

DOI:10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2018.02.014

对流占优扩散反应方程的定制有限点法

杨红红, 秦新强

(西安理工大学 理学院, 陕西 西安 710054)

摘要: 传统的微分方程数值解方法求解对流占优扩散反应方程时,往往产生数值震荡现象。为了消除数值震荡,本文结合定制有限点方法(TFPM)构造了一种新的数值算法。该方法基于所求解问题的局部性质量身构建,能够有效消除对流占优引起的数值不稳定。给出了不同离散形式的稳定性条件,并通过数值算例验证了解法的高效性。

关键词: 定制有限点法; 对流占优扩散反应方程; 指数基函数; 三角基函数

中图分类号: O241.82

文献标志码: A

文章编号: 1006-4710(2018)02-0211-05

Tailored finite point method for convection-dominated diffusion reaction equation

YANG Honghong, QIN Xinjiang

(School of Science, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China)

Abstract: Using traditional numerical methods to solve convection dominated diffusion reaction equations always causes the phenomenon of numerical oscillations. To eliminate the numerical oscillations, a new method is established by combining the tailored finite point method (TFPM) in this paper. The TFPM has been tailored based on the local properties of the solved problem, effectively eliminating the numerical instability caused by convection dominance. The stability conditions of different discrete forms are given, and TFPM is highly efficient through the verification of numerical examples.

Key words: tailored finite point method; convection-dominated diffusion reaction equation; exponential basis function; triangle basis function

对流扩散方程在工程、物理与应用科学等分支中具有重要的地位。用于描述多孔介质中多层流体的流动、油藏模拟问题、沿海盐度扩散及温度扩散等实际问题。对流占优时,方程的解在边界附近呈现出薄的过渡层^[1],采用经典的有限差分法和有限元法求解会产生数值震荡。

近年来,对于奇异扰动的对流扩散问题^[2],Kadalbajoo 等^[3]提出了在时间方向采用隐式 Euler 离散,空间方向采用 B 样条配方法离散的数值方法。Clavero 等^[4]提出了基于隐式 Euler 对时间离散和 Shishkin 网格上有限差分进行空间离散的方法。Rashidinia 等^[5]提出时间方向采用差分离散,空间方向采用 Sinc-Galerkin 离散的方法。此外,最常见的数值方法还有特征差分法^[6]和特征有限元等。上述方法在一定程度上减弱了方程对流占优时

引起的数值震荡,但算法精度不够高。

本文采用定制有限点方法(TFPM)数值求解对流占优问题,该方法能有效消除数值伪振荡,且算法精度高。

TFPM 基于局部基函数“量身”构建,最早由 Han 等^[7]提出,用于数值求解 Hemker 问题。随后, Huang 等^[8]将 TFPM 用于求解抛物型问题, Tsai 等^[9]采用 TFPM 数值求解 Burger 方程。

本文第一部分将 TFPM 与有限差分有效结合,构造了一种新的高精度算法,用于求解对流占优扩散方程。第二部分将对流占优扩散反应方程进行指数变换,对变换后的方程整体采用三角基函数构造 TFPM 算法格式。第三部分给出了不同离散格式的稳定性条件。最后,用数值算例验证了本文算法的高效性。

收稿日期: 2017-06-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51409212)

作者简介: 杨红红,女,硕士生,研究方向为偏微分方程数值解。E-mail: YangHong_Holly1992@163.com

通讯作者: 秦新强,男,教授,硕导,研究方向为偏微分方程数值解。E-mail: xqqin@xaut.edu.cn

1 对流占优扩散方程的 TFPMP

考虑如下对流占优扩散反应方程:

$$\begin{cases} u_t - \epsilon u_{xx} + pu_x + qu = f, & x \in I, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in I \\ u(x, t) = g_0(t), & x \in \partial I, t > 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\Omega = I \times (0, T]$ 是有界区域, ϵ 是扩散系数, $0 < \epsilon \ll 1$, $q=0$, $p>0$ 是区域 Ω 上给定的常数。

取空间步长 $h>0$, 时间步长 $\tau>0$, 节点记为:

$$x_j = jh, 0 \leq j \leq M; t^n = n\tau, 0 \leq n \leq N \quad (2)$$

则网格节点为:

$$\{u_j^n = (x_j, t^n), 0 \leq j \leq M, 0 \leq n \leq N\} \quad (3)$$

在图 1 模板 I_j 上构造形如:

$$u_{xx} |_{x=x_j} = \alpha_{j-1} u_{j-1} + \alpha_j u_j + \alpha_{j+1} u_{j+1} \quad (4)$$

的 TFPMP 离散格式, 其中 $\alpha_{j-1}, \alpha_j, \alpha_{j+1}$ 满足某种待定关系, 详见下文。

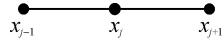


图 1 二阶导数构建模板 I_j

Fig. 1 Stencil I_j for construct second derivative

假设 $u(x)$ 在 I_j 上可由以下基函数表出:

$$V = \text{span}\{\text{e}^{x/\epsilon}, \text{e}^{-x/\epsilon}\} \quad (5)$$

则在 I_j 上函数可表示为:

$$u(x) |_{I_j} = c_{1j} \text{e}^{(x-x_j)/\epsilon} + c_{2j} \text{e}^{-(x-x_j)/\epsilon} \quad (6)$$

将其代入 $\alpha_{j-1} u_{j-1} + \alpha_j u_j + \alpha_{j+1} u_{j+1} = 0$, 可得:

$$\begin{aligned} \alpha_{j-1} (c_{1j} \text{e}^{-h/\epsilon} + c_{2j} \text{e}^{h/\epsilon}) + \alpha_j (c_{1j} + c_{2j}) + \\ \alpha_{j+1} (c_{1j} \text{e}^{h/\epsilon} + c_{2j} \text{e}^{-h/\epsilon}) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

即:

$$\begin{cases} \alpha_{j-1} \text{e}^{-h/\epsilon} + \alpha_j + \alpha_{j+1} \text{e}^{h/\epsilon} = 0 \\ \alpha_{j-1} \text{e}^{h/\epsilon} + \alpha_j + \alpha_{j+1} \text{e}^{-h/\epsilon} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

方程组(8)有无穷多个解, 若 α_j 已知或给定, 则求解方程组得:

$$\alpha_{j-1} = \alpha_{j+1} = -\frac{\alpha_j}{\text{e}^{h/\epsilon} + \text{e}^{-h/\epsilon}} \quad (9)$$

则模板 I_j 上二阶微商的 TFPMP 离散格式:

$$u_{xx} |_{x=x_j} = -\frac{\alpha_j}{\text{e}^{h/\epsilon} + \text{e}^{-h/\epsilon}} u_{j-1} + \alpha_j u_j - \frac{\alpha_j}{\text{e}^{h/\epsilon} + \text{e}^{-h/\epsilon}} u_{j+1} \quad (10)$$

对式(1)分别在单元 Ω_1, Ω_2 构造 TFPMP 显式格式与隐式格式(见图 2~3)。

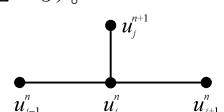


图 2 TFPMP 在 Ω_1 上的节点单元

Fig. 2 The reference mesh point at a local cell Ω_1 for TFPMP

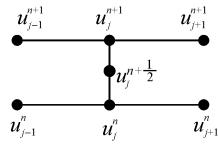


图 3 TFPMP 在 Ω_2 上的节点单元

Fig. 3 The reference mesh point at a local cell Ω_2 for TFPMP

1.1 显式 TFPMP

对式(1)构造 TFPMP 显格式(见图 2), 采用 TFPMP 离散扩散项, 对流项采用一阶迎风格式, 时间方向采用 Euler 向前离散, 则方程的显式离散式为:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \epsilon \alpha_{j-1} u_{j-1}^n + \epsilon \alpha_j u_j^n + \epsilon \alpha_{j+1} u_{j+1}^n - \\ p \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} + f_j^n \end{aligned} \quad (11)$$

初始条件和边界条件为 $u(x_j, 0) = u_0(x_j), 0 \leq j \leq M, u(x, t^n) = g_0(t^n), x \in \partial I$. 其中 $\alpha_{j-1}, \alpha_j, \alpha_{j+1}$ 由式(9)给出。

1.2 隐式 TFPMP

构造 TFPMP 隐格式(参见图 3), 对式(1)采用 TFPMP 离散扩散项, 对流项采用一阶迎风格式, 时间方向采用 Crank-Nicolson 离散, 因:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^{n+\frac{1}{2}} &\approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau}, \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^{n+\frac{1}{2}} &\approx \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^{n+1} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

故可得 TFPMP 隐式离散格式:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \frac{\epsilon}{2} \left(\alpha_{j-1} u_{j-1}^{n+1} + \alpha_j u_j^{n+1} + \right. \\ &\quad \left. \alpha_{j+1} u_{j+1}^{n+1} + \alpha_{j-1} u_{j-1}^n + \alpha_j u_j^n + \alpha_{j+1} u_{j+1}^n \right) - \\ &\quad \frac{p}{2} \left(\frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^n}{h} + \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} \right) + f_j^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (13)$$

将(13)写为矩阵形式:

$$\begin{cases} \mathbf{A} u^{n+1} = \mathbf{B} u^n + e_n \\ u^0 = u_0, \quad n = 0, 1, \dots, N; N = \left[\frac{T}{\tau}\right] \end{cases} \quad (14)$$

系数矩阵 \mathbf{A}, \mathbf{B} 分别为:

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & & & \\ b_2 & b_0 & b_1 & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & b_2 & b_0 & b_1 & \\ & b_2 & b_0 & & \end{pmatrix}_{(M-2) \times (M-2)} \\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & & & \\ c_2 & c_0 & c_1 & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & c_2 & c_0 & c_1 & \\ & c_2 & c_0 & & \end{pmatrix}_{(M-2) \times (M-2)} \end{cases} \quad (15)$$

$b_0 = 1 + \frac{p\tau}{2h} - \frac{\varepsilon\tau}{2}\alpha_j$, $b_1 = -\frac{\varepsilon\tau}{2}\alpha_{j+1}$, $b_2 = -\frac{p\tau}{2h} - \frac{\varepsilon\tau}{2}\alpha_{j-1}$,
 $c_0 = 1 - \frac{p\tau}{2h} + \frac{\varepsilon\tau}{2}\alpha_j$, $c_1 = \frac{\varepsilon\tau}{2}\alpha_{j+1}$, $c_2 = \frac{p\tau}{2h} + \frac{\varepsilon\tau}{2}\alpha_{j-1}$, 且
 $\alpha_{j-1}, \alpha_j, \alpha_{j+1}$ 由式(9)给出。

2 对流占优扩散反应方程的TFPM

考虑如下对流占优扩散反应方程:

$$\begin{cases} u_t - \varepsilon u_{xx} + pu_x + qu = f, & x \in I, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in I \\ u(x, t) = g_0(t), & x \in \partial I, t > 0 \end{cases} \quad (16)$$

其中 $0 < \varepsilon \ll 1$, $p \neq 0$, $q \neq 0$ 是区域 Ω 上给定的常数。
对方程进行变换后整体采用 TFPM 数值求解。令
 $u(x, t) = v(x, t)e^{px/2\varepsilon - (p^2/4\varepsilon + q)t}$, 则式(16)变换为:

$$\begin{cases} v_t = \varepsilon v_{xx} + \tilde{f}, & x \in I, t > 0 \\ v(x, 0) = u_0(x)e^{-\frac{px}{2\varepsilon}}, & x \in I \\ v(x, t) = g_0(t)e^{-\frac{px}{2\varepsilon} + (\frac{p^2}{4\varepsilon} + q)t}, & x \in \partial I, t > 0 \end{cases} \quad (17)$$

其中 $\tilde{f}(x, t) = f(x, t)e^{-\frac{px}{2\varepsilon} + (\frac{p^2}{4\varepsilon} + q)t}$ 。令:

$$\psi(x, t) = v(x, t) - \tilde{f}(x, t, t^n)t \quad (18)$$

对扩散方程(17)分别在单元 Ω_1, Ω_2 构造 TFPM 显格式(见图 2)与隐格式(见图 3)。

2.1 显式 TFPM

采用 TFPM 显格式(见图 2), 令:

$$\psi_j^{n+1} = \beta_{j-1}\psi_{j-1}^n + \beta_j\psi_j^n + \beta_{j+1}\psi_{j+1}^n \quad (19)$$

其中 $\psi_j^n = \psi(x_j, t_n)$ 。

选取基函数空间:

$$V_I^3 = \text{span}\{1, e^{-\varepsilon t} \sin x, e^{-\varepsilon t} \cos x\} \quad (20)$$

则:

$$\begin{cases} \beta_{j-1} + \beta_j + \beta_{j+1} = 1 \\ \beta_{j-1} \sin(-h) + \beta_{j+1} \sin(h) = 0 \\ \beta_{j-1} \cos(-h) + \beta_j + \beta_{j+1} \cos(h) = e^{-\varepsilon t} \end{cases} \quad (21)$$

解上述方程组得:

$$\beta_j = \frac{e^{-\varepsilon t} - \cos(h)}{1 - \cos(h)}, \quad \beta_{j-1} = \beta_{j+1} = \frac{1 - e^{-\varepsilon t}}{2[1 - \cos(h)]} \quad (22)$$

则可得扩散方程(17)的离散显格式:

$$\psi_j^{n+1} = \beta_{j-1}\psi_{j-1}^n + \beta_j\psi_j^n + \beta_{j+1}\psi_{j+1}^n - \tau\tilde{f}_j^n \quad (23)$$

初始条件和边界条件为:

$$\begin{cases} v(x_j, 0) = u_0(x_j)e^{-\frac{px_j}{2\varepsilon}}, & 0 \leq j \leq M \\ v(x, t^n) = g_0(t^n)e^{-\frac{px}{2\varepsilon} + (\frac{p^2}{4\varepsilon} + q)t^n}, & x \in \partial I \end{cases} \quad (24)$$

2.2 隐式 TFPM

采用 TFPM 隐格式(见图 3), 令:

$$\begin{cases} \psi_j^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_1\psi_{j-1}^n + \alpha_2\psi_j^n + \alpha_3\psi_{j+1}^n \\ \psi_j^{n+\frac{1}{2}} = \beta_1\psi_{j-1}^{n+1} + \beta_2\psi_j^{n+1} + \beta_3\psi_{j+1}^{n+1} \end{cases} \quad (25)$$

将 V_I^3 中基函数代入上述两式, 得:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 \sin(-h) + \alpha_3 \sin(h) = 0 \\ \alpha_1 \cos(-h) + \alpha_2 + \alpha_3 \cos(h) = e^{\varepsilon t/2} \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1, \\ \beta_1 \sin(-h) + \beta_3 \sin(h) = 0, \\ \beta_1 \cos(-h) + \beta_2 + \beta_3 \cos(h) = e^{-\varepsilon t/2} \end{cases} \quad (27)$$

解方程组(26)与(27)可得:

$$\alpha_2 = \frac{e^{\varepsilon t/2} - \cos(h)}{1 - \cos(h)}, \alpha_1 = \alpha_3 = \frac{1 - e^{\varepsilon t/2}}{2[1 - \cos(h)]} \quad (28)$$

$$\beta_2 = \frac{e^{-\varepsilon t/2} - \cos(h)}{1 - \cos(h)}, \beta_1 = \beta_3 = \frac{1 - e^{-\varepsilon t/2}}{2[1 - \cos(h)]} \quad (29)$$

则扩散方程(17)的离散隐格式为:

$$\begin{aligned} \beta_1 v_{j-1}^{n+1} + \beta_2 v_j^{n+1} + \beta_3 v_{j+1}^{n+1} = \\ \alpha_1 v_{j-1}^n + \alpha_2 v_j^n + \alpha_3 v_{j+1}^n - \tau\tilde{f}_j^n \end{aligned} \quad (30)$$

将式(30)写为矩阵形式:

$$\begin{cases} \mathbf{A}v^{n+1} = \mathbf{B}v^n + \bar{e}_n, & n = 0, 1, \dots, N \\ v^0 = u_0(x)e^{-\frac{px}{2\varepsilon}} \end{cases} \quad (31)$$

其中系数矩阵 \mathbf{A}, \mathbf{B} 分别为

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \beta_2 & \beta_3 & & & \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ & & & \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}_{(M-2) \times (M-2)} \\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & & & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ & & & \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}_{(M-2) \times (M-2)} \end{cases} \quad (32)$$

3 稳定性分析

定理 1 TFPM 显格式(11)条件稳定。

证明:为了证明 TFPM 显格式(11)满足离散极大值原理, 须验证其系数矩阵对角占优, 即:

$$1 + \alpha_j \varepsilon \tau - \frac{p\tau}{h} \geq \alpha_{j-1} \varepsilon \tau + \frac{p\tau}{h} + \alpha_{j+1} \varepsilon \tau \quad (33)$$

结合式(9)可得

$$\alpha_j \geq \frac{2p\tau - h}{h} \left(\varepsilon \tau + \frac{2\varepsilon \tau}{e^{h/\varepsilon} + e^{-h/\varepsilon}} \right) \quad (34)$$

故 α_j 满足上式时, 显格式(11)稳定。

定理 2 TFPM 隐格式(13)无条件稳定。

证明:根据稳定性分析的矩阵方法, 由隐格式(13)的矩阵格式(14), 只需证明 $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$ 为正规矩

阵且其 Euclid 范数小于 1 即可。

$\mathbf{C}\mathbf{C}^* = \mathbf{C}^*\mathbf{C}$ 显然成立,矩阵 \mathbf{C} 的特征值为

$$\lambda_j = \frac{1 - \left[\frac{p\tau}{2h} - \frac{\epsilon\tau}{2} \alpha_j + \left(1 + \frac{p}{\alpha_{j+1}\epsilon h} \right)^{1/2} \cos(j\pi h) \right]}{1 + \left[\frac{p\tau}{2h} - \frac{\epsilon\tau}{2} \alpha_j + \left(1 + \frac{p}{\alpha_{j+1}\epsilon h} \right)^{1/2} \cos(j\pi h) \right]}, \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (35)$$

显然对所有的 j 上式的绝对值均小于 1,故隐格式(13)无条件稳定。

定理 3 TFPMP 显格式(23)条件稳定。

证明:根据 Von Neumann 线性稳定性分析,令振幅函数的误差在子区间 (x_{j-1}, x_{j+1}) 上为 $\xi(x, t) = e^{\xi t} e^{ip(x-x_j)}$, 其中 $i = \sqrt{-1}$ 为虚数单位, p 为常数, 则对图 2 中四个参考节点的误差项为:

$$\xi(v_{j-1}^n) = e^{\xi n\tau} e^{-iph}, \quad \xi(v_j^n) = e^{\xi n\tau} \quad (36)$$

$$\xi(v_{j+1}^n) = e^{\xi n\tau} e^{iph}, \quad \xi(v_{j+1}^{n+1}) = e^{\xi(n+1)\tau} \quad (37)$$

将上述误差项代入(23)式,得增长因子

$$G = e^{\xi\tau} = \beta_{j-1} e^{-iph} + \beta_j + \beta_{j+1} e^{iph} = \beta_j + (\beta_{j-1} + \beta_{j+1}) \cos(ph) + i(\beta_{j+1} - \beta_{j-1}) \sin(ph) \quad (38)$$

由(22)式与(38)式可得

$$|G| = |\beta_j + 2\beta_{j+1} \cos(ph)| = |1 - 4\beta_{j+1} \sin^2(ph)|$$

令 $\tau_1 = \ln(\cos(h))/\epsilon$, 当 $\tau < \tau_1$ 时增长因子 $|G| < 1$, 显格式(23)稳定。

定理 4 TFPMP 隐格式(30)无条件稳定。

证明:根据稳定性分析的矩阵方法,由隐格式

(30)的矩阵格式(31)得 $\mathbf{G} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$ 为对称矩阵且其特征值为

$$\tilde{\lambda}_j = \frac{\alpha_2 + 2\alpha_3 \cos(j\pi h)}{\beta_2 + 2\beta_3 \cos(j\pi h)}, \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (39)$$

经验证 $|\tilde{\lambda}_j| < 1$ 对所有的 j 均成立,故隐格式(30)无条件稳定。

4 数值算例

例 1 考虑如下对流占优扩散方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = f, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = u_0, & x \in (0, 1) \\ u(0, t) = \mu_1, & t > 0 \\ u(L, t) = \mu_2, & t > 0 \end{cases} \quad (40)$$

取 $t \in (0, 1)$, $\tau = 0.01$, $h = 1/M$, 其中 $0 < \epsilon \ll 1$ 是扩散系数,且 f, u_0, μ_1 和 μ_2 由精确解确定。方程精确解为 $u(x, t) = e^{\epsilon t} [x + (e^{x/\epsilon} - 1)/(e^{1/\epsilon} - 1)]$ 。

分别采用 4 点显式 TFPMP 格式(11)和 6 点隐式格式(13)以及文献[6]中的特征有限差分法(CFDM)数值求解该方程。表 1 给出了采用显格式(11)与 CFDM 之间最大节点误差之间的比较。表 2 给出了隐格式与文献[8]所采用 TFPMP 格式之间最大节点误差之间的比较。用 ETFPM 表示显式 TFPMP 离散格式,ITFPMP 表示隐式 TFPMP 离散格式,FDM 为文献[10]中的经典有限差分法。

表 1 ETFPM 与 CFDM 最大节点误差比较
Tab. 1 The comparison of ETFPM and CFDM maximum nodal error

对比项	N	对应各 ϵ 的误差			
		10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}
ETFPMP	8	2.189 7E-007	2.175 2E-011	1.665 3E-015	8.881 8E-016
	32	2.438 2E-007	2.421 9E-011	6.661 3E-016	2.553 5E-015
	64	2.482 6E-007	2.466 3E-011	2.664 5E-015	5.551 1E-016
CFDM	8	9.178 2E-002	9.998 1E-004	1.000 7E-005	1.000 7E-007
	32	2.885 7E-001	3.985 1E-003	4.000 5E-005	4.000 6E-007
	64	4.488 9E-001	7.937 8E-003	7.999 8E-005	8.006 5E-007

表 2 ITFPMP 与 TFPMP 最大节点误差比较
Tab. 2 The comparison of ITFPMP and TFPMP maximum nodal error

对比项	N	对应各 ϵ 的误差			
		10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}
ITFPMP	8	3.368 5E-012	5.107 0E-015	5.773 9E-015	4.329 8E-015
	32	3.470 9E-012	4.662 9E-015	3.663 7E-015	3.330 7E-015
	64	1.637 2E-012	3.774 8E-015	3.218 0E-015	2.996 0E-015
TFPM	8	1.649 9E-002	1.762 2E-006	3.903 5E-009	4.102 3E-011
	32	1.523 8E-001	3.163 6E-005	4.577 4E-009	4.587 6E-011
	64	1.331 4E-001	1.259 0E-005	1.241 8E-008	4.710 1E-011

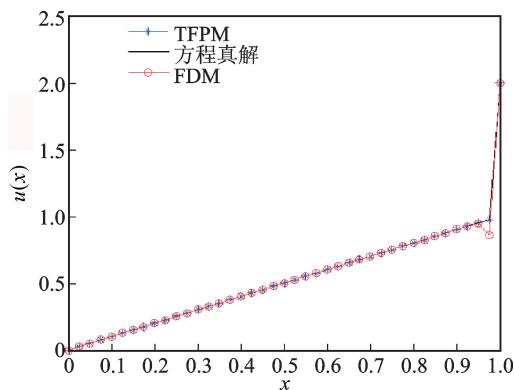


图 4 本文算法与差分格式(FDM)的比较
Fig. 4 The comparison of TFPMP and FDM

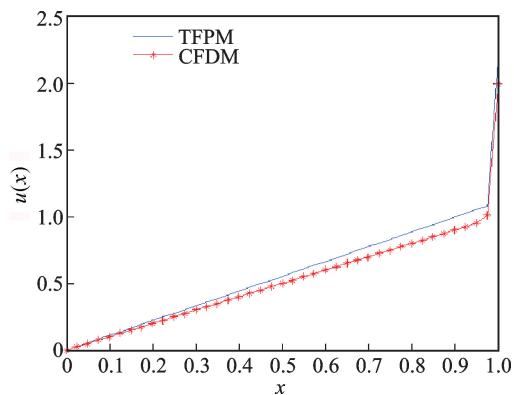


图 5 特征有限差分格式(CFDM)
Fig. 5 Characteristic finite difference method(CFDM)

从图 4、图 5 可以看到,当对流占优时 FDM 产生数值震荡,而本文 TFPMP 和 CFDM 可以很好地消除数值振荡。又由表 1 可以看到:本文算法比 CFDM 的误差精度高。由表 2 可以看到:隐式 TFPMP 格式比文献[8]所采用 TFPMP 格式的误差精度更高,更高效。由此得到结论:本文的 TFPMP 与传统的特征有限差分以及文献中 TFPMP^[8]相比,在计算误差方面具有明显的优势。

例 2 考虑如下对流占优扩散反应方程:

$$\begin{cases} u_t - \varepsilon^2 u_{xx} + pu_x + qu = f, & x \in I, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0, & x \in I \\ u(x, t) = g_0, & x \in \partial I, t > 0 \end{cases} \quad (41)$$

精确解为 $u(x, t) = \frac{2\pi\varepsilon e^{(1-\pi^2\varepsilon)t} \sin(\pi x)}{2 + e^{-\pi^2\varepsilon t} \cos(\pi x)}$, 取 $I = (0, 1]$, $t \in (0, 1)$, $p = 1$, $q = -1$, ε 为非负小参数, f, u_0, g_0 由精确解决定。

采用 4 点 TFPMP 显格式(23)数值求解该方程。此外,为比较本文算法的优劣,与文献[10]中的经典有限差分法(FDM)进行数值比较。表 3 给出了不同参数时两种格式之间的最大节点误差,从实验数据可以看到本文所构造方法比传统的有限差分法更有效,误差精度更高。

表 3 TFPMP 与 FDM 最大节点误差比较
Tab. 3 The comparison of TFPMP and FDM maximum nodal error

对比项	N	对应各 ε 的误差			
		10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}
TFPM	8	7.6248E-003	8.7544E-007	8.8146E-011	8.3298E-015
	32	4.2364E-003	8.5835E-007	8.6467E-011	8.2607E-015
	64	3.8352E-003	4.2518E-007	4.2976E-011	4.1390E-015
FDM	8	1.8391E-001	1.9499E-003	1.9510E-005	4.3074E-006
	32	1.8516E-001	1.9693E-003	1.9705E-005	4.1026E-006
	64	1.8516E-001	1.9703E-003	1.9716E-005	4.1053E-006

参考文献:

- [1] 苏煜城, 吴启光. 奇异摄动问题数值方法引论 [M]. 重庆: 重庆出版社, 1992.
- [2] ROOS H G. Numerical methods for singularly perturbed differential equations [M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1996: 435-436.
- [3] KADALBAJOO M K, GUPTA V, AWASTHI A. A uniformly convergent B-spline collocation method on a nonuniform mesh for singularly perturbed one-dimensional time-dependent linear convection-diffusion problem [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, 220(1-2): 271-289.

- [4] CLAVERO C, JORGE J C, LISBONA F. A uniformly convergent scheme on a nonuniform mesh for convection-diffusion parabolic problems [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2003, 154 (2): 415-429.
- [5] RASHIDINIA J, BARATI A, NABATI M. Application of Sinc-Galerkin method to singularly perturbed parabolic convection-diffusion problems [J]. Numerical Algorithms, 2014, 66(3): 643-662.

(下转第 222 页)

- [10] ZHANG T J, JIANG X L. Study on dielectric properties of poly(vinylidene fluoride) modified by copolymerization [J]. Chemical Production and Technology, 2014, 21(6): 5-7.
- [11] 孟竺, 叶会见, 卢铁梅, 等. 退火对P(VDF-HFP)共聚物薄膜结构和介电性能的影响[J]. 航天器环境工程, 2016, 33(4): 413-420.
- MENG Zhu, YE Huijian, LU Tiemei, et al. Effects of annealing on the structure and the dielectric property of vinylidene fluoride-hexafluoropropylene copolymer films [J]. Spacecraft Environment Engineering, 2016, 33(4): 413-420.
- [12] XIA W M, ZHOU Z J, LIU Y, et al. Crystal phase transition dependence of the energy storage performance of poly(vinylidene fluoride) and poly(vinylidene fluoride-hexafluoropropene) copolymers [J]. Journal of Applied Polymer Science, 2018, 5: 46306.
- [13] XIA W M, CHEN B, LIU Y, et al. Low Young's moduli induced D-E loop dispersion and its effect on the energy discharging performance of PVDF and P(VDF-co-HFP) films [J]. AIP Advances, 2018, 8: 035211.
- [14] GUAN F X, PAN J L, WANG J, et al. Crystal orientation effect on electric energy storage in poly(vinylidene fluoride-co-hexafluoropropylene) copolymers [J]. Macromolecules, 2010, 43(1): 384-392.
- [15] 徐任信, 陈文, 徐庆, 等. 拉伸速率对PVDF薄膜介电压电性能的影响[C]//国仪器仪表学会仪表材料分会. 第五届中国功能材料及其应用学术会议论文集Ⅲ. 重庆: 功能材料编辑部, 2004: 1525-1527.
- [16] LU X Y, SCHIROKAUER A, SCHEINBEIM J. Giant electrostrictive response in poly(vinylidene fluoride-hexafluoropropylene) copolymers [J]. IEEE Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control, 2000, 47(6): 1291-1295.
- [17] BHARTI V, HU H, CHENG Z Y, et al. Quantitative analysis of structural, relaxational and electrostrictive properties of PVDF-TrFE/PMMA films irradiated with high-energy electrons [J]. IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation, 2001, 8(4): 718-724.
- [18] YANG L Y, ALLAHYAROV E, GUAN F X, et al. Crystal orientation and temperature effects on double hysteresis loop behavior in a poly(vinylidene fluoride-co-trifluoroethylene-co-chlorotrifluoroethylene)-graft-polystyrene graft copolymer [J]. Macromolecules, 2013, 46(24): 9698-9711.
- [19] 徐建华, 杨文耀. 储能聚合物电介质基础[M]. 北京: 科学出版社, 2016: 40-41.

(责任编辑 周 蓓)

(上接第215页)

- [6] 秦新强, 李秋芳. 对流占优扩散方程一种新的特征差分算法[J]. 西安理工大学学报, 2003, 19(2): 139-144.
QIN Xinqiang, LI Qiufang. A new kind of characteristic-difference algorithm for convection-diffusion equations [J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2003, 19(2): 139-144.
- [7] HAN H, HUANG Z, KELLOGG R B. The tailored finite point method and a problem of P. Hemker: proceedings of the International Conference on Boundary and Interior Layers Computational and Asymptotic Methods, University of Limerick, Ireland, July 28-August 1, 2008 [C]. 2008.
- [8] HUANG Zhongyi, YANG Yi. Tailored finite point method for parabolic problems [J]. Computational Methods in Applied Mathematics, 2016, 16(4): 543-562.
- [9] TSAI C C, SHIH Y T, LIN Y T, et al. Tailored finite point method for solving one-dimensional Burgers' equation [J]. International Journal of Computer Mathematics, 2017, 94(4): 800-812.
- [10] 戴嘉尊, 邱建贤. 微分方程数值解法[M]. 南京: 东南大学出版社, 2001.

(责任编辑 王绪迪)