

DOI:10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2019.04.010

隐变量分形插值曲线的计盒维数

张明霞, 冯志刚

(江苏大学 理学院, 江苏 镇江 212013)

摘要: 为了计算隐变量分形插值曲线的计盒维数,根据振幅与盒子数的关系,给出了隐变量分形插值曲线盒子数的估计范围,接着讨论了两种情况,得到了隐变量分形插值曲线的维数公式。

关键词: 隐变量分形插值函数; 振幅; 计盒维数

中图分类号: O184

文献标志码: A

文章编号: 1006-4710(2019)04-0467-05

Box counting dimension of hidden variable fractal interpolation curve

ZHANG Mingxia, FENG Zhigang

(College of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

Abstract: To calculate the box counting dimension of hidden variable fractal interpolation curve, the range of box counting is estimated according to the relation of box number and oscillation. On the basis of the discussion of the two cases, the dimension equation to the hidden variable fractal interpolation curve is obtained.

Key words: hidden variable fractal interpolation function; oscillation; box counting dimension

分形插值给出了拟合数据的一种新思想,为很多领域提供了有力的理论依据,例如海岸线、材料断口轮廓、心电图等,而插值的构造方法有很多种,各有千秋。为了提高插值的灵活性,人们将分形插值推广到隐变量分形插值的情形。Barnsley 等^[1]首先给出了一元隐变量分形插值函数的结构,它的思想就是在 R^3 中构造一组三维压缩变换,将其吸引子投影到 R^2 ,其投影就是插值于给定数据集的函数图像,而 R^3 中的这些额外自由度就是所谓的隐变量,这些变量可以用来调节函数的形状和分形维数。之后,隐变量分形插值函数得到广泛研究。文献[2,3]研究了具有常数压缩因子的隐变量分形插值曲面的构造;Kapoor 和 Prasad^[4]讨论了数据集的扰动对隐变量分形插值函数的光滑性以及稳定性的影响;文献[5]提出了一个自由变量是函数,其他自由变量是常数的隐变量分形插值曲面的构造,但没有给出它们的分形性质;杨丽萍^[6]探讨了当 HVFIF 迭代函数系的自由参量和函数项联合扰动时,扰动了的 HVFIF 与原 HVFIF 的差,并且得到两者误差估计的上界,其次研究了隐变量分形插值函数的矩量积

分、Riemann-Liouville 分数阶积分的扰动误差问题,证实了自由参数及函数项的细微扰动对 HVFIF 的函数值、矩量积分及 Riemann-Liouville 分数阶积分干扰不明显。分形维数是分形几何中的一个重要研究部分。Mandelbrot^[7]用维数度量不规则图形的粗糙度;Ruan 等^[8]提出一个不同的方法计算连续函数计盒维数;Feng^[9]研究了矩形区域上的分形插值曲面,并通过盒维数与 δ -变差的关系得到二元分形插值函数盒维数的精确值;冯志刚等^[10]根据连续函数 δ -变差性质分析了分形插值函数的 δ -变差性质,得到了分形插值曲线计盒维数定理新的证明方式;徐惠^[11]、王伟^[12]根据变差讨论了分形插值函数的维数;文献[13]构造了空间分形插值曲线,进而得到了计算空间分形插值曲线计盒维数的公式;文献[14]对基于循环迭代的分形插值函数的构造方法及其计盒维数进行了研究,给出了其维数定理。由于隐变量分形插值函数构造的复杂性与特殊性,其维数讨论是极少的。

本文在上述文献基础上根据振幅与盒子数的关系,得到了一元隐变量分形插值曲线的维数公式,为

收稿日期: 2018-11-23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11501253)

作者简介: 张明霞,女,硕士生,研究方向为分形几何。E-mail:1982186774@qq.com

通讯作者: 冯志刚,男,教授,博导,博士,研究方向为分形几何和小波分析的理论及其应用研究。E-mail:zgfeng@ujs.edu.cn

隐变量分形插值曲线的维数计算提供了理论基础。

1 隐变量分形插值曲线的结构

考虑一元隐变量分形插值函数。设 $\{(x_i, y_i) \in I \times J_1; i = 0, 1, \dots, N\}$ 是平面 R^2 上一个给定的数据集, 其中 $I = [0, 1], J_1$ 是一个闭区间, $0 < x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1, N > 1$ 为给定的正整数。给定一组实数 $\{z_i; i = 0, 1, \dots, N\}$, 得到一个广义数据集: $\{(x_i, y_i, z_i) \in I \times J_1 \times J_2; i = 0, 1, \dots, N\} \subset R^2$, J_2 是包含 $\{z_i; i = 0, 1, \dots, N\}$ 的一个适当的闭区间。

令 $I_i = [x_{i-1}, x_i], |I_i| = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, N, D = J_1 \times J_2, K = I \times D$ 。

定义映射 $L_i: I \rightarrow I_i, i = 1, 2, \dots, N$, 满足映射:

$$L_i(x) = |I_i|x + x_{i-1} \quad (1)$$

令 $F_i: K \rightarrow D, i = 1, 2, \dots, N$, 是连续映射且满足:

$$F_i(x, y, z) = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ 0 & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_i(x) \\ q_i(x) \end{pmatrix} \quad (2)$$

$p_i(x), q_i(x)$ 是两个定义在 I 上的 Lipschitz 函数, 为了插值的连续性, 假设以下端点条件成立:

$$\begin{cases} F_i(x_0, y_0, z_0) = (y_{i-1}, z_{i-1})^T \\ F_i(x_N, y_N, z_N) = (y_i, z_i)^T \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

由式(2)、(3)可以计算出 $p_i(0), p_i(1), q_i(0), q_i(1)$ 应满足的端点条件。 a_i, b_i, d_i 为自由参量, 且满足约束条件 $|a_i| < 1, |b_i| + |d_i| < 1$ 。

对于任意的 $(y_i, z_i), (y_j, z_j) \in R^2$, 定义 R^2 上的度量:

$$\rho((y_i, z_i), (y_j, z_j)) = |y_i - y_j| + |z_i - z_j|, \quad 0 \leq i, j \leq N, \quad i, j \in Z$$

故对于任意三个点 $(x, y, z), (x', y, z), (x, y', z') \in K$, 存在某正数 c 使得下式成立:

$$\begin{cases} \rho(F_i(x, y, z), F_i(x', y, z)) \leq c|x - x'| \\ \rho(F_i(x, y, z), F_i(x, y', z')) \leq s'\rho((y, z), (y', z')) \end{cases}$$

这里 $s' = \max_{1 \leq i \leq N} \{|a_i|, |b_i| + |d_i|\} < 1$ 。令

$$W_i(x, y, z) = (L_i(x), F_i(x, y, z)), i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

则 $\{K; W_i(x, y, z); i = 1, 2, \dots, N\}$ 是 R^3 上的 IFS, 存在 R^3 上的度量使得 W_i 在此度量下是压缩的, 由文献[1]知该迭代函数系有唯一的吸引子 G, G 是一个连续的向量值分形函数的图像, 记此向量值分形函数为 $V: I \rightarrow D$, 满足 $V(x_i) = (y_i, z_i), i = 0, 1, \dots, N$, 且有下列不动点方程:

$$V(x) = F_i(L_i^{-1}(x), V(L_i^{-1}(x))), \forall x \in I_i, i = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

记

$$V(x) = (f(x), g(x)), x \in I \quad (6)$$

则 $f: I \rightarrow R$ 为隐变量分形插值函数, 记为 HVFIF, 它的图像是吸引子 G 在 xoy 平面上的投影且经过给定的数据集 $\{(x_i, y_i) \in I \times J_1; i = 0, 1, \dots, N\}$ 。 $g: I \rightarrow R$ 是一般的分形插值函数, 其图像是吸引子 G 在 xoz 平面上的投影且经过 $\{(x_i, z_i) \in I \times J_2; i = 0, 1, \dots, N\}$ 。

由式(5)、(6)可得:

$$(f(x), g(x)) = F_i(L_i^{-1}(x), f(L_i^{-1}(x)), g(L_i^{-1}(x))), x \in I_i \quad (7)$$

于是有:

$$\begin{cases} f(L_i(x)) = a_i f(x) + b_i g(x) + p_i(x) \\ g(L_i(x)) = d_i g(x) + q_i(x) \end{cases} \quad x \in I \quad (8)$$

例 1 令 $I = [0, 1], N = 3$, 取数据点: $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0), (x_1, y_1, z_1) = (0.5, 1, 1), (x_2, y_2, z_2) = (1, 0, 0)$; 并取 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.4 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.7 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}。$$

这里 $|a_i| = |b_i|, p_i(x) = e_i x + f_i, q_i(x) = t_i x + r_i, e_i, f_i, t_i, r_i$ 由端点条件(3)计算得到。

迭代图形及投影如图 1 所示。图中蓝色曲线代表空间曲线, 绿色曲线表示其在 xoz 面的投影, 红色表示其在 xoy 面的投影, 即所要研究的隐变量分形插值曲线。

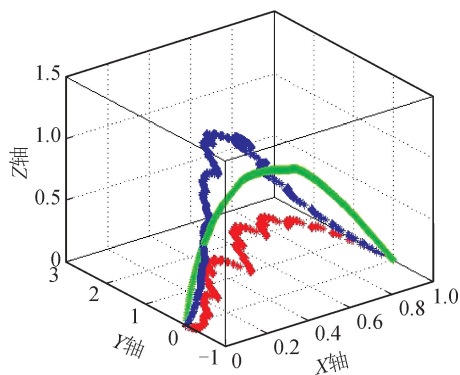
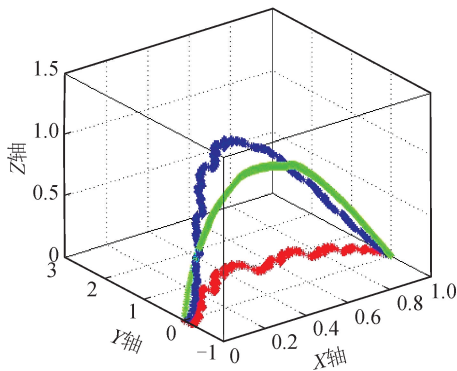


图 1 $|a_i| = |b_i|$ 时, 迭代 9 次
Fig. 1 When $|a_i| = |b_i|$, iterations 9 times

例 2 数据点取值同例 1, 改变 a_i 和 b_i , 使 $|a_i| \neq |b_i|$, 取 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.4 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 0.7 & -0.3 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}。$$

其迭代图形及投影如图 2 所示(线型含义同图 1)。

图2 $|a_i| \neq |b_i|$ 时,迭代9次Fig.2 When $|a_i| \neq |b_i|$, iterations 9 times

2 连续函数的计盒维数

Ruan 等^[8]研究了连续函数计盒维数,对于任意 $h_1, h_2, \dots, h_n \in Z, \epsilon > 0, \prod_{i=1}^n [h_i \epsilon, (h_i + 1)\epsilon]$ 是 R^n 上的 ϵ 坐标柱, E 是 R^n 上的一个有界集, $N_E(\epsilon)$ 是与集 E 相交的 ϵ 坐标柱的个数。如果 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_E(\epsilon)}{\log 1/\epsilon}$ 存在, 称其为 E 的计盒维数, 即 $\dim_B(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_E(\epsilon)}{\log 1/\epsilon}$ ^[15]。

设 r 是 $[a, b]$ 上的连续函数, $Tr = \{(x, r(x)) | x \in [a, b]\}$ 是 r 的图像。

定义 1^[8] 任取 $0 < \epsilon < \frac{b-a}{2}$, 如果 $\tau_0 = a, \tau_m = b,$

$\frac{\epsilon}{2} < \tau_{l+1} - \tau_l \leq \epsilon, l = 0, 1, 2, \dots, m-1$, 则称 $\{\tau_l\}_{l=0}^m$ 为区间 $[a, b]$ 的 ϵ 分割, 对于区间 $[a, b]$ 上的任意 ϵ 分割 $\{\tau_l\}_{l=0}^m$, 定义:

$$N_{Tr}^*(\epsilon, \{\tau_l\}) = \epsilon^{-1} \sum_{l=0}^{m-1} O(f, \tau_l, \epsilon) \quad (9)$$

这里 $O(f, \tau_l, \epsilon) = \sup\{f(x_i) - f(x_j) | x_i, x_j \in [\tau_l, \tau_l + \epsilon] \cap [a, b]\}$ 。

引理 1^[8] r 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 则存在常数 $\gamma > 0$, 使得 $[a, b]$ 上的任意 ϵ 分割 $\{\tau_l\}_{l=0}^m$ 有:

$$\frac{1}{3} N_{Tr}^*(\epsilon, \{\tau_l\}) \leq N_{Tr}(\epsilon) \leq \gamma \epsilon^{-1} + 4 N_{Tr}(\epsilon, \{\tau_l\}) \quad (10)$$

3 隐变量分形插值曲线的计盒维数

下面通过估计隐变量分形插值函数的盒子数得到其维数方程。

引理 2 f 是由式(4)确定的一元隐变量分形插值函数, 对于 $\forall 0 < \epsilon < 1/2 \min\{x_i - x_{i-1} | i = 1, \dots, N\}, \forall \delta > 0, \exists \beta_1, \beta_2 > 0$ 使得:

$$\sum_{i=1}^N \frac{|a_i|}{|I_i|} N_{Tr}^*\left(\frac{\epsilon}{|I_i|}\right) - \sum_{i=1}^N \frac{|b_i|}{|I_i|} N_{Tg}^*\left(\frac{\epsilon}{|I_i|}\right) - \beta_1 \epsilon^{-1-\delta} \leq N_{Tr}^*(\epsilon) \leq \sum_{i=1}^N \frac{|a_i|}{|I_i|} N_{Tr}^*\left(\frac{\epsilon}{|I_i|}\right) + \sum_{i=1}^N \frac{|b_i|}{|I_i|} N_{Tg}^*\left(\frac{\epsilon}{|I_i|}\right) + \beta_2 \epsilon^{-1-\delta}.$$

证明: 令 $i = 1, 2, \dots, N, \{\tau_{i,l}\}_{l=0}^m$ 为 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的 ϵ 分割, 由于

$$f(L_i(x)) = a_i f(x) + b_i g(x) + p_i(x) \quad (11)$$

则对于 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的 ϵ 分割 $\{\tau_{i,l}\}_{l=0}^m$, 有:

$$O(f, \tau_{i,l}, \epsilon) \geq |a_i| O\left(f, L_i^{-1}(\tau_{i,l}), \frac{\epsilon}{|I_i|}\right) - |b_i| O\left(g, L_i^{-1}(\tau_{i,l}), \frac{\epsilon}{|I_i|}\right) - O\left(p, L_i^{-1}(\tau_{i,l}), \frac{\epsilon}{|I_i|}\right) \quad (12)$$

这里 $\{L_i^{-1}(\tau_{i,l})\}_{l=0}^m$ 是 $[0, 1]$ 上的 $\frac{\epsilon}{|I_i|}$ 分割, 由 $\dim_B(Tp_i) = 1$ 和引理 1, 则对于任意的 $\delta > 0$, 存在常数 $\xi_i > 0$, 使

$$N_{Tp_i}^*\left(\frac{\epsilon}{|I_i|}, \{L_i^{-1}(\tau_{i,l})\}\right) \leq \xi_i \epsilon^{-1-\delta}, \forall 0 < \epsilon < \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1}) \quad (13)$$

令 $N_{i,Tr}^*(\epsilon) = \inf\{N_{i,Tr}^*(\epsilon, \{\tau_{i,l}\})\}$, $\{\tau_{i,l}\}$ 是 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的 ϵ 分割, 则由式(12)、(13)可以得到:

$$N_{i,Tr}^*(\epsilon) \geq \frac{|a_i|}{|I_i|} N_{Tr}^*\left(\frac{\epsilon}{|I_i|}\right) - \frac{|b_i|}{|I_i|} N_{Tg}^*\left(\frac{\epsilon}{|I_i|}\right) - \xi_i \epsilon^{-1-\delta}$$

那么存在常数 $\beta_1 > 0$, 使

$$N_{Tr}^*(\epsilon) \geq \sum_{i=1}^N \frac{|a_i|}{|I_i|} N_{Tr}^*\left(\frac{\epsilon}{|I_i|}\right) - \sum_{i=1}^N \frac{|b_i|}{|I_i|} N_{Tg}^*\left(\frac{\epsilon}{|I_i|}\right) - \beta_1 \epsilon^{-1-\delta},$$

对任意 $0 < \epsilon < \frac{1}{2} \min\{x_i - x_{i-1} | i = 1, 2, \dots, N\}$ 成立。

相反地, 令 $\{\tau_l\}_{l=0}^m$ 是 $[0, 1]$ 上的任意 $\frac{\epsilon}{|I_i|}$ 分割, 则 $\{L_i(\tau_l)\}_{l=0}^m$ 是 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的 ϵ 分割, 由式(11)可得:

$$O(f, L_i(\tau_l), \epsilon) \leq |a_i| O\left(f, \tau_l, \frac{\epsilon}{|I_i|}\right) + |b_i| O\left(g, \tau_l, \frac{\epsilon}{|I_i|}\right) + O\left(p, \tau_l, \frac{\epsilon}{|I_i|}\right),$$

$l \in \{0, 1, \dots, m\}$

同理可以推得对于任意 $\delta > 0$, 存在常数 $\beta_2 > 0$,

使

$$N_{Tf}^*(\epsilon) \leq \sum_{i=1}^N \frac{|a_i|}{|I_i|} N_{Tf}^* \left(\frac{\epsilon}{|I_i|} \right) + \sum_{i=1}^N \frac{|b_i|}{|I_i|} N_{Tg}^* \left(\frac{\epsilon}{|I_i|} \right) + \beta_2 \epsilon^{-1-\delta}.$$

引理得证。

定理 1 f 是由式(4)确定的一元隐变量分形插值函数, 假设 $\sum_{i=1}^N |c_i| > 1$, $\dim_B(Tp_i) = 1$, $1 \leq i \leq N$, 则 $\dim_B(Tf) = s$ 或 1 , s 是方程 $\sum_{i=1}^N |I_i|^{s-1} |c_i| = 1$ 的唯一解, 其中 $|c_i| = \max\{|a_i|, |b_i|\}$ 。

证明: 假设 $\dim_B(Tf) > 1$, s 是方程 $\sum_{i=1}^N |I_i|^{s-1} |c_i|$ 的唯一解。从 $\sum_{i=1}^N |c_i| > 1$ 和 $\dim_B(Tf) > 1$, 取 $0 < \delta < \min\{s-1, \dim_B(Tf)-1\}$, 使得 $\lambda = \sum_{i=1}^N |c_i| |I_i|^\delta > 1$ 。

接下来分两种情况讨论:

a) 若 $|a_i| = |b_i|$, 那么 $|c_i| = |a_i|$ 。由引理 2 结论及 $|a_i| = |b_i|$, 存在 $\beta_1, \beta_2 > 0$ 使得:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{|a_i|}{|I_i|} N_{Tf}^* \left(\frac{\epsilon}{|I_i|} \right) - \sum_{i=1}^N \frac{|a_i|}{|I_i|} N_{Tg}^* \left(\frac{\epsilon}{|I_i|} \right) - \beta_1 \epsilon^{-1-\delta} &\leq N_{Tf}^*(\epsilon) \leq \\ \sum_{i=1}^N \frac{|a_i|}{|I_i|} N_{Tf}^* \left(\frac{\epsilon}{|I_i|} \right) + \sum_{i=1}^N \frac{|a_i|}{|I_i|} N_{Tg}^* \left(\frac{\epsilon}{|I_i|} \right) + \beta_2 \epsilon^{-1-\delta} \end{aligned} \quad (14)$$

对于 $\forall 0 < \epsilon < \frac{1}{2} \min\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, 2, \dots, N\}$ 。

g 是一般的分形插值函数, 根据文献[16], 存在 $B_1, B_2 > 0$ 使得:

$$B_1 \epsilon^{-s} \leq N_{Tg}^*(\epsilon) \leq B_2 \epsilon^{-s}$$

那么, 存在较大的 $\theta_1, \theta_2 > 0$, 由式(14)有:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{|a_i|}{|I_i|} N_{Tf}^* \left(\frac{\epsilon}{|I_i|} \right) - \theta_1 \epsilon^{-1-\delta} &\leq N_{Tf}^*(\epsilon) \leq \\ \sum_{i=1}^N \frac{|a_i|}{|I_i|} N_{Tf}^* \left(\frac{\epsilon}{|I_i|} \right) + \theta_2 \epsilon^{-1-\delta} \end{aligned}$$

定义 $\underline{|I_i|} = \min_{1 \leq i \leq N} |I_i|$, $\overline{|I_i|} = \max_{1 \leq i \leq N} |I_i|$ 。

由于 $0 < \delta < \min\{s-1, \dim_B(Tf)-1\}$, 则存在 $0 < \epsilon < \frac{1}{2} \min\{x_i - x_{i-1}\}$ 使得对于任意

$0 < \epsilon < \frac{\epsilon_0}{\underline{|I_i|}}$, 有:

$$N_{Tf}^*(\epsilon) \geq \frac{2\theta_1}{\lambda-1} \epsilon^{-1-\delta}$$

选取充分小的 $k_1 > 0$, 使得 $k_1 \epsilon_0^{-s} \leq \frac{\theta_1}{\lambda-1} \epsilon_0^{-1-\delta}$,

再选取充分大的 $k_2 > 0$, 使得对任意 $\epsilon_0 < \epsilon < \frac{\epsilon_0}{\underline{|I_i|}}$,

有 $N_{Tf}^*(\epsilon) \leq \frac{\theta_2}{1-\lambda} \epsilon^{-1-\delta} + k_2 \epsilon^{-s}$ 。

那么对于 $\epsilon_0 < \epsilon < \frac{\epsilon_0}{\underline{|I_i|}}$,

$$\frac{\theta_1}{\lambda-1} \epsilon^{-1-\delta} + k_1 \epsilon^{-s} \leq N_{Tf}^*(\epsilon) \leq \frac{\theta_2}{1-\lambda} \epsilon^{-1-\delta} + k_2 \epsilon^{-s} \quad (15)$$

如果 $\overline{|I_i|} \epsilon_0 < \epsilon < \epsilon_0$, 那么 $\epsilon_0 < \frac{\epsilon}{\overline{|I_i|}} \leq \frac{\epsilon_0}{\overline{|I_i|}}$,

所以

$$\begin{aligned} N_{Tf}^*(\epsilon) &\geq \sum_{i=1}^N \frac{|a_i|}{|I_i|} N_{Tf}^* \left(\frac{\epsilon}{|I_i|} \right) - \theta_1 \epsilon^{-1-\delta} \geq \\ \frac{\theta_1}{\lambda-1} \epsilon^{-1-\delta} + k_1 \epsilon^{-s} \\ N_{Tf}^*(\epsilon) &\leq \sum_{i=1}^N \frac{|a_i|}{|I_i|} N_{Tf}^* \left(\frac{\epsilon}{|I_i|} \right) + \theta_2 \epsilon^{-1-\delta} \leq \\ \frac{\theta_2}{1-\lambda} \epsilon^{-1-\delta} + k_2 \epsilon^{-s} \end{aligned}$$

因此, 对于任意 $\overline{|I_i|} \epsilon_0 < \epsilon < \epsilon_0$, 式(15)都成立。

通过归纳法, 式(15)对任意 $\overline{|I_i|}^n \epsilon_0 < \epsilon \leq \frac{\epsilon_0}{\underline{|I_i|}}$ 都成立, 所以 $\forall 0 < \epsilon \leq \frac{\epsilon_0}{\underline{|I_i|}}$ 使式(15)都成立, 这里 $s > 1 + \delta$, 因此有 $\dim_B(Tf) = s$ 。

b) 若 $|a_i| \neq |b_i|$, 由式(14)及 $|c_i| = \max\{|a_i|, |b_i|\}$, 可得:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{|a_i|}{|I_i|} N_{Tf}^* \left(\frac{\epsilon}{|I_i|} \right) - \sum_{i=1}^N \frac{|b_i|}{|I_i|} N_{Tg}^* \left(\frac{\epsilon}{|I_i|} \right) - \beta_1 \epsilon^{-1-\delta} &\geq \\ \sum_{i=1}^N \frac{|c_i|}{|I_i|} \left(N_{Tf}^* \left(\frac{\epsilon}{|I_i|} \right) - N_{Tg}^* \left(\frac{\epsilon}{|I_i|} \right) \right) - \beta_1 \epsilon^{-1-\delta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{|a_i|}{|I_i|} N_{Tf}^* \left(\frac{\epsilon}{|I_i|} \right) + \sum_{i=1}^N \frac{|b_i|}{|I_i|} N_{Tg}^* \left(\frac{\epsilon}{|I_i|} \right) + \beta_2 \epsilon^{-1-\delta} &\leq \\ \sum_{i=1}^N \frac{|c_i|}{|I_i|} \left(N_{Tf}^* \left(\frac{\epsilon}{|I_i|} \right) + N_{Tg}^* \left(\frac{\epsilon}{|I_i|} \right) \right) + \beta_2 \epsilon^{-1-\delta} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{|c_i|}{|I_i|} \left(N_{Tf}^* \left(\frac{\epsilon}{|I_i|} \right) - N_{Tg}^* \left(\frac{\epsilon}{|I_i|} \right) \right) - \beta_1 \epsilon^{-1-\delta} &\leq \\ N_{Tf}^*(\epsilon) &\leq \sum_{i=1}^N \frac{|c_i|}{|I_i|} \left(N_{Tf}^* \left(\frac{\epsilon}{|I_i|} \right) + N_{Tg}^* \left(\frac{\epsilon}{|I_i|} \right) \right) + \beta_2 \epsilon^{-1-\delta}. \end{aligned}$$

后续证明与 a) 类似, 在此不再重复。所以当 $|a_i| \neq |b_i|$ 时, $\dim_B(Tf) = s$ 。

综上所述, f 的计盒维数是方程 $\sum_{i=1}^N |I_i|^{s-1} |c_i| = 1$ 的唯一解, 这里 $|c_i| = \max\{|a_i|, |b_i|\}$ 。

定理 1 说明, 由式(4)确定的一元隐变量分形插值函数的维数与自由参量 a_i, b_i 的最大值有关。

4 应用

选取例 1 中的隐变量分形插值曲线, $|a_i| = |b_i|, |I_i| = 0.5, i = 1, 2$, 由定理 1, 可以计算出该分形图形的计盒维数 $s = \log_{0.5}(1/1.1) + 1 \approx 1.14$ 。

在例 2 中, $|a_i| \neq |b_i|$, 根据定理 1, 可以计算出此时分形图形的计盒维数 $s = \log_{0.25}(1/1.3) + 1 \approx 1.38$ 。

5 结语

本文为了计算隐变量分形插值曲线的计盒维数, 首先根据振幅与盒子数的关系, 给出了这类隐变量分形插值曲线盒子数的估计范围, 接着在定理 1 中讨论了两种情况, 得到了隐变量分形插值曲线的维数公式, 说明了这类一元隐变量分形插值函数的维数与自由参量 a_i, b_i 的最大值有关。

参考文献:

- [1] BARNESLEY M F, ELTON J, HARDIN D P, et al. Hidden variable fractal interpolation functions[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1989, 20(5): 1218-1248.
- [2] CHAND A K B, KAPOOR G P. Hidden variable bivariate fractal interpolation surfaces[J]. Fractals-Complex Geometry Patterns and Scaling in Nature and Society, 2003, 11(3):277-288.
- [3] BOUBOULIS P, DALLA L. Hidden variable vector valued fractal interpolation functions [J]. Fractals-Complex Geometry Patterns and Scaling in Nature and Society, 2005, 13(3):227-232.
- [4] KAPOOR G P, PRASAD S A. Smoothness of coalescence hidden-variable fractal interpolation surfaces [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2009, 19(7):2321-2333.
- [5] UTHAYAKUMAR R, RAJKUMAR M. Hidden variable bivariate fractal interpolation surfaces with function vertical scaling factors[J]. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 2016, 106(5):21-32.
- [6] 杨丽萍. 隐变量分形插值函数的相关性研究 [D]. 南京: 南京大学, 2011.
YANG Liping. A study of related properties for hidden variable fractal interpolation functions [D]. Nanjing:

Nanjing University, 2011.

- [7] MANDELBROT B B. The fractal geometry of nature[M]. New York: W. H. Freeman and Company, 1982.
- [8] RUAN H J, SU W Y, YAO K. Box dimension and fractional integral of linear fractal interpolation functions [J]. Journal of Approximation Theory, 2009, 161(1):187-197.
- [9] FENG Z G. Variation and Minkowski dimension of fractal interpolation surface [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 345(1):322-334.
- [10] 冯志刚, 王磊. 分形插值函数的 δ -变差的性质[J]. 江苏大学学报(自然科学版), 2005, 26(1):49-52.
FENG Zhigang, WANG Lei. Property of fractal interpolation function $V_{f,\delta}(D)$ [J]. Journal of Jiangsu University (National Science Edition), 2005, 26(1): 49-52.
- [11] 徐惠, 冯志刚. 一类分形插值函数的变差和计盒维数 [J]. 安徽工业大学学报(自然科学版), 2008, 25(4): 443-447.
XU Hui, FENG Zhigang. Variation and Minkowski dimension of a class of fractal interpolation surface[J]. Journal of Anhui University of Technology (Natural Science), 2008, 25(4):443-447.
- [12] 王伟, 冯志刚. 递归分形插值函数的计盒维数[J]. 安徽工业大学学报(自然科学版), 2009, 26(2):187-189.
WANG Wei, FENG Zhigang. Box-counting dimension of recurrent fractal interpolation function[J]. Journal of Anhui University of Technology (Natural Science), 2009, 26(2):187-189.
- [13] 李玲, 冯志刚, 许荣飞. 三维空间中的分形插值曲线及其维数[J]. 安徽工业大学学报(自然科学版), 2007, 24(2):213-217.
LI Ling, FENG Zhigang, XU Rongfei. Fractal interpolation curve in 3-dimensional space and its dimension [J]. Journal of Anhui University of Technology (Natural Science), 2007, 24(2):213-217.
- [14] 朱晴, 冯志刚. 基于循环迭代的分形插值函数的构造及其盒维数[J]. 西安理工大学学报, 2013, 29(1): 109-113.
ZHU Qing, FENG Zhigang. Construction and dimension of fractal interpolation function based on the cyclical iteration [J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2013, 29(1):109-113.
- [15] FALCONER K. Fractal geometry: mathematical foundations and applications [M]. New York: Wiley, 1990.
- [16] BARNESLEY M F. Fractal functions and interpolation[J]. Constructive Approximation, 1986, 2(1):303-329.