bar{u}_i^{h,n}, v_i) = \\ & (f_i(t^{n+1}), v_i) - d(\bar{u}_i^{h,n}, q_i) + d(v_i, \bar{p}_i^{h,n}) - \\ & a(\bar{u}_i^{h,n}, v_i) - b(\bar{u}_i^{h,n}, \bar{u}_i^{h,n}, v_i) - b(\bar{u}_i^{h,n}, \bar{u}_i^{h,n}, v_i). \end{aligned}$$

$$\text{其中, } \bar{\epsilon}_i^{n+1} = \sum_{k_i=1}^{N_i} \bar{\epsilon}_{i,k_i}^{n+1}, \bar{\eta}_i^{n+1} = \sum_{k_i=1}^{N_i} \bar{\eta}_{i,k_i}^{n+1}.$$

因此, 结合区域分解基函数与并行区域的边界条件, 提出空间非迭代 Newton 格式的时间解耦局部并行算法。

算法 2 (空间非迭代 Newton 格式的时间解耦局部并行方法)

第 1 步 设置并行计算的初值:

$$\bar{u}_i^{h,0} = P_h u_i^0, \bar{p}_i^{h,0} = p_i^0.$$

第 2 步 定义并行区域 Ω_{i,k_i} 内需要求解的方程:

对于 $0 \leq n \leq N, k_i = 1, 2, \dots, N_i$, 求解 $\bar{\epsilon}_{i,k_i}^{n+1} \in X_i^h(\Omega_{i,k_i}), \bar{\eta}_{i,k_i}^{n+1} \in M_i^h(\Omega_{i,k_i})$, 使得对所有的 $(v_i, q_i) \in X_i^h(\Omega_{i,k_i}) \times M_i^h(\Omega_{i,k_i})$ 满足:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\bar{\epsilon}_{i,k_i}^{n+1}}{\Delta t}, v_i \right) + a(\bar{\epsilon}_{i,k_i}^{n+1}, v_i) + b(\bar{u}_i^{h,n}, \bar{\epsilon}_{i,k_i}^{n+1}, v_i) + \\ & b(\bar{\epsilon}_{i,k_i}^{n+1}, \bar{u}_i^{h,n}, v_i) + d(\bar{\epsilon}_{i,k_i}^{n+1}, q_i) - d(v_i, \bar{\eta}_{i,k_i}^{n+1}) - \\ & b(\bar{u}_i^{h,n}, \bar{u}_i^{h,n}, v_i) = (f_i(t^{n+1}), v_i) - a(\bar{u}_i^{h,n}, v_i) - \\ & d(\bar{u}_i^{h,n}, q_i) + d(v_i, \bar{p}_i^{h,n}) - 2b(\bar{u}_i^{h,n}, \bar{u}_i^{h,n}, v_i). \end{aligned}$$

第 3 步 基于局部并行区域的数值解, 引入区域基函数, 得到耦合方程的近似解:

$$\begin{aligned} \bar{u}_i^{h,n+1} &= \bar{u}_i^{h,n} + \sum_{k_i=1}^{N_i} \varphi_{i,k_i} \bar{\epsilon}_{i,k_i}^{n+1}, \\ \bar{p}_i^{h,n+1} &= \bar{p}_i^{h,n} + \sum_{k_i=1}^{N_i} \varphi_{i,k_i} \bar{\eta}_{i,k_i}^{n+1}. \end{aligned}$$

4 数值实验

为了验证空间非迭代 Newton 格式的时间解耦局部并行方法的高效性, 提出如下数值实验。所有实验使用的计算机 CPU 型号为 Inter 酷睿 i7-8700 @3.20Hz, 8GB 内存。网格采用三角形单元, 有限元类型为 $P_1 b - P_1$ 。Navier-Stokes/Navier-Stokes 耦合方程的精确解^[4,8]为:

$$p_1(t, x, y) = p_2(t, x, y) = e^{-t} \cos(\pi x) \sin(\pi y),$$

$$u_{1,1}(t, x, y) = -\alpha x^2 e^{-t} (x-1)^2 (y-1),$$

$$u_{1,2}(t, x, y) = \alpha x y e^{-t} (2x^2 y - 4x^2 - 3xy + 6x + y - 2),$$

$$u_{2,1}(t, x, y) = -\alpha x e^{-t}(x-1) \left(y^2 x(x-1) \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} + 1 \right) - \frac{\mu_1^{\frac{1}{2}} y^2 e^{\frac{t}{2}}}{(\alpha \kappa)^{\frac{1}{2}}} - x(x-1) + \frac{\mu_1^{\frac{1}{2}} e^{\frac{t}{2}}}{(\alpha \kappa)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\mu_1 x y (x-1)}{\mu_2} \right),$$

$$u_{2,2}(t, x, y) = -\frac{\alpha y e^{-t}(2x-1)}{3\mu_2 (\alpha \kappa)^{\frac{1}{2}}} (6\mu_2 x^2 (\alpha \kappa)^{\frac{1}{2}} - 6\mu_2 x (\alpha \kappa)^{\frac{1}{2}} - 3\mu_1^{\frac{1}{2}} \mu_2 e^{\frac{t}{2}} - 2\mu_1 x^2 y^2 (\alpha \kappa)^{\frac{1}{2}} - 2\mu_2 x^2 y^2 (\alpha \kappa)^{\frac{1}{2}} + 2\mu_1 x y^2 (\alpha \kappa)^{\frac{1}{2}} + 3\mu_1 x y (\alpha \kappa)^{\frac{1}{2}} - 3\mu_1 x^2 y (\alpha \kappa)^{\frac{1}{2}} + 2\mu_2 x y^2 (\alpha \kappa)^{\frac{1}{2}} + \mu_1^{\frac{1}{2}} \mu_2 y^2 e^{\frac{t}{2}}).$$

假设 $\Omega_1 = [0, 1] \times [0, 1]$, $\Omega_2 = [0, 1] \times [-1, 0]$, 其中边界 I 是 x 轴上 0 到 1 的位置, 外法向量 $\mathbf{n}_1 = [0, -1]^T$, $\mathbf{n}_2 = [0, 1]^T$ 。给定耦合方程中的部分参数为:

粘性系数 $\nu_1 = 0.5, \nu_2 = 0.05$, 时间总长 $T = 1$, 系数 $\alpha = 1, \kappa = 100$ 。

并且速度 u_i 与压力 p_i 的误差计算公式为:

$$Err(u_i) = \left(\Delta t \sum_{n=1}^N \left\| \nabla(u_i(t^{n+1}) - \bar{u}_i^{h,n+1}) \right\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$Err(p_i) = \left(\Delta t \sum_{n=1}^N \left\| p_i(t^{n+1}) - \bar{p}_i^{h,n+1} \right\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

第一, 通过比较不同格式求解耦合方程的求解时间, 说明空间非迭代 Newton 格式的优越性。固定子区域 Ω_i 的网格剖分 $h = 1/30$, 时间步长 $\Delta t = 0.01$, 比较空间非迭代 Newton 格式与 Newton 迭代格式、Oseen 迭代格式、Simple 迭代格式的求解时间, 结果如表 1 所示。

表 1 四种格式的误差和时间对比结果

Tab. 1 The error and time of four schemes

格式	$Err(u_1)$	$Err(u_2)$	$Err(p_1)$	$Err(p_2)$	时间/s
空间非迭代 Newton 格式	0.017 2	0.071 2	0.001 9	0.001 7	151.60
Newton 迭代格式	0.017 2	0.071 2	0.001 9	0.001 7	165.40
Oseen 迭代格式	0.017 2	0.071 3	0.001 9	0.001 7	160.77
Simple 迭代格式	0.017 2	0.071 3	0.001 9	0.001 7	167.68

通过表 1 可以发现: 四种格式的误差精度相差较小, 但在时间方面, 当固定网格剖分 h 与时间步长 Δt 时, 本文所选的空间非迭代 Newton 格式在求解 Navier-Stokes/Navier-Stokes 耦合方程时运行时间相对较短。

第二, 给出算法 1 关于空间与时间同时离散的误差与时间结果。设置时间步长 $\Delta t = h$, 选择子区域 Ω_i 的网格剖分 h 为 $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$, 从而算法 1 的结果如表 2、表 3 所示。

表 2 算法 1 的速度误差结果

Tab. 2 The velocity error of the method I

$1/h$	$Err(u_1)$	收敛阶	$Err(u_2)$	收敛阶
4	0.197 0		0.826 3	
8	0.086 0	1.194 6	0.359 3	1.201 3
16	0.038 0	1.180 8	0.157 7	1.188 5
32	0.017 4	1.128 5	0.071 9	1.131 8

表 3 算法 1 的压力误差和时间结果

Tab. 3 The pressure error and time of the method I

$1/h$	$Err(p_1)$	收敛阶	$Err(p_2)$	收敛阶	时间/s
4	0.023 0		0.023 6		0.55
8	0.011 4	1.010 7	0.008 5	1.473 7	3.27
16	0.004 7	1.285 0	0.003 1	1.441 9	24.55
32	0.001 8	1.404 2	0.001 2	1.350 7	180.17

表 2、表 3 的误差结果验证了数值解速度 u_i 与压力 p_i 的收敛阶均达到了一阶, 符合耦合方程的收敛理论^[7]。但随着子区域网格剖分的增大, Navier-Stokes/Navier-Stokes 耦合方程的运行时间会越来越长。

第三, 为了说明算法 2 的高效性, 分别运用算法 1 与算法 2 求解 Navier-Stokes/Navier-Stokes 耦合方程, 以此从两个方面比较两种方法的求解时间。首先, 分别固定时间步长 $\Delta t = 0.1, \Delta t = 0.01$, 改变网格剖分 h 为 $\frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{40}$, 比较算法 1 与算法 2 的求解时间, 结果如表 4、表 5 所示。

表 4 时间步长 $\Delta t = 0.1$ 的时间对比结果

Tab. 4 The time results with the time step $\Delta t = 0.1$

$1/h$	算法 1 时间/s	算法 2 时间/s	两种方法的比较	
			差值/s	百分比/%
10	2.06	0.92	1.14	55
20	8.31	3.84	4.47	54
30	18.17	9.58	8.59	47
40	31.94	18.04	13.87	43

表 5 时间步长 $\Delta t=0.01$ 的时间对比结果Tab. 5 The time results with the time step $\Delta t=0.01$

$1/h$	算法 1 时	算法 2 时	两种方法的比较	
	间/s	间/s	差值/s	百分比/%
10	19.95	12.06	7.89	40
20	79.71	44.18	35.53	46
30	151.61	106.31	45.30	30
40	271.95	199.87	72.08	27

通过表 4、表 5 可以看出:与算法 1 相比,当给定时间步长 Δt 时,算法 2 节省了 25% 以上的时间,而最大节省时间达到 50%。从而说明,固定时间步长 Δt , 改变区域的网格剖分 h , 算法 2 的求解时间更短。

其次,分别固定网格剖分 $h = \frac{1}{10}, h = \frac{1}{30}$, 改变时间步长 Δt 为 0.1、0.05、0.025、0.0125, 得到时间结果如表 6、表 7 所示。

表 6 网格剖分 $h=1/10$ 的时间结果Tab. 6 The time results with the mesh size $h=1/10$

Δt	算法 1 时	算法 2 时	两种方法的比较	
	间/s	间/s	差值/s	百分比/%
0.1	2.06	0.92	1.14	55
0.05	3.84	1.93	1.91	50
0.025	7.47	5.12	2.35	32
0.0125	14.32	8.05	6.27	44

表 7 网格剖分 $h=1/30$ 的时间结果Tab. 7 The time results with the mesh size $h=1/30$

Δt	算法 1 时	算法 2 时	两种方法的比较	
	间/s	间/s	差值/s	百分比/%
0.1	18.17	9.58	8.59	47
0.05	33.20	20.10	13.10	39
0.025	63.37	50.36	13.01	21
0.0125	122.30	80.76	41.54	34

从表 6、表 7 可以看出:与算法 1 相比,算法 2 求解 Navier-Stokes/Navier-Stokes 耦合方程的运行时间相对较短,减少了 40% 左右的运行时间。从而说明当网格剖分 h 不变时,改变时间步长 Δt , 并行算法的求解时间相对较短,即收敛速度较快。

最后,固定时间步长 $\Delta t = 0.01$, 改变网格剖分 h 为 $\frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{40}$, 得到误差结果如表 8 所示。

表 8 两种算法的误差对比结果

Tab. 8 The error results of two algorithms

数值解 误差	算法 1			算法 2		
	$1/h=$ 20	$1/h=$ 30	$1/h=$ 40	$1/h=$ 20	$1/h=$ 30	$1/h=$ 40
$Err(u_1)$	0.026	0.017	0.013	0.025	0.017	0.013
收敛阶		1.004	1.003		1.009	1.006
$Err(u_2)$	0.107	0.071	0.053	0.105	0.070	0.052
收敛阶		1.008	1.004		1.010	1.006
$Err(p_1)$	0.004	0.002	0.001	0.004	0.002	0.001
收敛阶		1.528	1.510		1.511	1.473
$Err(p_2)$	0.004	0.002	0.001	0.004	0.002	0.001
收敛阶		1.860	1.671		1.855	1.661

综合表 4~表 8 的数值结果可以发现:在保证误差精度与收敛阶的前提下,随着时间步长 Δt 或网格剖分 h 的改变,运用算法 2 求解 Navier-Stokes/Navier-Stokes 耦合方程的计算时间明显较短。随着解耦后并行区域 Ω_{i,k_i} 的增加,并行算法的优越性会越来越明显。

第四,为了说明不同粘性系数下,算法 2 关于时间与空间的收敛阶情况,设置 $\Delta t = h$, 分别针对粘性系数 $\nu_1 = 0.05, \nu_2 = 0.5$ 与 $\nu_1 = 0.05, \nu_2 = 0.05$, 运用算法 2 进行求解,得到相应的数值结果,如表 9~表 12 所示。

表 9 $\nu_1 = 0.05, \nu_2 = 0.5$ 时的速度误差Tab. 9 The velocity error of $\nu_1 = 0.05, \nu_2 = 0.5$

$1/h$	$Err(u_1)$	收敛阶	$Err(u_2)$	收敛阶
10	0.057 0		0.056 5	
20	0.025 6	1.152 4	0.030 7	0.881 0
30	0.016 8	1.044 5	0.021 0	0.935 3
40	0.012 5	1.013 2	0.015 9	0.955 0

表 10 $\nu_1 = 0.05, \nu_2 = 0.5$ 时的压力误差Tab. 10 The pressure error of $\nu_1 = 0.05, \nu_2 = 0.5$

$1/h$	$Err(p_1)$	收敛阶	$Err(p_2)$	收敛阶
10	0.002 7		0.009 7	
20	0.000 8	1.695 0	0.003 7	1.384 0
30	0.000 4	1.650 2	0.002 1	1.462 1
40	0.000 3	0.591 9	0.001 3	1.479 9

表 11 $\nu_1 = 0.05, \nu_2 = 0.05$ 时的速度误差Tab. 11 The velocity error of $\nu_1 = 0.05, \nu_2 = 0.05$

$1/h$	$Err(u_1)$	收敛阶	$Err(u_2)$	收敛阶
10	0.057 2		0.076 7	
20	0.025 8	1.148 6	0.038 0	1.012 0
30	0.016 9	1.042 4	0.025 6	0.098 1
40	0.012 6	1.011 9	0.019 3	0.097 8

表 12 $\nu_1 = 0.05, \nu_2 = 0.05$ 时的压力误差Tab. 12 The pressure error of $\nu_1 = 0.05, \nu_2 = 0.05$

$1/h$	$Err(p_1)$	收敛阶	$Err(p_2)$	收敛阶
10	0.002 8		0.003 2	
20	0.000 9	1.651 0	0.001 1	1.595 8
30	0.000 5	1.572 0	0.000 6	1.480 8
40	0.000 3	1.487 9	0.000 4	1.360 9

通过观察可以发现:改变粘性系数 ν_1, ν_2 时,算法 2 关于时间与空间同时离散的收敛阶均为一阶,符合收敛性理论。

第五,为了体现 Navier-Stokes/Navier-Stokes 耦合方程及其方法的现实意义,运用算法 1 求解 Navier-Stokes/Navier-Stokes 耦合方程的一个实际问题,即暗礁问题。区域 1 表示地面位置,区域 2 表示海底位置,这种情况下区域 2 是非凸的,因此设置两个区域:

$$\Omega_1 = [0, 1] \times [0, 0.1],$$

$$\Omega_2 = \left\{ (x, y): \frac{7}{40}(1 - (2x - 1)\sin(7x - 3.5)) \leq y \leq 0 \right\}.$$

以及 Navier-Stokes/Navier-Stokes 耦合方程的初始条件为:

$$p_1(0, x, y) = p_2(0, x, y) = \cos(\pi x) \sin(\pi y),$$

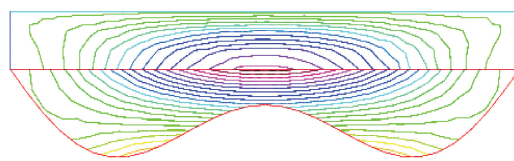
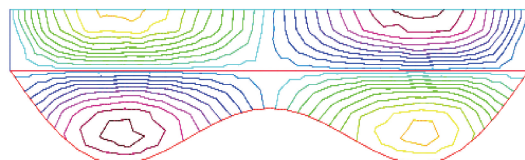
$$u_{1,1}(0, x, y) = x^2(1 - x)^2(0.1 - y),$$

$$u_{1,2}(0, x, y) = xy(-0.2 + y + 0.6x - 3xy - 0.4x^2 - 2x^2y),$$

$$u_{2,1}(0, x, y) = x^2(1 - x)^2(0.1 + y),$$

$$u_{2,2}(0, x, y) = xy(-0.2 - y + 0.6x + 3xy - 0.4x^2 - 2x^2y).$$

由于海底位置的流体粘度大于地面位置的粘度,因此,设置粘度系数 $\nu_1 = 0.05, \nu_2 = 0.5$, 网格剖分 $h = \frac{1}{50}$ 。最终给出当 $T = 5, \kappa = 100$ 时数值解在 x, y 轴的速度分量图,如图 3、图 4 所示。通过观察可以发现,该方法是稳定的,不会存在物理震荡。这说明在实际问题中,海底暗礁的存在会影响流体的流动。

图 3 x 轴的速度分量图Fig. 3 x -axis component plot of velocity图 4 y 轴的速度分量图Fig. 4 y -axis component plot of velocity

5 结 语

本文针对 Navier-Stokes/Navier-Stokes 耦合模型,基于空间非迭代 Newton 格式,提出了相对应的时间解耦局部并行方法。

通过解耦区域,剖分子区域网格,确定并行区域的大小,将 Navier-Stokes/Navier-Stokes 耦合方程转换为各自并行区域上的单一非定常 Navier-Stokes 方程进行求解。在空间上运用非迭代 Newton 格式线性校正,时间上直接求解广义线性 Stokes 问题。通过比较串行算法与并行算法求解耦合方程的求解时间与误差精度,可以发现:无论是缩小时间步长,还是减小网格尺寸,空间非迭代 Newton 格式的时间解耦局部并行算法在取得与串行算法相同精度的情况下,求解时间明显减少,即收敛速度相对较快。在一定程度上体现了空间非迭代 Newton 格式的时间解耦局部并行方法的高效性,为耦合模型的并行计算提供了参考。

参考文献:

- [1] LI J, HE Y N, CHEN Z X. A new stabilized finite element method for the transient Navier-Stokes equations [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007, 197(1-4):22-35.
- [2] HE Y N, LI J. Numerical comparisons of time-space iterative method and spatial iterative methods for the stationary Navier-Stokes equations[J]. Journal of Computational Physics, 2012, 231(20): 6790-6800.
- [3] 宋刚福, 沈冰. 基于水功能区划的河流生态环境需水量

- 计算研究[J]. 西安理工大学学报, 2012, 28(1): 49-55.
- SONG Gangfu, SHEN Bing. Calculation research on river eco-environmental water requirements based on water function regionalization[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2012, 28(1): 49-55.
- [4] CONNORS J M, HOWELL J S, LAYTON W J. Decoupled time stepping methods for fluid-fluid interaction[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2012, 50(3): 1297-1319.
- [5] CONNORS J M, HOWELL J S. A fluid-fluid interaction method using decoupled subproblems and differing time steps[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2012, 28(4): 1283-1308.
- [6] LAYTON W, TRAN H, TRENCH C. Analysis of long time stability and errors of two partitioned methods for uncoupling evolutionary groundwater-surface water flows[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2013, 51(1): 248-272.
- [7] LI J, HUANG P Z, SU J, et al. A linear, stabilized, non-spatial iterative, partitioned time stepping method for the nonlinear Navier-Stokes/Navier-Stokes interaction model[J]. Boundary Value Problems, 2019, (1): 1-19.
- [8] ZHANG Y H, HOU Y R, SHAN L. Stability and convergence analysis of a decoupled algorithm for a fluid-fluid interaction problem[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2016, 54(5): 2833-2867.
- [9] BERNARDI C, REBOLLO T C, LEWANDOWSKI R, et al. A model for two coupled turbulent fluids Part II: numerical analysis of a spectral discretization[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2003, 40(6): 2368-2394.
- [10] 尚月强, 何银年. 不可压缩流动的并行数值方法[J]. 中国科学: 数学, 2013, 43(6): 577-590.
- SHANG Yueqiang, HE Yinnian. Parallel numerical methods for incompressible flows[J]. Scientia Sinica (Mathematica), 2013, 43(6): 577-590.
- [11] LIU Q F, HOU Y R, LIU Q C. A two-level method in time and space for solving the Navier-Stokes equations based on Newton iteration[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2012, 64(11): 3569-3579.
- [12] DUG Z, ZUO L Y. A parallel partition of unity method for the nonstationary Navier-Stokes equations[J]. International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow, 2017, 27(8): 1675-1686.
- [13] 尚月强, 何银年. 非定常 Navier-Stokes 方程基于完全重叠型区域分解的有限元并行算法[J]. 计算物理, 2011, 28(2): 181-187.
- SHANG Yueqiang, HE Yinnian. Parallel finite element algorithms based on fully overlapping domain decomposition for time-dependent Navier-Stokes equations[J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2011, 28(2): 181-187.
- [14] ZHENG H B, YU J P, SHI F. Local and parallel finite element algorithm based on the partition of unity for incompressible flows[J]. Journal of Scientific Computing, 2015, 65(2): 512-532.
- [15] DU G Z, HOU Y R. A parallel partition of unity method for the time-dependent convection-diffusion equations[J]. International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow, 2015, 25(8): 1947-1956.
- [16] BABUŠKA I, MELENK J M. The partition of unity method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2015, 40(4): 727-758.

(责任编辑 周 蓓)