

DOI:10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2019.04.002

# 基于微凸体连续变形理论的结合面切向刚度模型

王世军<sup>1</sup>, 李志涛<sup>1</sup>, 韩子锐<sup>1</sup>, 赵金娟<sup>2</sup>, 李鹏阳<sup>1</sup>

(1. 西安理工大学 机械与精密仪器工程学院, 陕西 西安 710048;

2. 西安理工大学 印刷包装与数字媒体学院, 陕西 西安 710048)

**摘要:** 提出了一种包含微凸体接触过程中弹塑性过渡阶段弹性的粗糙表面切向接触刚度模型。现有粗糙表面切向接触刚度模型中只考虑微凸体完全弹性接触阶段的弹性,未考虑弹塑性过渡阶段弹性。根据微凸体变形过程中应满足的连续性条件,微凸体变形过程可以按如下划分:完全弹性阶段、弹塑性过渡阶段(包含三个不同阶段)以及完全塑性阶段,依据分形理论和 Hertz 接触理论,建立了计入微凸体弹塑性过渡阶段弹性的结合面切向接触刚度模型。分析与试验结果表明:考虑微凸体的弹塑性过渡阶段的切向接触刚度相比与不考虑弹塑性过渡阶段更加的符合实际接触情况。新模型的切向接触刚度随着法向载荷和较软材料的屈服强度与两材料的复合弹性模量的比值的增大而增大,还由于分形粗糙度与切向载荷的增大,该切向接触刚度会减小,并且伴随着分形维数的增大,切向接触刚度先增大后减小,即接触刚度存在一个峰值。此外,当较软材料的屈服强度与两材料的复合弹性模量的比值增大时,刚度峰值所对应的分形维数在减小。

**关键词:** 结合面; 分形理论; 弹塑性; 接触; 切向刚度

**中图分类号:** TH113.1

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1006-4710(2019)04-0401-10

## Tangential stiffness model for joint surface based on asperity continuous deformation theory

WANG Shijun<sup>1</sup>, LI Zhitao<sup>1</sup>, HAN Zirui<sup>1</sup>, ZHAO Jinjuan<sup>2</sup>, LI Pengyang<sup>1</sup>

(1. School of Mechanical and Precision Instrument Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China; 2. School of Printing, Packaging Engineering and Digital Media Technology, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

**Abstract:** A tangential contact stiffness model of rough surface is proposed, which includes the elasticity of elastic-plastic transition stage in the asperity contact process. The existing tangential contact stiffness models of rough surface only consider the elasticity of the fully elastic contact stage of asperity, but do not consider the elasticity of elastic-plastic transition stage. According to the continuity conditions that should be satisfied during the deformation process of asperity, the deformation process of asperity is divided into complete elastic stage, elastic-plastic transition stage including three different stages, and complete plastic stage. So based on the fractal theory and Hertz contact theory, a tangential contact stiffness model of the joint is established, considering the elasticity of the elastic-plastic transition stage of asperity. The results of investigation and the experience show that compared with the model not considering the elastic-plastic transition stage of asperity, the tangential contact stiffness of the model considering the elastic-plastic transition stage of asperity well matches the realistic contact situation. The tangential contact stiffness of the new model increases with the normal load and the ratio of the yield strength of the softer material to the equivalent elastic modulus of two materials, which also decreases with the fractal roughness and the tangential load. And as the fractal dimension increases, the tangential

**收稿日期:** 2019-01-17

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(51675422);陕西省科技厅科技统筹创新工程重点实验室资助项目(2014SZS10-P05)

**作者简介:** 王世军,男,副教授,研究方向为机械结合部特性。E-mail:wsjxaut@qq.com

contact stiffness increases first and then decreases, which means that a peak exists in the change of the contact stiffness. Furthermore, when the ratio of the yield strength of the softer material to the composite elastic modulus of the two materials increases, it is found that the fractal dimension at the peak of the stiffness will decrease.

**Key words:** joint interfaces; fractal theory; elastic-plastic; contact; tangential contact stiffness

结合面的接触刚度包含法向接触刚度和切向接触刚度,接触研究中通常单独分析法向刚度和切向刚度,应用中则需要同时考虑法向刚度和切向刚度的影响。

传统的法向接触模型,如基于统计分析的 G-W 模型<sup>[1]</sup>和基于分形理论的 M-B 模型<sup>[2]</sup>,以及张学良<sup>[3]</sup>和尤晋闽<sup>[4]</sup>的模型,都没有考虑弹塑性过渡阶段的接触变形,只把弹性与塑性接触变形计入模型。Zhao<sup>[5]</sup>首次给出了一个法向接触模型(ZMC 模型),该模型含有弹性、弹塑性以及塑性。随后缪小梅<sup>[6]</sup>得到考虑微凸体弹塑性过渡阶段的法向接触刚度模型,王世军<sup>[7]</sup>则基于微凸体弹塑性有限元接触模型,建立了微凸体在弹性、弹塑性、塑性变形阶段统一的接触变量变化规律的表达式。何联格<sup>[8]</sup>进一步将弹塑性过渡阶段分为三个不同的小阶段,得到了更加准确的法向接触刚度模型。

在切向刚度的研究中,张学良<sup>[9]</sup>首次建立了具有尺度独立性的结合部切向刚度分形模型,但是在该模型中仅仅将接触变形过程划分为完全弹性和完全塑性阶段。CHEN<sup>[10]</sup>基于分形理论建立了曲面切向接触刚度的分形模型,但对微凸体的变形过程的划分与张学良<sup>[9]</sup>相同,并未考虑微凸体变形过程中的弹塑性过渡阶段。李小彭<sup>[11]</sup>在分形理论和摩擦学原理的基础上,给出了考虑摩擦因素的切向刚度模型,此切向刚度模型中也仅仅考虑了微凸体在完全弹性过程中产生的切向接触刚度。田红亮等<sup>[12]</sup>改进分形几何理论并且严格应用 Hertz 法向接触力学得到了一个改进的切向接触刚度模型,微凸体的刚度分析也只考虑完全弹性阶段。刘鹏等<sup>[13]</sup>对考虑摩擦因素以及球面接触时切向接触刚度进行了研究,在得到的模型中仍然将接触变形划分成不连续的完全弹性变形过程以及完全塑性变形过程,但仍然未考虑接触变形过程中的弹塑性过渡阶段。上述切向接触模型的建立都将微凸体的变形过程划分为完全弹性和完全塑性两个不连续的变形阶段,仅仅考虑了微凸体在弹性阶段的所产生的切向刚度。

近年来微凸体法向接触特性的研究表明<sup>[14-16]</sup>,在逐渐增大法向载荷过程中,微凸体中的塑性区从无到有,由小变大,弹性区则由大变小,接触面上微凸体的材料性质由弹性逐渐变为塑性,微凸体的变形过程从完全弹性阶段到完全塑性阶段需要经过一

个弹塑性过渡阶段。在这个过渡阶段,微凸体在接触面的切线方向上仍然具有弹性。微凸体切向接触刚度分析中应当与法向接触刚度分析一样<sup>[5-8]</sup>计入弹塑性过渡阶段的切向接触刚度,不应该只考虑弹性阶段的切向接触刚度<sup>[9-13]</sup>。

本文依据 Hertz 理论,分形几何理论和切向接触理论,首次考虑弹塑性过渡阶段中屈服区域没有扩大至整个接触表面前的弹塑性过渡阶段所产生的切向刚度,推导出一个新的接触表面的切向刚度模型。

## 1 结合面接触变形基本理论

### 1.1 结合面微凸体接触变形

结合面在相互接触时,是非常复杂的,因此为了方便建模,可以将接触进行等效,即互相接触表面为粗糙表面和光滑的刚性平面。在整个粗糙表面接触时,将整个表面上的单个微凸体等效为球体,当承受法向载荷  $P$  的作用时,其接触状态见图 1。其中  $R$  为微凸体等效的曲率半径,  $\omega$  为微凸体的法向变形量,  $P$  为施加在微凸体上的法向载荷,  $r$  为接触区域的半径。

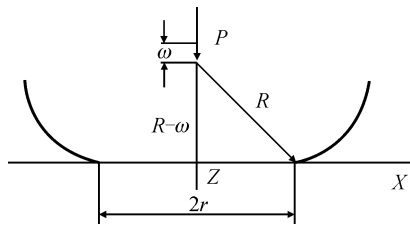


图 1 单个微凸体与刚性平面的接触状态

Fig. 1 Contact state of a single asperity with a rigid plane

#### 1.1.1 完全弹性接触状态

在法向变形量  $\omega < \omega_{ec}$  的情况下,微凸体此时的接触状态为完全弹性变形。法向接触载荷  $F_c$  和微凸体的临界变形量  $\omega_{ec}$  为<sup>[15]</sup>:

$$F_c = \frac{4}{3}ER^{\frac{1}{2}}\omega^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}E \times 2^{2.5-D} \pi^{\frac{D-3}{2}} G^{D-1} (\ln \alpha)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3-D}{2}} \quad (1)$$

$$\omega_{ec} = \left( \frac{\pi KH}{2E} \right)^2 R \quad (2)$$

$$\frac{1}{E} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (3)$$

式中: $D$ 表示分形维数; $G$ 表示分形粗糙度; $H$ 表示两材料中较软材料的硬度, $H = 2.8\sigma_y$ ,这里 $\sigma_y$ 表示较软材料的屈服强度。 $K$ 表示硬度系数, $K = 0.454 + 0.41\nu$ ,这里 $\nu$ 表示两材料中较软材料的Poisson比。 $E$ 表示两接触材料的当量弹性模量, $E_1$ 和 $E_2$ 分别表示材料各自的弹性模量, $\nu_1$ 和 $\nu_2$ 分别表示材料各自的Poisson比。

### 1.1.2 完全塑性接触状态

根据文献[3]的研究,当法向变形量 $\omega \geq \omega_{pc} = 110\omega_{ec}$ 时( $\omega_{pc}$ 为发生塑性变形的临界法向变形量),微凸体进入完全塑性阶段,此时平均接触压力等于较软材料的硬度,单个微凸体法向接触载荷 $F_p$ 为<sup>[15]</sup>:

$$F_p = 2\pi HR\omega \quad (4)$$

### 1.1.3 弹塑性过渡接触状态

当法向变形量 $\omega_{ec} \leq \omega < \omega_{pc}$ 时,Kogut<sup>[16]</sup>认为微凸体处于弹塑性过渡阶段,发生弹塑性变形,并且可将该阶段分为三个小阶段,即 $\omega_{ec} \leq \omega < 6\omega_{ec}$ 、 $6\omega_{ec} \leq \omega < 68\omega_{ec}$ 和 $68\omega_{ec} \leq \omega < 110\omega_{ec}$ 。当法向变形量处于 $\omega_{ec} \leq \omega < 6\omega_{ec}$ 时,微凸体的屈服区域均发生在接触面下方,塑性变形发生在接触表面之下的微小体积内,塑性区域被大量的弹性区包围,且实际接触面积上每一点均发生弹性变形。由于接触面积上都为弹性变形,因此在该阶段,实际接触表面还具有抵抗切向变形的能力,即具有切向刚度。随着法向变形量的不断增大,当 $\omega = 6\omega_{ec}$ 时,屈服区域由接触表面下方扩大至接触表面。当法向变形量处于 $6\omega_{ec} \leq \omega < 68\omega_{ec}$ 时,法向接触载荷不断增大,屈服

区域在接触表面随之增大。由于在该阶段实际接触表面还是存在弹性接触,因此也具有一定的抵抗切向变形的能力,只不过是随着法向接触载荷的增大以及屈服区域的增大,抵抗切向变形的能力不断减小,即切向刚度在该阶段不断减小。当法向变形量增大至 $\omega = 68\omega_{ec}$ 时,屈服区域扩大至整个接触表面,此时以及之后的阶段,由于整个接触表面都是塑性变形,不再具有抵抗切向变形的能力,也就不再具有切向刚度。但是此时结合面的接触压力仍旧小于两材料中较软材料的硬度。当微凸体顶端的变形量增大至 $\omega = 110\omega_{ec}$ 时,结合面接触压力和两材料中较软材料的硬度相等。此时结合面的微凸体进入完全塑性阶段。微凸体在弹塑性过渡变形阶段中三个不同阶段的法向接触载荷分别为如下<sup>[15]</sup>。

1) 当 $\omega_{ec} \leq \omega < 6\omega_{ec}$ 时:

$$F_{ep1} = \frac{2}{3}KH\pi R\omega_{ec} \times 1.03 \left(\frac{\omega}{\omega_{ec}}\right)^{1.425} = 0.343 \times 2^{3.825-0.85D} \times \pi^{0.425D-1.275} (KH)^{0.15} \times G^{0.85(D-1)} (\ln\alpha)^{0.425} E^{0.85} a^{1.425-0.425D} \quad (5)$$

2) 当 $6\omega_{ec} \leq \omega < 68\omega_{ec}$ 与 $68\omega_{ec} \leq \omega < 110\omega_{ec}$ 时:

$$F_{ep2} = F_{ep3} = \frac{2}{3}KH\pi R\omega_{ec} \times 1.40 \left(\frac{\omega}{\omega_{ec}}\right)^{1.236} = 0.466 \times 2^{2.367-0.526D} \times \pi^{0.263D-0.789} (KH)^{0.474} \times G^{0.526(D-1)} (\ln\alpha)^{0.263} E^{0.526} a^{1.263-0.263D} \quad (6)$$

## 1.2 结合面法向接触载荷模型

根据文献[15]可知,结合面的法向接触载荷模型如下。

1) 当 $1 < D < 2$ ,且 $D \neq 1.5$ 时:

$$P^* = \frac{2^{\frac{3-2D}{2}} G^{*D-1} (\ln\alpha)^{\frac{1}{2}} D \left(\frac{2-D}{2}\right)^{\frac{D}{2}} A_r^{*\frac{D}{2}}}{3\pi^{\frac{3-D}{2}} (3-2D)} \left[ \left(\frac{2-D}{2}\right)^{(3-2D)/2} A_r^{*(3-2D)/2} - a_c^{*(3-2D)/2} \right] + \frac{0.343 \times 2^{2.825-0.85D} (2.8K\varphi)^{0.15} \pi^{0.425D-1.275} G^{*0.85(D-1)} (\ln\alpha)^{0.425} D \left(\frac{2-D}{D}\right)^{\frac{D}{2}} A_r^{*\frac{D}{2}} a_c^{1.425-0.925D}}{1.425-0.925D} \times [1 - (1/6)^{(1.425-0.925D)/(D-1)}] + \frac{0.466 \times 2^{1.367-0.526D} (2.8K\varphi)^{0.474} \pi^{0.263D-0.789} G^{*0.526(D-1)}}{1.263-0.763D} \times (\ln\alpha)^{0.263} D \left(\frac{2-D}{D}\right)^{\frac{D}{2}} A_r^{*\frac{D}{2}} a_c^{1.263-0.763D} [(1/6)^{(1.263-0.763D)/(D-1)} - (1/110)^{(1.263-0.763D)/(D-1)}] + \frac{2.8\varphi D \left(\frac{2-D}{D}\right)^{\frac{D}{2}} A_r^{*\frac{D}{2}} a_c^{*(2-D)/2}}{2-D} (1/110)^{(2-D)/(2D-2)} \quad (7)$$

2) 当 $1 < D < 2$ ,且 $D = 1.5$ 时:

$$P^* = 2\pi^{-3/4} G^{*1/2} (\ln\alpha)^{1/2} (A_r^*/3)^{3/4} \ln\left(\frac{A_r^*}{3a_c^*}\right) + \frac{1.03 \times 2^{1.55} (2.8K\varphi)^{0.15} \pi^{-0.6375} G^{*0.425}}{0.1125} \times (\ln\alpha)^{0.425} \times 1.5 (A_r^*/3)^{3/4} a_c^{*0.0375} [1 - (1/6)^{0.075}] + \frac{1.40 \times 2^{0.578} (2.8K\varphi)^{0.474} G^{*0.263} \pi^{-0.3945} (\ln\alpha)^{0.263}}{0.3555} \times 1.5 (A_r^*/3)^{3/4} a_c^{*0.1185} \times [(1/6)^{0.237} - (1/110)^{0.237}] + 3 \times 2.8\varphi (A_r^*/3)^{3/4} a_c^{*1/4} (1/110)^{1/2} \quad (8)$$

式中:量纲一法向总载荷  $P^* = \frac{P}{EA_a}$ , 量纲一分形粗糙度参数  $G^* = \frac{G}{\sqrt{A_a}}$ , 这里  $A_a$  为名义接触面积; 量纲一真实接触面积  $A_r^* = \frac{A_r}{A_a}$ ,  $A_r = \frac{D}{2-D} a_{\max}$ , 这里  $a_{\max}$  为最大接触点面积; 与屈服强度相关的材料特性  $\varphi = \frac{\sigma_y}{E}$ ;  $a_c^*$  为量纲一临界接触面积:

$$a_c^* = \left[ 2^{9-2D} G^{*2D-2} \pi^{D-3} \ln \alpha \left( \frac{1}{2.8K\varphi} \right)^2 \right]^{1/D-1} \quad (9)$$

## 2 结合面切向接触载荷模型

由于接触表面已经发生塑性变形的微凸体, 不能承受切向载荷, 由此在建立切向接触载荷模型时, 不能包含整个接触表面已经发生完全塑性变形的弹塑性过渡中第三小阶段以及完全塑性阶段。

根据文献[17]可得, 结合面的单个微凸体所能承受的切向接触载荷为:

$$Q = \frac{8r^2}{6-3\nu} \sigma_y + \frac{2\nu-1}{\pi(6-3\nu)} 8F \quad (10)$$

式中:  $\nu$  为两材料中较软材料的 Poisson 比,  $F$  为单个微凸体所承受的法向接触载荷。

根据文献[2]可知, 结合面微接触点的面积分布密度函数为:

$$n(a) = \frac{D}{2} a_{\max}^{\frac{D}{2}} a^{-\frac{D}{2}-1} \quad (11)$$

所有处于完全弹性阶段的微凸体所能承受的切向接触载荷为:

$$T_e = \int_{a_c}^{a_{\max}} Q_e n(a) da \quad (12)$$

将式(1)、(10)和(11)代入到式(12)得如下式子。

1) 当  $D \neq 1.5$  时:

$$T_e = \frac{(2\nu-1)DE}{3(6-3\nu)(3-2D)} 2^{7.5-D} \pi^{(D-5)/2} G^{D-1} \times (\ln \alpha)^{1/2} a_{\max}^{D/2} \cdot [a_{\max}^{(3-2D)/2} - a_c^{(3-2D)/2}] +$$

$$A_r = \int_{a_c}^{a_{\max}} n(a) a da + \int_{(\frac{1}{6})^{1/(D-1)} a_c}^{a_c} n(a) a da + \int_{(\frac{1}{68})^{1/(D-1)} a_c}^{(\frac{1}{6})^{1/(D-1)} a_c} n(a) a da + \int_{(\frac{1}{110})^{1/(D-1)} a_c}^{(\frac{1}{68})^{1/(D-1)} a_c} n(a) a da + \int_0^{(\frac{1}{110})^{1/(D-1)} a_c} n(a) a da = \int_0^{a_{\max}} n(a) a da \quad (19)$$

将式(11)代入式(19), 得:

$$A_r = \frac{D}{2-D} a_{\max} \quad (20)$$

单个微凸体与平面接触时的切向接触刚度可表示为<sup>[18]</sup>:

$$\frac{8\sigma_y D a_{\max}^{D/2}}{\pi(6-3\nu)(2-D)} [a_{\max}^{(2-D)/2} - a_c^{(2-D)/2}] \quad (13)$$

2) 当  $D = 1.5$  时:

$$T_e = \frac{16(2\nu-1)}{(6-3\nu)} \pi^{-7/4} G^{1/2} E (\ln \alpha)^{1/2} a_{\max}^{3/4} \ln \left( \frac{a_{\max}}{a_c} \right) + \frac{24\sigma_y}{\pi(6-3\nu)} a_{\max}^{3/4} (a_{\max}^{1/4} - a_c^{1/4}) \quad (14)$$

所有处于弹塑性过渡第一阶段的微凸体所能承受的切向接触载荷为:

$$T_{ep1} = \int_{(\frac{1}{6})^{1/D-1} a_c}^{a_c} Q_{ep1} n(a) da \quad (15)$$

将式(5)、(10)和(11)代入到式(15), 得:

$$T_{ep1} = \frac{0.343 \times 2^{5.825-0.85D} \times (2\nu-1) \pi^{0.425D-1.275}}{(6-3\nu)} \times \frac{(KH)^{0.15} G^{0.85(D-1)} (\ln \alpha)^{0.425} E^{0.85} D a_{\max}^{D/2}}{(1.425-0.925D)} \times a_c^{1.425-0.925D} \left[ 1 - \left( \frac{1}{6} \right)^{(1.425-0.925D)/D-1} \right] + \frac{8\sigma_y D a_{\max}^{D/2}}{\pi(6-3\nu)(2-D)} \times a_c^{(2-D)/2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{6} \right)^{(2-D)/2(D-1)} \right] \quad (16)$$

所有处于弹塑性过渡第二阶段的微凸体所能承受的切向接触载荷为:

$$T_{ep2} = \int_{(\frac{1}{68})^{1/D-1} a_c}^{(\frac{1}{6})^{1/D-1} a_c} Q_{ep2} n(a) da \quad (17)$$

将式(6)、(10)和(11)代入到式(17), 得:

$$T_{ep2} = \frac{1.4 \times 2^{4.367-0.526D} \times (2\nu-1) \pi^{0.263D-1.789}}{(6-3\nu)} \times \frac{(KH)^{0.474} G^{0.526(D-1)} (\ln \alpha)^{0.263} E^{0.526} D a_{\max}^{D/2}}{(3.789-2.289D)} \times a_c^{1.263-0.763D} \left[ \left( \frac{1}{6} \right)^{\frac{(1.263-0.763D)}{D-1}} - \left( \frac{1}{68} \right)^{\frac{(1.263-0.763D)}{D-1}} \right] + \frac{8\sigma_y D a_{\max}^{D/2}}{\pi(6-3\nu)(2-D)} \times a_c^{(2-D)/2} \left[ \left( \frac{1}{6} \right)^{\frac{(2-D)}{2(D-1)}} - \left( \frac{1}{68} \right)^{\frac{(2-D)}{2(D-1)}} \right] \quad (18)$$

## 3 结合面切向刚度模型

结合面的真实接触面积为:

$$k_t = \frac{8G\sqrt{a}}{(2-\nu)\sqrt{\pi}} \left( 1 - \frac{1}{\mu} \frac{T}{P} \right)^{1/3} \quad (21)$$

式中:  $\mu$  为摩擦系数。

处于弹塑性过渡第三阶段以及完全塑性阶段的微



凸体接触表面已经发生完全塑性变形,不再具有接触刚度,由此结合面切向接触刚度  $K_t$  可用下式来表示:

$$K_t = \int_{a_c}^{a_{\max}} k_{te} n(a) da + \int_{a_{ep1}}^{a_c} k_{tep1} n(a) da + \int_{a_{ep2}}^{a_{ep1}} k_{tep2} n(a) da =$$

$$\int_{a_c}^{a_{\max}} k_{te} n(a) da + \int_{\left(\frac{1}{6}\right)^{1/D-1} a_c}^{a_c} k_{tep1} n(a) da + \int_{\left(\frac{1}{68}\right)^{1/D-1} a_c}^{\left(\frac{1}{6}\right)^{1/D-1} a_c} k_{tep2} n(a) da \quad (22)$$

将式(11)和式(21)代入式(22)可得:

$$K_t = \frac{8\bar{G}}{\sqrt{\pi}(2-\nu)} \left[ \left(1 - \frac{1}{\mu} \frac{T_e}{P_e}\right)^{1/3} a_{\max}^{D/2} \frac{D}{(1-D)} (a_{\max}^{(1-D)/2} - a_c^{(1-D)/2}) \right] + \frac{8\bar{G}}{\sqrt{\pi}(2-\nu)} \times$$

$$\left[ \left(1 - \frac{1}{\mu} \frac{T_{ep1}}{P_{ep1}}\right)^{1/3} a_{\max}^{D/2} \frac{D}{(1-D)} a_c^{(1-D)/2} \left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{-1/2}\right) \right] +$$

$$\frac{8\bar{G}}{\sqrt{\pi}(2-\nu)} \left[ \left(1 - \frac{1}{\mu} \frac{T_{ep2}}{P_{ep2}}\right)^{1/3} a_{\max}^{D/2} \frac{D}{(1-D)} a_c^{(1-D)/2} \times \left( \left(\frac{1}{6}\right)^{-1/2} - \left(\frac{1}{68}\right)^{-1/2} \right) \right] \quad (23)$$

对式(23)进行量纲一化:

$$K_t^* = \frac{8}{\sqrt{\pi}(2-\nu)} g_1(D) \left[ \left(1 - \frac{1}{\mu} h_e\right)^{1/3} A_r^{*D/2} \left( \left(\frac{2-D}{D}\right)^{(1-D)/2} A_r^{*(1-D)/2} - a_c^{*(1-D)/2} \right) \right] +$$

$$\frac{8}{\sqrt{\pi}(2-\nu)} g_1(D) \left[ \left(1 - \frac{1}{\mu} h_{ep1}\right)^{1/3} A_r^{*D/2} a_c^{*(1-D)/2} \left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{-1/2}\right) \right] +$$

$$\frac{8}{\sqrt{\pi}(2-\nu)} g_1(D) \left[ \left(1 - \frac{1}{\mu} h_{ep2}\right)^{1/3} A_r^{*D/2} a_c^{*(1-D)/2} \left( \left(\frac{1}{6}\right)^{-1/2} - \left(\frac{1}{68}\right)^{-1/2} \right) \right] \quad (24)$$

式中:量纲一切向接触刚度  $K_t^* = \frac{K_t}{G \sqrt{A_a}}$ ;

$$g_1(D) = \frac{(2-D) \frac{D}{2} D^{\frac{2-D}{2}}}{(1-D)}; h_e = \frac{T_e}{P_e}; h_{ep1} = \frac{T_{ep1}}{P_{ep1}};$$

$$h_{ep2} = \frac{T_{ep2}}{P_{ep2}}.$$

#### 4 分析结果的讨论

由式(7)~(8)、(20)与(24)可以从理论上描述结合面量纲一切向接触刚度  $K_t^*$  与作用在结合面量纲一法向接触总载荷  $P^*$ 、切向接触载荷  $T$ 、结合面的参数(如硬度  $H$ 、屈服强度  $\sigma_y$ 、当量弹性模量或复合弹性模量  $E$ 、Poisson 比  $\nu$  等)以及结合面分形维数  $D$ 、量纲一分形粗糙度参数  $G^*$  之间的关系,由此组成了结合面切向刚度分形模型。为了更加直观的反映这种非线性关系,以式(7)~(8)、(20)与(24)为依据进行分析,只要给定一固定的  $A_r^*$ ,便可分析出量纲一法向总载荷  $P^*$  和量纲一切向接触刚度  $K_t^*$  之间的关系。

选取当量 Poisson 比  $\nu = 0.2$ ,摩擦系数  $\mu = 0.2$ , $\varphi$  分别取 1.0,0.1,0.01,量纲一分形粗糙度参数  $G^*$  取  $1 \times 10^{-8}$ ,  $1 \times 10^{-9}$ ,  $1 \times 10^{-10}$ ,  $1 \times 10^{-11}$ ,  $1 \times 10^{-12}$ ,而  $D = 1.1 \sim 1.9$ 。数字仿真计算结果见图 2~7。

对图 2~7 进行分析可得如下结果。

1) 根据图 2 可知,当  $1 < D < 1.5$  时,  $K_t^*$  和  $P^*$  具有明显的非线性关系;当  $1.5 \leq D < 2$  时,  $K_t^*$  与  $P^*$  的非线性关系明显减弱,趋近于线性关系。虽然  $D$  的变化使得  $K_t^*$  与  $P^*$  之间的关系较为复杂,但是增大  $P^*$ ,总是有利于提高结合面的切向接触刚度。

2) 根据图 3 可知,随着  $D$  的增大,切向刚度会在某一  $D$  之前增大到最大值,随后减小。而这一  $D$  的大小与较软材料的屈服强度与两材料的复合弹性模量的比值  $\varphi$  是有关的,该分形维数  $D$  并不是文献[19]中的 1.7,也不是文献[13]中的 1.5。 $K_t^*$  随着  $D$  的变化规律与  $\varphi$  有关,当  $\varphi$  增大时,使得切向接触刚度的变化趋势发生改变的  $D$  在减小。

切向接触刚度随着  $D$  的变化出现先增大后减小的趋势与之前的研究<sup>[13,19]</sup>结果相同,但是之前的研究结果并未给出达到最大切向接触刚度对应的  $D$  是随着  $\varphi$  的增大呈现出减小的趋势。

3) 根据图 4 可知,  $K_t^*$  跟着  $G^*$  的上升呈现出下降的趋势,这是因为分形尺度参数越大,结合面越粗糙,摩擦系数越大,导致结合面刚度降低。

4) 根据图 5 可知,  $K_t^*$  随着  $\varphi$  的增大而增大。这是因为随着  $\varphi$  的增大,材料的屈服强度增大,导致  $a_c^*$  出现减小的趋势。从而导致粗糙表面间弹性接触的面积占比增加,故导致结合面接触刚度的增大。

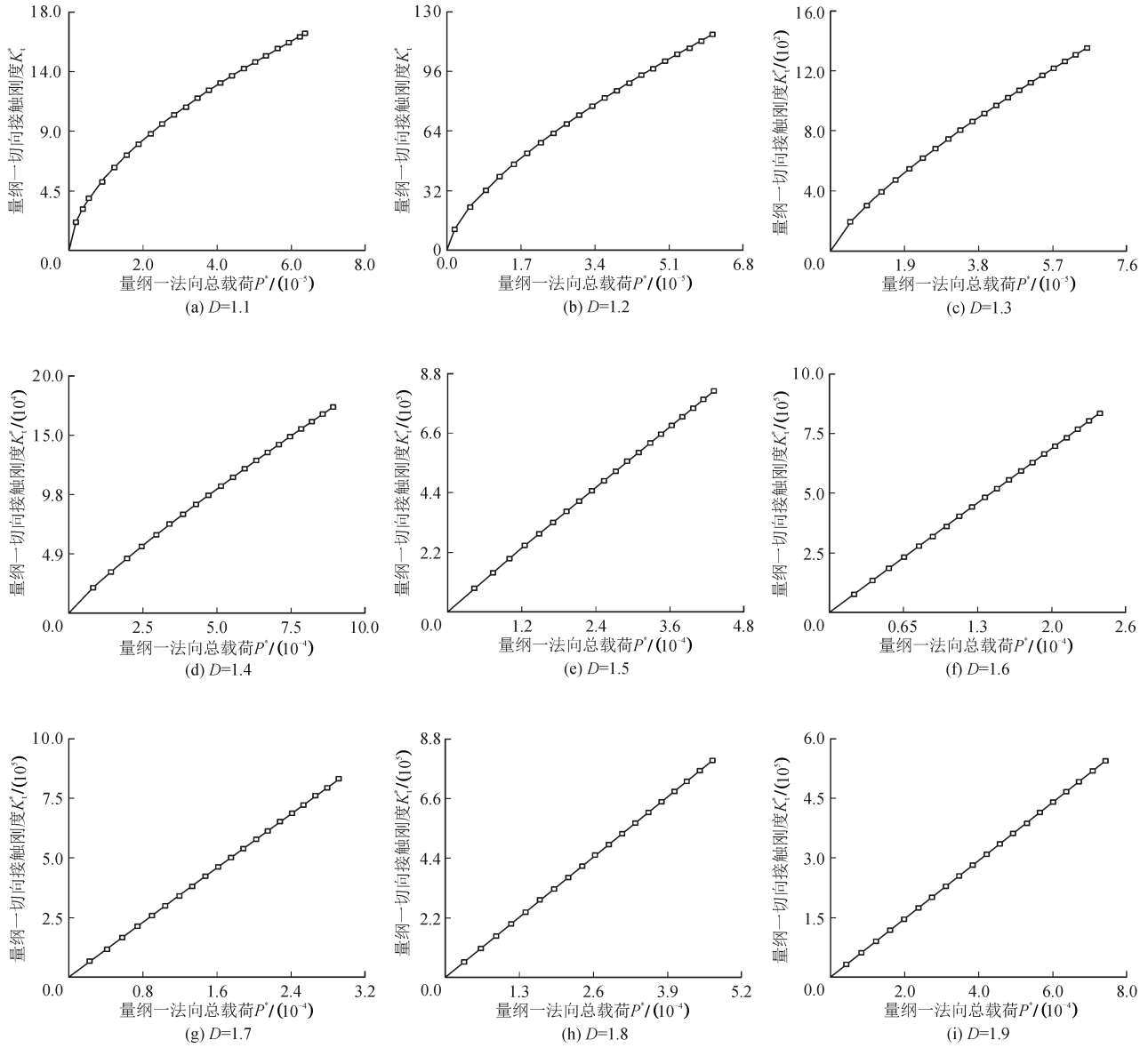


图 2  $D$  对  $K_t^*$  的影响 ( $\varphi = 1, G^* = 1 \times 10^{-9}$ )  
 Fig. 2 Influence of  $D$  on  $K_t^*$  ( $\varphi = 1, G^* = 1 \times 10^{-9}$ )

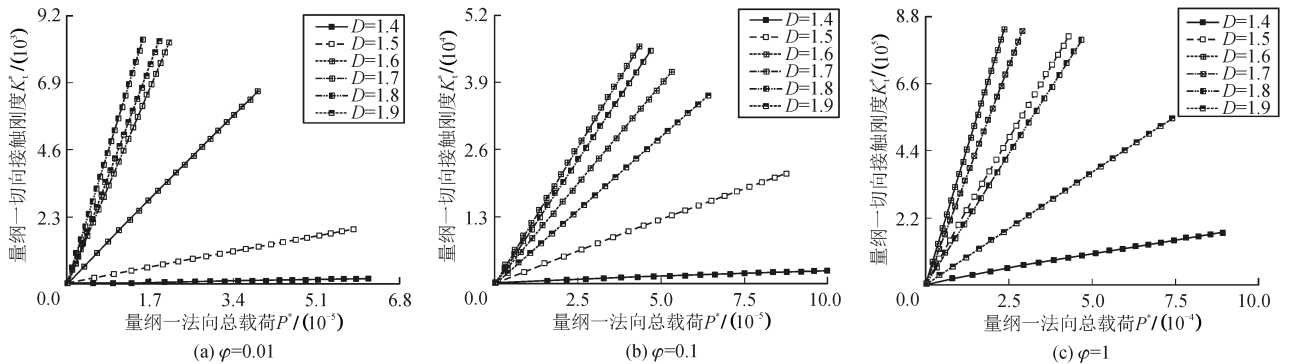
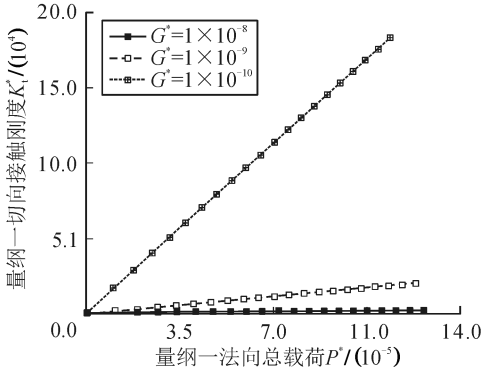
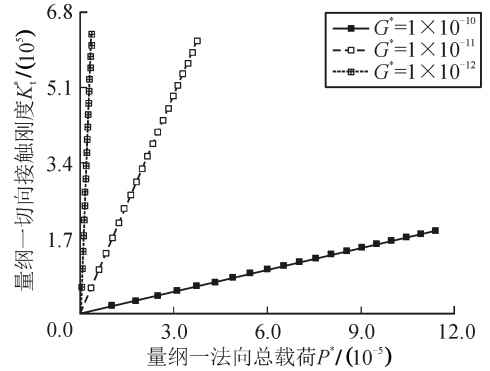


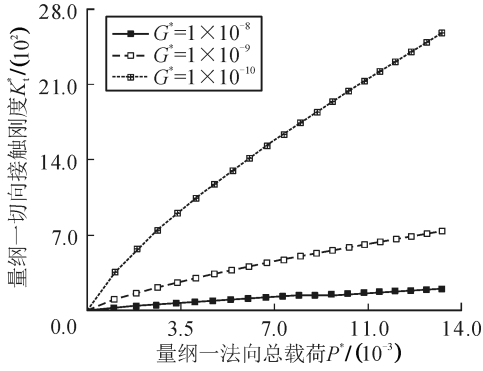
图 3  $D$  与  $\varphi$  共同对  $K_t^*$  的影响 ( $G^* = 1 \times 10^{-9}$ )  
 Fig. 3 Influence of  $D$  and  $\varphi$  on  $K_t^*$  ( $G^* = 1 \times 10^{-9}$ )



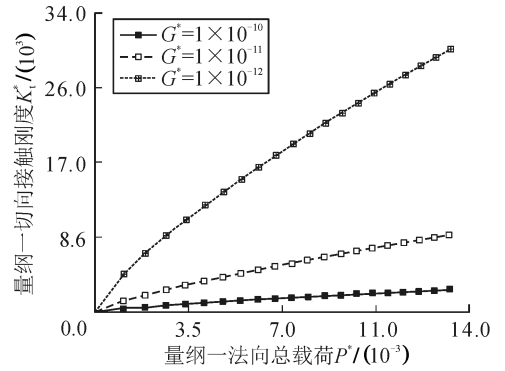
(a)  $D=1.6$



(b)  $D=1.6$

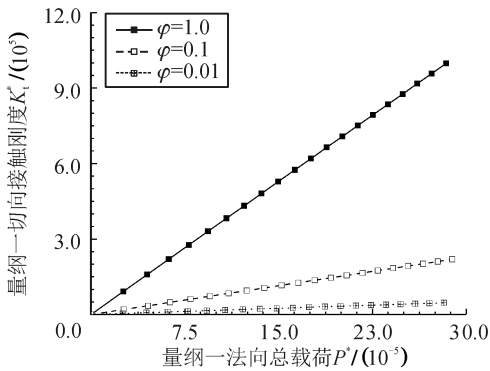


(c)  $D=1.3$

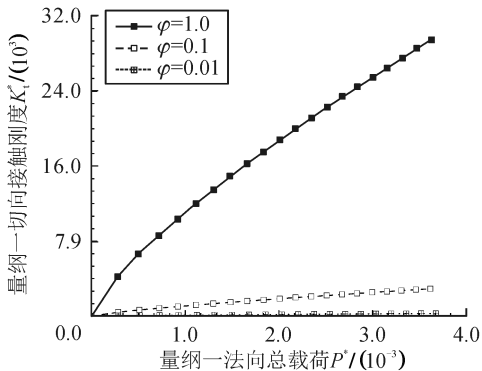


(d)  $D=1.3$

图4  $G^*$  对  $K_t^*$  的影响 ( $\varphi = 0.01$ )  
Fig. 4 Influence of  $G^*$  on  $K_t^*$  ( $\varphi = 0.01$ )



(a)  $D=1.6$



(b)  $D=1.3$

图5  $\varphi$  对  $K_t^*$  的影响 ( $G^* = 1 \times 10^{-9}$ )  
Fig. 5 Influence of  $\varphi$  on  $K_t^*$  ( $G^* = 1 \times 10^{-9}$ )

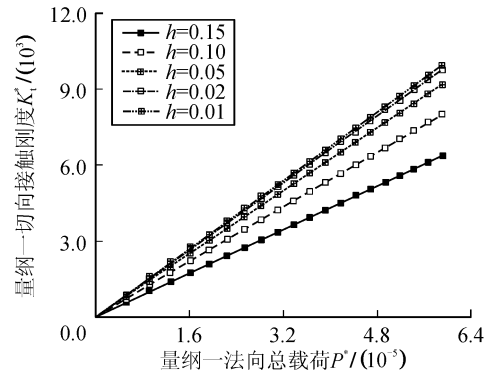


图6  $h$  对  $K_t^*$  的影响 ( $D = 1.6, \varphi = 0.01, G^* = 1 \times 10^{-9}$ )  
Fig. 6 Influence of  $h$  on  $K_t^*$  ( $D = 1.6, \varphi = 0.01, G^* = 1 \times 10^{-9}$ )

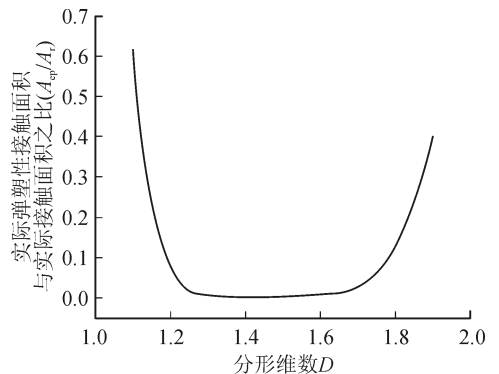


图7 实际弹塑性接触面积占实际接触面积的比例图  
Fig. 7 Ratio of actual elastoplastic contact area to actual contact area

5) 根据图 6 可知,当其它参数一定时,随着切向载荷系数  $h$  增大,  $K_t^*$  减小。这是由于  $h = T/P$ , 当法向载荷固定不变时,随着  $h$  的增大,切向载荷增大,使得接触面抵抗切向变形的能力减弱,从而使得切向接触刚度减小。

6) 根据图 2~6 可知,  $K_t^*$  总是跟着  $P^*$  的增大出现上升的趋势。出现这种趋势是由于粗糙表面间逐渐增大的法向总载荷,加大了结合面处于弹性阶段的实际接触面积,从而使得切向接触刚度增大。

7) 微凸体处于弹塑性过渡阶段的实际接触面积占整个接触过程的实际接触面积的比例与  $D$  间的关系见图 7。该结果与文献[6]的趋势基本一致。由图 7 可以看出,当  $D$  较大或较小时,微凸体处于弹塑性过渡阶段的实际接触面积占整个接触过程的实际接触面积的比例较大,因此不能忽略弹塑性过渡阶段对接触特性的影响。

## 5 理论计算与试验验证

为验证本文建立的考虑弹塑性过渡阶段的切向刚度模型的优越性,设计如图 8 所示的接触试验模型。

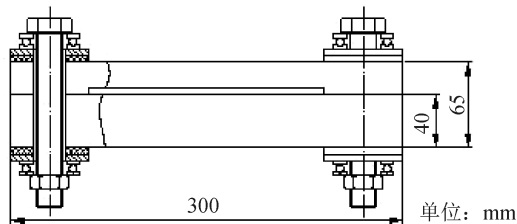


图 8 实验装置图

Fig. 8 Experimental device

为将结合部孤立,螺栓两侧采用橡胶垫将两块板与螺栓隔离开,并且将整个结构与地面也通过橡胶垫隔离开。螺栓上粘有应变片用来测量螺栓拉力,在平板上装有 IC 压电式加速度传感器,其灵敏度为 100 mv/g,量程为 50 g,分辨率为 0.000 2 g,采样频率范围为 0.7 ~ 10 000 Hz,采用阿尔泰 USB2085 动态数据采集仪进行实验数据的采集与记录,该采集仪具有 32 通道并且可以进行数模转化,能够连续地采集所需要的离散数据点的信息。

实验装置见图 9,在边界位置布置 8 个位移传感器,其分布位置为图 9 中 1~8,并在内部布置 9 个激振点,其分布位置为图 9 中 1~9。激振力信号通过信号放大器与采集卡反馈给计算机,并且利用位移传感器测量输出信号,通过采集信号的频域分析,得到试样的固有频率。

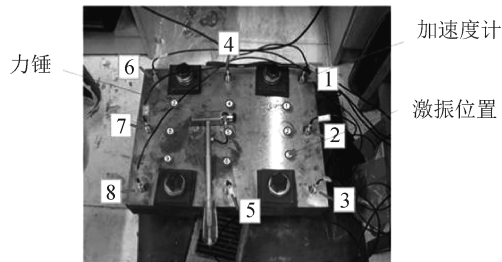


图 9 结合面固有频率测定实验装置图

Fig. 9 Experimental device for the measurement of the natural frequency of the joint

有限元模型见图 10,上下试样之间的接触层被等效为一种均质的各向同性的虚拟材料,虚拟材料的等效厚度为 309.6  $\mu\text{m}$ 。

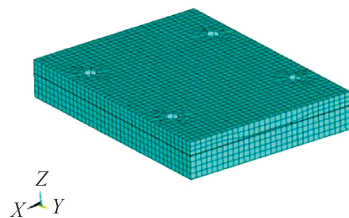


图 10 包含虚拟接触层的接触试样有限元模型

Fig. 10 Finite element model for contact sample containing virtual layer

有限元模型采用 8 节点的等参单元,单元总数为 11 140 个,其中虚拟接触层的单元总数为 852 个。有限元模型的边界条件为自由状态,虚拟材料的法向参数通过文献[8]的法向接触刚度模型推导出,而切向参数通过本文模型以及文献[12]建立的切向刚度模型分别推导出。将所获得的虚拟接触层材料参数通过 APDL 程序引入所建立的有限元模型,通过本文模型、文献[12]模型得到的有限元仿真结果与试验所得在不同拧紧力矩下的前三阶的固有频率的对比曲线,见图 11。

由图 11 可以看出,不论虚拟材料结合部还是试验测量得到的固有频率都是随着拧紧力矩的增大而增大,这是因为结合部接触压力增大,导致结合部接触刚度增大,使得系统的固有频率升高。

从图 11 还可以看出,在不同阶的固有频率曲线中,本文所建立的模型得到的固有频率总是比文献[12]模型所建立的固有频率更加地靠近试验测得的固有频率曲线,这是因为本文所建立的模型基于微凸体的连续变形理论,考虑弹塑性过渡阶段产生的切向刚度,比文献[12]所建立的模型更加地符合实际接触情况,所以得到的数据更加准确,精度也更高。因此本文提出的由切向接触刚度模型来预测固定结合部的动态特性会更加准确。



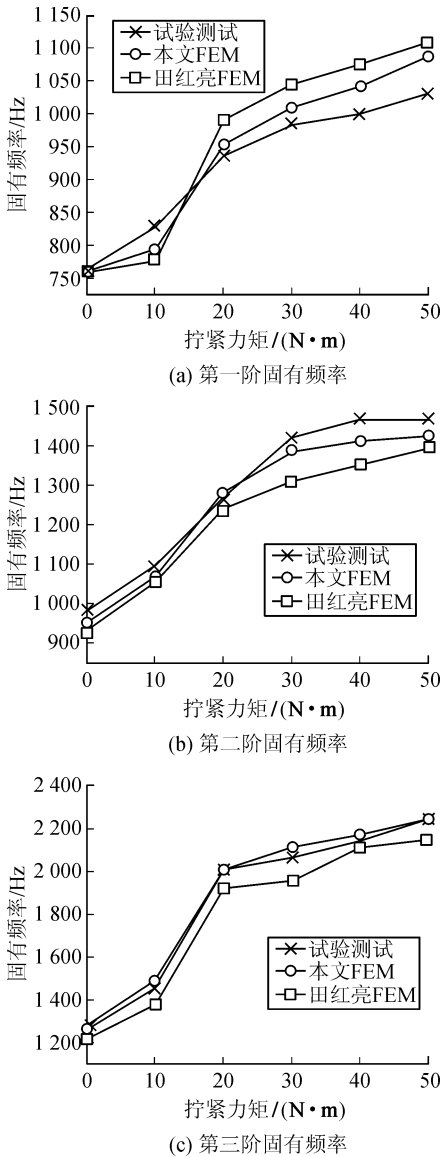


图 11 有限元模型固有频率与实验固有频率对比  
Fig. 11 Comparison of the natural frequencies of FE model and the experimental natural frequencies

## 6 结论

1) 基于微凸体连续变形理论,首次考虑了将弹塑性过渡阶段中屈服区域没有扩大至整个接触表面前的弹塑性过渡阶段所产生的切向刚度计入粗糙表面切向接触刚度模型。在文献[17]的基础上,建立了包含微凸体在弹塑性过渡阶段中前两个小阶段的切向刚度分形模型。

2) 分析结果显示,随着分形维数的增大,切向接触刚度出现先增大后减小的趋势。但是在不同的较软材料的屈服强度与两材料的复合弹性模量的比值下,出现最大切向接触刚度对应的分形维数是不同的。 $\varphi$ 增大时使得切向接触刚度发生改变的分形维数出现减小。

3) 仿真结果显示:当分形维数较大或较小时,弹塑性过渡阶段的实际接触面积占整个接触过程的实际接触面积的比例较大,不能忽略弹塑性过渡阶段对接触特性的影响。此外还发现弹塑性过渡阶段产生的切向接触刚度的大小取决于表面分形维数的大小。因为粗糙表面弹塑性过渡阶段的实际接触面积占整个接触过程的实际接触面积的比例随着分形维数的增加出现先减小后增大的趋势,当分形维数较大或较小时,忽略弹塑性过渡阶段会使得切向接触刚度过小。

4) 本文所建立的粗糙表面微凸体切向刚度分形模型与文献[12]的模型进行比较,与试验结果更为接近。说明了由于考虑了微凸体弹塑性过渡阶段的弹性,使得建立的模型得到的切向刚度更加合理。

### 参考文献:

- [1] GREENWOOD J A, WILLIAMSON J B P. Contact of nominally flat surfaces[J]. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Science, 1966, 295(1442):300-319.
- [2] MAJUMDAR A, BHUSHAN B. Fractal model of elastic-plastic contact between rough surfaces[J]. Journal of Tribology, 1991, 113(1):1-11.
- [3] 张学良, 黄玉美, 傅卫平, 等. 粗糙表面法向接触刚度的分形模型[J]. 应用力学学报, 2000, 17(2):31-35. ZHANG Xueliang, HUANG Yumei, FU Weiping, et al. Fractal model of normal contact stiffness between rough surfaces[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2000, 17(2):31-35.
- [4] 尤晋闽, 陈天宁. 结合面法向动态参数的分形模型[J]. 西安交通大学学报, 2009, 43(9):91-94. YOU Jinmin, CHEN Tianning. Fractal model for normal dynamic parameter of joint surfaces[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2009, 43(9):91-94.
- [5] ZHAO Y W, MAIETTA D M, CHANG L. An asperity microcontact model incorporating the transition from elastic deformation to fully plastic flow[J]. Journal of Tribology, 2000, 122(1):86-93.
- [6] 缪小梅, 黄筱调, 袁鸿. 考虑微凸体弹塑性变形的结合面分形接触模型[J]. 农业机械学报, 2013, 44(1):248-252. MIAO Xiaomei, HUANG Xiaodiao, YUAN Hong. Fractal contact model of joint interfaces considering elastic-plastic deformation of asperities[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(1):248-252.
- [7] 王世军, 杨超, 王诗义, 等. 基于真应力-应变关系的粗糙表面法向接触模型[J]. 中国机械工程, 2016, 27

- (16):2148-2154.  
WANG Shijun, YANG Chao, WANG Shiyi, et al. Normal contact model of rough surfaces based on true stress-strain relationship[J]. China Mechanical Engineering, 2016, 27(16):2148-2154.
- [8] 何联格, 左正兴, 向建华. 考虑微凸体弹塑性过渡变形机制的结合面法向接触刚度分形模型[J]. 上海交通大学学报, 2015, 49(1):116-121.  
HE Liange, ZUO Zhengxing, XIANG Jianhua. Normal contact stiffness fractal model considering asperity elastic-plastic transitional deformation mechanism of joint [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2015, 49(1):116-121.
- [9] 张学良, 温淑花, 徐格宁, 等. 结合部切向接触刚度分形模型研究[J]. 应用力学学报, 2003, 20(1):70-72.  
ZHANG Xueliang, WEN Shuhua, XU Gening, et al. Fractal model of the tangential contact stiffness of machined surfaces in contact[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2003, 20(1):70-72.
- [10] CHEN Qi, HUANG Kang, ZHAO Han, et al. Simulation and analysis of the model of calculating contact tangential stiffness between cylinders' joint interfaces by MATLAB[J]. Applied Mechanics and Materials, 2012, 190-191:177-181.
- [11] 李小彭, 鞠行, 赵光辉, 等. 考虑摩擦因素的结合面切向接触刚度分形预估模型及其仿真分析[J]. 摩擦学报, 2013, 33(5):463-468.  
LI Xiaopeng, JU Xing, ZHAO Guanghui, et al. Fractal prediction model for tangential contact stiffness of joint surface considering friction factors and its simulation analysis[J]. Tribology, 2013, 33(5):463-468.
- [12] 田红亮, 陈从平, 方子帆, 等. 应用改进分形几何理论的结合部切向刚度模型[J]. 西安交通大学学报, 2014, 48(7):46-52.  
TIAN Hongliang, CHEN Congping, FANG Zifan, et al. Tangential stiffness model for joint interface adopting the revised fractal geometric theory[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2014, 48(7):46-52.
- [13] 刘鹏, 陈奇, 樊浩, 等. 考虑摩擦的球面切向接触刚度分形模型研究[J]. 中国机械工程, 2016, 27(20):2773-2778.  
LIU Peng, CHEN Qi, FAN Hao, et al. Research on fractal model of TCS between spherical surfaces considering friction factors[J]. China Mechanical Engineering, 2016, 27(20):2773-2778.
- [14] 王世军, 何花兰, 郭璞, 等. 粗糙表面接触面积和承载规律的研究[J]. 西安理工大学学报, 2014, 30(1):22-27.  
WANG Shijun, HE Hualan, GUO Pu, et al. Research on contact area and load carrying capacity between coarse surfaces[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2014, 30(1):22-27.
- [15] 张学良, 陈永会, 温淑花, 等. 考虑弹塑性变形机制的结合面法向接触刚度建模[J]. 振动工程学报, 2015, 28(1):91-99.  
ZHANG Xueliang, CHEN Yonghui, WEN Shuhua, et al. The model of normal contact stiffness of joint interfaces incorporating elastoplastic deformation mechanism[J]. Journal of Vibration Engineering, 2015, 28(1):91-99.
- [16] KOGUT L, ETSION I. Elastic-plastic contact analysis of a sphere and a rigid flat[J]. Journal of Applied Mechanics, 2002, 69(5):657-662.
- [17] 盛选禹, 雒建斌, 温诗铸. 基于分形接触的静摩擦系数预测[J]. 中国机械工程, 1998, 9(7):16-18.  
SHENG Xuanyu, LUO Jianbin, WEN Shizhu. Static friction coefficient model based on fractal contact[J]. China Mechanical Engineering, 1998, 9(7):16-18.
- [18] MINDLIN R D, DERESIEWICZ H. Elastic sphere in contact under varying oblique forces[J]. Journal of Applied Mechanics, 1953, 20:327-344.
- [19] GUAN Dong, JING Li, HILTON H H, et al. Tangential contact analysis of spherical pump based on fractal theory [J]. Tribology International, 2018, (119):531-538.

(责任编辑 王绪迪)