DOI:10.19322/j.cnki.issn.1006-4710.2019.04.015

Toeplitz 算子 $T_{z+\overline{w}}$ 的双稳定性

胡朝龙，王绪迪，闵 涛

(西安理工大学 理学院，陕西 西安 710054)

摘要： 由 Hilbert 空间分次模理论可知，对某个算子双稳定性的刻画可以对该算子不可约性的证明起到关键性作用。本文从 Toeplitz 算子 $T_{z+\overline{w}}$ 的结构出发，利用分次模理论，得到了在一般函数空间中由 Toeplitz 算子 $T_{z+\overline{w}}$ 所诱导的分次模具有双稳定性的结果。

关键词： Toeplitz 算子；分次模；双稳定性；不可约性

中图分类号： O177.1 **文献标志码：** A **文章编号：** 1006-4710(2019)04-0501-05

Double stability of Toeplitz operator $T_{z+\overline{w}}$

HU Chaolong, WANG Xudi, MIN Tao

(School of Sciences, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China)

Abstract: It can be known from the graded module theory in Hilbert space that the characterization of double stability of an operator can play a key role in proving the irreducibility of the operator. In this paper, beginning with the structure of Toeplitz operator $T_{z+\overline{w}}$ and using the theory of graded module, we obtain the fact that the graded module induced by Toeplitz operator $T_{z+\overline{w}}$ has double stability in general function space.

Key words: Toeplitz operator; graded module; double stability; irreducibility

在算子理论中，建立代数方法去解决其中的问题是一种十分重要的手段[1]。结合代数学中的模理论，Douglas 和 Paulsen[2] 首先引进了 Hilbert 模的概念，之后学者们利用这一新的概念解决了许多算子问题[3-7]。随后，人们将代数几何和复几何运用到算子理论中[8]。其中，关于一些算子的约化性问题更是取得了许多实质性的进展[9]。

我们知道，对算子约化子空间的研究是一个十分重要的课题，这与 von Neumann 代数有着密切联系。记 H 是 Hilbert 空间，T 是 H 的有界线性算子，称闭子空间 $M\subseteq H$ 是 T 的约化子空间，如果 $TM\subseteq M$ 且 $T^*M\subseteq M$。而约化子空间往往不能直接得到，需要建立一些特殊的方法去解决。

近年来，受文献[10～12]的启发，人们发现某些算子作用在 Hilbert 空间上会产生相应的分次结构，并且这种分次结构会对解决该算子约化性问题非常的有用。

令 $L_a^2(D^2)$ 是双圆盘 D^2 上 Bergman 空间，$M_{z+\alpha w}$ 是通过 $z+\alpha w(\alpha\neq 0)$ 所诱导的乘法算子。对每个非负整数 n，定义 $H_n=\mathrm{span}\{z^k w^l: k+l=n\}$。得到：

$$L_a^2(D^2)=\bigoplus_{n=0}^{+\infty}H_n \tag{1}$$

并且有：

$$M_{z+\alpha w}H_n\subseteq H_{n+1} \text{ 和 } M_{z+\alpha w}^*H_n\subseteq H_{n-1} \tag{2}$$

通过这一现象，文献[10～11]于 2015 年成功地利用分次结构的概念解决了该算子的不可约性问题，即 $M_{z+\alpha w}$ 是不可约的当且仅当 $|\alpha|\neq 1$。并且同样证明了该结果在双圆盘 Hardy 空间 $H^2(D^2)$ 上的有效性[12]。

2018 年，结合上述结果，文献[13]将这种分次结构与 Hilbert 模结合，在 Hilbert 空间中定义了算子所诱导的分次模理论，建立了不可约性和稳定性之间的关系。由于稳定性比不可约性更易于把握，作者利用该理论完整地解决了乘法算子 M_{z^k} 约化子空间之间的酉等价问题，发现符号为拟齐次多项式

收稿日期： 2019-09-12

基金项目： 国家自然科学基金青年基金资助项目(11601418)；陕西省自然科学基金资助项目(2019JM-284)

作者简介： 胡朝龙，男，硕士生，研究方向为泛函分析与算子理论。E-mail：2252880413@qq.com

通讯作者： 王绪迪，男，讲师，博士，研究方向为泛函分析与算子理论。E-mail：wangxd512@xaut.edu.cn

的乘法算子有一个极小约化子空间，且证明了在Hardy空间 $H^2(\mathrm{D}^2)$ 上符号为 $z+\overline{w}$ 的Toeplitz算子 $T_{z+\overline{w}}$ 是不可约的。由此可以看出，该分次模理论对解决算子的不可约性问题起到十分重要的作用。

本文在一般函数空间中考虑Toeplitz算子 $T_{z+\overline{w}}$，从其结构出发，利用文献[13]中的分次模理论，成功地得到了由该算子所诱导的分次模具有双稳定性的结果。

定理2 $H^2(\omega,\delta)$ 上的Toeplitz算子 $T_{z+\overline{w}}$ 是双稳定的。

1 预备知识

1.1 加权平方可和序列空间

设 $\omega=\{\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_n,\cdots\}$ 是一个正数序列，f 为形式幂级数：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)z^n \tag{3}$$

定义范数：

$$\|f\|_{\omega}^2=\sum_{n=0}^{\infty}|\hat{f}(n)|^2\omega_n \tag{4}$$

定义1 加权平方可和序列空间 $H^2(\omega)$ 由满足 $\|f\|_{\omega}^2<+\infty$ 的形式幂级数 f 全体组成。

性质1 $H^2(\omega)$ 在范数 $\|\cdot\|_{\omega}$ 下成为一个Hilbert空间，其标准正交基为 $\left\{\dfrac{z^n}{\sqrt{\omega_n}}\right\}_{n=0}^{+\infty}$。

当 $\omega_n=1$、$\omega_n=\dfrac{1}{n+1}$、$\omega_n=n+1$ 时，$H^2(\omega)$ 分别为经典单位圆盘上的Hardy空间、Bergman空间以及Dirichlet空间。

此外，设 $\delta=\{\delta_0,\delta_1,\cdots,\delta_n,\cdots\}$ 是另一个正数序列，对形式幂级数：

$$f(z,w)=\sum_{n,m=0}^{\infty}a_{n,m}z^n w^m \tag{5}$$

定义范数 $\|f\|_{\omega,\delta}^2=\sum_{n,m=0}^{\infty}\omega_n\delta_m|a_{n,m}|^2$。

定义2 加权平方可和函数空间 $H^2(\omega,\delta)$ 由满足 $\|f\|_{\omega,\delta}^2<\infty$ 的形式幂级数 f 全体组成。

性质2 $H^2(\omega,\delta)$ 在范数 $\|\cdot\|_{\omega,\delta}$ 下成为一个Hilbert空间，其标准正交基为 $\left\{\dfrac{z^n w^m}{\sqrt{\omega_n\delta_m}}\right\}_{m,n=0}^{+\infty}$。

设 $p(z)$ 是一个形式幂级数，在 $H^2(\omega)$ 上部分地定义一个算子为：

$$(M_p f)(z)=p(z)f(z) \tag{6}$$

其乘法是形式幂级数乘法。

定义3 M_p 被称为符号为 p 的乘法算子。

性质3 对任意多项式 p，M_p 是 $H^2(\omega)$ 上的稠定线性算子。

注：若对任意的多项式 p，M_p 是 $H^2(\omega)$ 上的有界线性算子当且仅当乘法算子 M_z 是 $H^2(\omega)$ 上的有界线性算子，也就是当且仅当 $\sup\limits_n\dfrac{\omega_{n+1}}{\omega_n}<\infty$。

同样，M_w 在 $H^2(\delta)$ 上为有界线性算子当且仅当 $\sup\limits_n\dfrac{\delta_{n+1}}{\delta_n}<\infty$。

定义4 若 p 是一个形式幂级数，M_p 是 $H^2(\omega)$ 上的稠定线性算子，符号为 $\overline{p}$ 的Toeplitz算子 $T_{\overline{p}}$ 定义为：

$$T_{\overline{p}}=M_p^* \tag{7}$$

即 M_p 的共轭。

此后，将在加权平方可和序列空间 $H^2(\omega,\delta)$ 中研究有界Toeplitz算子 $T_{z+\overline{w}}=M_z+M_w^*$。

1.2 分次 S-模

在介绍分次 S-模之前，先引进一些简单记号和概念。

定义5 设 H 是一个Hilbert空间，A 和 B 是 H 上有界线性算子，A 和 B 的换位子 $[A,B]$ 是指：

$$[A,B]=AB-BA \tag{8}$$

现令 $A=T_{z+\overline{w}}^*$，$B=T_{z+\overline{w}}$，其换位子为：

$$C=[T_{z+\overline{w}}^*,T_{z+\overline{w}}]=T_{z+\overline{w}}^*T_{z+\overline{w}}-T_{z+\overline{w}}T_{z+\overline{w}}^* \tag{9}$$

通过计算可得：

$$Cz^n w^m=(\varphi(n)-\psi(m))z^n w^m \tag{10}$$

其中 $n,m\in\mathbb{Z}_+$，且：

$$\begin{cases}\varphi(n)=\nabla[\dfrac{\omega_{\cdot+1}}{\omega_{\cdot}}](n)\\ \psi(m)=\nabla[\dfrac{\delta_{\cdot+1}}{\delta_{\cdot}}](m)\end{cases} \tag{11}$$

这里 ∇ 是通过：

$$\nabla[f](n)=f(n)-f(n-1) \tag{12}$$

所定义的向后差分算子，且补充定义 $\nabla[f](0)=f(0)$。

在继续引进定义之前，先介绍一些符号。设 $\mathscr{A}$ 是Hilbert空间 H 的一族有界线性算子，F 是 H 的任意子集，记 $[F]$ 是通过 F 所生成的闭子空间，定义 $\mathscr{A}F$ 为：

$$\mathscr{A}F=[\{Af:A\in\mathscr{A},f\in F\}] \tag{13}$$

定义6 令 T 是Hilbert空间 H 上的一个有界线性算子，对每个整数 $n\in\mathbb{Z}$，定义：

$$S^n=\left\{\prod_{k=1}^{N}T^{*j_k}T^{i_k},i_k,j_k\in\mathbb{Z}_+:\sum_{k=1}^{N}(i_k-j_k)=n\right\} \tag{14}$$

其中 $\mathbb{Z}_+$ 是非负整数全体。注意允许 $i_k=j_k=0$，因此 $I\in S^0$。它有一个关键的性质：$S^mS^n\subseteq S^{m+n}$，

$m,n\in\mathbb{Z}$。

此时，可以看到在 Hilbert 空间 H 上一个有界线性算子 T 所产生的约化子空间与其 S-运算之间的关系。若 M 是 H 的闭子空间，M 是 T 的约化子空间当且仅当 $S^nM\subseteq M$。且 T 在 H 上不可约当且仅当其约化子空间只有 0 和 H。

同时，如果 F 是 H 的一个子集，则通过 F 产生 T 的约化子空间就等同于 $[\vee_{n\in\mathbb{Z}}S^nF]$。若 S_T^nF 彼此相互正交，则有 $[\vee_{n\in\mathbb{Z}}S^nF]=\oplus_{n\in\mathbb{Z}}S^nF$，且有对任意 $n,m\in\mathbb{Z}$，$S^m(S^nF)\subseteq S^{m+n}F$。

由上述现象可定义分次 S-模。

定义 7 取定 T，称一个 Hilbert 空间 H 是分次 S-模，如果有：

$$H=\bigoplus_{n=-\infty}^{+\infty}H_n \tag{15}$$

且

$$S^nH_m\subseteq H_{n+m},\ n,m\in\mathbb{Z} \tag{16}$$

其中 H_n 是 H 的闭子空间。

此后，当 H 称为分次 S-模时，这意味着 H 有一个齐次分解（式(15)）。现进一步假设 $n_0=\inf\limits_n\{n_iH_n\neq 0\}$，$n_1=\sup\limits_n\{n_iH_n\neq 0\}$。

如下新的定义扩展了文献[13]中的稳定性概念。

定义 8 称分次 S-模 H 是稳定的，如果对每个整数 $n\geqslant n_0$ 和非负整数 m，成立 $S^mH_n=H_{n+m}$。称分次 S-模 H 是反向稳定的，如果对每个整数 $n\leqslant n_1$ 和非负整数 m，还成立 $S^{-m}H_n=H_{n-m}$。既稳定又反向稳定的分次 S-模就被称为是双稳定的，此时称 T 是双稳定的。

定理 1 若分次 S-模是不可约的，则 H 是双稳定的。

证明：

由文献[13]可得，若分次 S-模是不可约的，H 是稳定的。接下来只需证明若分次 S-模是不可约的，H 是反向稳定的。

取 $H_n^*=H_{-n}$，$S_*^n=S^{-n}$，则有：

$$H=\bigoplus_{n=-\infty}^{+\infty}H_n^* \tag{17}$$

且

$$S_*^mH_n^*=S^{-m}H_{-n}\subseteq H_{-n-m}=H_{n+m}^*,n,m\in\mathbb{Z} \tag{18}$$

于是在该新的结构下 H 也是分次 S-模。因为 H 依然不可约，于是 H 还是稳定的，此时对任意 $n\leqslant n_1=\sup\limits_n\{n_iH_n\neq 0\}$ 和 $m\geqslant 0$，有：

$$S^{-m}H_n=S_*^mH_{-n}^*=H_{-n+m}^*=H_{-n+m} \tag{19}$$

于是 H 是反向稳定的。

证毕。

由上述定理可以看出，刻画 Toeplitz 算子 $T_{z+\overline{w}}$ 的双稳定性，对得到其不可约性的重要性。Toeplitz 算子 $T_{z+\overline{w}}$ 作用于 Hilbert 空间 $H^2(\omega,\delta)$ 上可以使得 $H^2(\omega,\delta)$ 成为一个分次 S-模，其中：

$$H_n=[\{z^kw^l:k-l=n\}] \tag{20}$$

接下来，将证明由 Toeplitz 算子 $T_{z+\overline{w}}$ 所诱导的该分次 S-模具有双稳定性。

2 定理的证明

先证明如下引理，这是关于判断 Hilbert 空间中两个具有相似结构的子空间相等性的结果。

引理 1 假设 H 是 Hilbert 空间，$\{f_1,f_2,\cdots\}$ 是 H 的一组正交基。令：

$$H_1=[f_1+f_2,f_2+f_3,\cdots] \tag{21}$$

和

$$H_2=[\lambda_1f_1+\lambda_2f_2,\lambda_2f_2+\lambda_3f_3,\cdots] \tag{22}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ 是复数。则有：

a) $\dim(H\ominus H_1)\leqslant 1$；

b) $H=H_1$ 当且仅当 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\|f_i\|^2}=+\infty$；

c) $H=H_2$ 当且仅当 $\lambda_i\neq 0$，$i=1,2,\cdots$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\|\lambda_if_i\|^2}=+\infty$；

d) 存在某个 H 使得对所有 $\lambda_i\neq 0$ 且有 $H_1\neq H_2$；

e) 如果 $H\neq H_1$，则 $H_1=H_2$ 当且仅当 $0\neq\lambda_1=\lambda_2=\cdots$；

f) 如果 $H\neq H_1$，则 $H_1+H_2=H$ 当且仅当 $H_2\neq H_1$ 且 $H_2\neq 0$。

证明：

令 $e_i=\dfrac{f_i}{\|f_i\|}$，$i=1,2,\cdots$，则 $\{e_1,e_2,\cdots\}$ 是 H 的标准正交基。取 $f\in H\ominus H_1$ 且记 $f=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}c_ke_k$，则对任意整数 $i>0$，有：

$$0=\langle f,f_i+f_{i+1}\rangle=c_i\|f_i\|+c_{i+1}\|f_{i+1}\| \tag{23}$$

因此，$\{c_i\}_{i=1}^{+\infty}$ 完全被 c_1 唯一确定，于是 $\dim(H\ominus H_1)\leqslant 1$。a)得证。

可取 d 使得对任意整数 $i>0$ 有 $d=|c_i|\|f_i\|$。由于 $f\in H$，有：

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|c_k|^2<+\infty \tag{24}$$

将 d 代入式(24)得：

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{d^2}{\|f_k\|^2}<+\infty \tag{25}$$

如果 $\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{\|f_i\|^2}<+\infty$，可取 $c_i=\frac{(-1)^i}{\|f_i\|}$，从而有 $f\neq 0$ 且 $H\neq H_1$。如果 $\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{\|f_i\|^2}=+\infty$，则 d 为 0，从而 $f=0$。因此 $H=H_1$。b)得证。

对于 c)，如果存在某个 $\lambda_i=0$，则 $e_i\perp H_2$，因此 $H\neq H_2$。由此可以看出，如果所有 $\lambda_i\neq 0$，则 c)的结果是 b)的一个推论。

对于 d)，考虑：

$$K_1=[e_1+e_2,e_2+e_3,\cdots] \tag{26}$$

和

$$K_2=[e_1+2e_2,2e_2+3e_3,\cdots] \tag{27}$$

则由 b)，有 $H=K_1$。由 c)，有 $H\neq K_2$。

对于 e)，如果部分显然。对于仅当部分，已知 $\dim(H\ominus H_1)=1$ 且 $g=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{\|f_i\|}e_i\in H\ominus H_1$。若 $H_1=H_2$ 则 $g\perp H_2$。对于任意整数 $i>0$，有：

$$0=\langle g,\lambda_i f_i+\lambda_{i+1}f_{i+1}\rangle=(-1)^i\lambda_i+(-1)^{i+1}\lambda_{i+1} \tag{28}$$

由于 $H_1\neq 0$，可得 $0\neq\lambda_1=\lambda_2=\cdots$。

对于 f)，若 $H\neq H_1$，由 $H_1+H_2=H$ 可得 $H_2\neq 0$，假设 $H_1=H_2$，则有 $H=H_1$ 矛盾。此外，如果 $H_1\neq H_2$ 且 $H_2\neq 0$，由 H_1 的余一维性质，可得 $H_1+H_2=H$。

证毕。

开始证明定理 2。

定理 2 的证明：

由于 $T_{z+\overline{w}}$ 的共轭是 $T_{\overline{z}+w}$，且在 $H^2(\delta,\omega)$ 上 $T_{z+\overline{w}}$ 的酉等价于 $H^2(\omega,\delta)$ 上的 $T_{\overline{z}+w}$，因此只需证明通过 $T_{z+\overline{w}}$ 所诱导的分次 S-模 $H^2(\omega,\delta)$ 是稳定的。由分解：

$$H^2(\omega,\delta)=\bigoplus_{n=-\infty}^{+\infty}H_n \tag{29}$$

当 $n\geqslant 0$，$H_n=[\{z^{n+k}w^k:k\in\mathbb{Z}_+\}]$，此时可证得 $S^1H_n=H_{n+1}$。

当 $n<0$，$H_n=[\{z^kw^{k-n}:k\in\mathbb{Z}_+\}]$，令 $C=[T^*_{z+\overline{w}},T_{z+\overline{w}}]$，考虑 $CT_{z+\overline{w}}H_n$。有四种情况：

a) $H_{n+1}=T_{z+\overline{w}}H_n$；

b) $H_{n+1}\neq T_{z+\overline{w}}H_n$，$CT_{z+\overline{w}}H_n\neq 0$，$CT_{z+\overline{w}}H_n\neq T_{z+\overline{w}}H_n$；

c) $H_{n+1}\neq T_{z+\overline{w}}H_n$，$CT_{z+\overline{w}}H_n=T_{z+\overline{w}}H_n$；

d) $CT_{z+\overline{w}}H_n=0$。

显然，对于 $S^1H_n=H_{n+1}$，以上四种情况包含了所有可能。

对于 a)，$S^1H_n=H_{n+1}$ 成立。

对于 b)，由引理 1 a)可知：

$$\dim(H_{n+1}\ominus T_{z+\overline{w}}H_n)=1 \tag{30}$$

且 $CT_{z+\overline{w}}H_n\neq 0$ 和 $CT_{z+\overline{w}}H_n\neq T_{z+\overline{w}}H_n$，从而有：

$$T_{z+\overline{w}}H_n+CT_{z+\overline{w}}H_n=H_{n+1} \tag{31}$$

因此 $S^1H_n=H_{n+1}$ 成立。

令 $H_{n+1}=[\{z^kw^{k-n-1}:k\in\mathbb{Z}_+\}]$，对于 c)，由：

$$T_{z+\overline{w}}H_n=[\{\frac{z^kw^{k-n-1}}{\delta_{k-n-1}}+\frac{z^{k+1}w^{k-n}}{\delta_{k-n}}:k\in\mathbb{Z}_+\}] \tag{32}$$

和

$$CT_{z+\overline{w}}H_n=[\{(\varphi(k)-\psi(k-n-1))\frac{z^kw^{k-n-1}}{\delta_{k-n-1}}+(\varphi(k+1)-\varphi(k-n))\frac{z^{k+1}w^{k-n}}{\delta_{k-n}}:k\in\mathbb{Z}_+\}] \tag{33}$$

并通过引理 1 e)，可得到一系列等式：

$$\varphi(k+1)-\psi(k-n)=\varphi(k)-\psi(k-n-1) \tag{34}$$

其中 $k\in\mathbb{Z}_+$。记 Δ 为相同的值，则 $\Delta\neq 0$ 且 $\varphi(k)=\Delta+\psi(k-n-1)$，$k\in\mathbb{Z}_+$。注意，$\Delta=0$ 即 d)。又因为：

$$\frac{\omega_{k+1}}{\omega_k}=\varphi(k)+\varphi(k-1)+\cdots+\varphi(0) \tag{35}$$

可得：

$$\frac{\omega_{k+1}}{\omega_k}+h(n)=(k+1)\Delta+\frac{\delta_{k-n}}{\delta_{k-n-1}} \tag{36}$$

其中：

$$h(n)=\begin{cases}0, & n=-1\\ \frac{\delta_{-n-1}}{\delta_{-n-2}}, & n<-1\end{cases} \tag{37}$$

若 $\Delta\neq 0$，则 $\left\{\frac{\omega_{k+1}}{\omega_k}\right\}_{k=0}^{+\infty}$ 是无界的，而这与 M_z 的有界性矛盾。

对于 d)，$\Delta=0$，此时重新记式(36)为：

$$\frac{\delta_{k-n}}{\omega_{k+1}}=\frac{\delta_{k-n-1}}{\omega_k}+h(n)\frac{\delta_{k-n-1}}{\omega_{k+1}} \tag{38}$$

令 $f(k)=\frac{\delta_{k-n-1}}{\omega_k}$，$g(k)=h(n)\frac{\delta_{k-n-1}}{\omega_{k+1}}$，则：

$$f(k)=f(0)+s(k) \tag{39}$$

其中：

$$s(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \sum_{i=0}^{k-1}g(i), & k>0\end{cases} \tag{40}$$

然而，$f(k)\geqslant f(0)$，得：

$$\liminf_{k\to\infty}f(k)\geqslant f(0)\neq 0 \tag{41}$$

这个导致 $\sum_{k=0}^{+\infty} f(k)=+\infty$。又 $\frac{1}{f(k)}=\left\|\frac{z^k w^{k-n-1}}{\delta_{k-n-1}}\right\|^2$，则通过引理 1 b)，有 $H_{n+1}=T_{z+\overline{w}}H_n$，定理 2 得到证明。

3 结 语

对于定理 2 的应用，在文献[13]中证明 Hardy 空间 $H^2(\mathrm{D}^2)$ 上的 Toeplitz 算子 $T_{z+\overline{w}}$ 的不可约性时，是先证明它的双稳定性，然后利用双稳定性证明每个单项式都是生成元，最后使用巧妙的技巧证明每个解析函数都是生成元，从而完成证明。

由此可知，对于一般的 $H^2(\omega,\delta)$ 空间，要从双稳定性达到不可约性，还需要关于单生成元的结果，后续将就这个问题继续进行讨论

最近，关于分数阶算子的模型有很多新进展[14-15]，这些模型和研究的典型问题将为分次模理论的研究提供一些新的思路。

参考文献：

[1] CONWAY J B. A course in operator theory (graduate studies in mathematics) [M]. Rhode Island: American Mathematical Society, 1999.

[2] DOUGLAS R G, PAULSEN V. Hilbert modules over function algebras(pitman research notes in mathematics series)[M]. Harlow: Longman Scientific & Technical, 2017.

[3] ARVESON W. The curvature of a Hilbert module over $\mathbb{C}[z_1,\cdots,z_d]$ [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1999, 96(20): 11096-11099.

[4] CHEN X M, DOUGLAS R G. Localization of Hilbert modules[J]. Michigan Mathematical Journal, 1992, 39 (3): 443-454.

[5] FANG X. Samuel multiplicity and the structure of semi-Fredholm operators [J]. Advances in Mathematics, 2004, 186(2): 411-437.

[6] FANG X. The Fredholm index of quotient Hilbert modules[J]. Mathematical Research Letters, 2005, 12(6): 911-920.

[7] GUO K Y. Characteristic spaces and rigidity for analytic Hilbert modules[J]. Journal of Functional Analysis, 1999, 163(1): 133-151.

[8] COWEN M J, DOUGLAS R G. Complex geometry and operator theory[J]. Acta Mathematica, 1978, 141(1): 187-261.

[9] ZHU K H. Reducing subspaces for a class of multiplication operators[J]. Journal of the London Mathematical Society, 2000, 62(2): 553-568.

[10] DAN H, HUANG H S. Multiplication operators defined by a class of polynomials on $L_a^2(\mathrm{D}^2)$ [J]. Integral Equations and Operator Theory, 2014, 80 (4): 581-601.

[11] WANG X D, DAN H, HUANG H S. Reducing subspaces of multiplication operators with the symbol $\alpha z^k+\beta w^l$ on $L_a^2(\mathrm{D}^2)$ [J]. Science China Mathematics, 2015, 58(10): 1-14.

[12] GUO K Y, WANG X D. Reducing subspaces of tensor products of weighted shifts [J]. Science China Mathematics, 2016, 59(4): 715-730.

[13] GUO K Y, WANG X D. The graded structure induced by operators on a Hilbert space[J]. Journal of the Mathematical Society of Japan, 2018, 70(2): 853-875.

[14] 王兴，彭达瑶，秦新强，等. 奇异分数阶 Laplacian 方程弱解存在唯一性的算子方法[J]. 西安理工大学学报，2018，34(3)：299-303.
WANG Xing, PENG Dayao, QIN Xinqiang, et al. Operator method for the existence and uniqueness of weak solution to a fractional Laplacian equation with a singular nonlinearity[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2018, 34(3): 299-303.

[15] 刘荣辉，周疆. 双线性分数次 Hardy 算子交换子的有界性[J]. 西安理工大学学报，2017，33(3)：362-366.
LIU Ronghui, ZHOU Jiang. Boundedness of the commutators of bilinear fractional Hardy operators [J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2017, 33 (3): 362-366.

（责任编辑　周　蓓）