DOI:10.19322/j. cnki. issn. 1006-4710. 2020. 03. 009

# 基于大气-水动力集成模型的城市内涝模拟预报研究

# 陈光照<sup>1</sup>,侯精明<sup>1</sup>,同 玉<sup>1</sup>,周 聂<sup>1</sup>,高徐军<sup>2</sup>,苏 锋<sup>2</sup>,李继成<sup>2</sup>, 吕 鹏<sup>2</sup>,杨 霄<sup>2</sup>,张宏芳<sup>3</sup>

(1. 西安理工大学 西北旱区生态水利国家重点实验室,陕西 西安 710048;2. 中国电力建设集团有限公司 西北勘测设计研究院有限公司,陕西 西安 710065;3. 陕西省气象局 陕西省气象服务中心,陕西 西安 710014)

摘要:城市内涝预报是降低内涝灾害风险、保障人身财产安全的重要措施。针对传统城市内涝预报方法 空间分辨率低、预见期短,无法准确、及时预测出内涝过程的问题,本文通过集成大气数值预报模型和水 动力模型,构建高分辨率长预见期内涝预报模型。集成预报模型采用中尺度数值预报模型(GRAPES\_ MESO)生成预报降雨数据,通过水动力模型将降雨转换成地表径流以模拟内涝演变过程,并提出了一种 预报降雨数据重构方法,进一步提高了预报结果的可靠性。洋西新城城市内涝过程预测结果表明,该集 成模型具有较高的预报精度和较长的预见期,预报面积和水深的纳什效率系数(NSE)分别为 0.89、 0.94。模型能较好地预测城市内涝淹没过程,可为城市防涝减灾提供决策依据。

关键词:城市内涝;预报;水动力模型;大气模型;GPU高性能计算

**中图分类号:** X43 **文献标志码:** A **文章编号:** 1006-4710(2020)03-0330-07

### Urban inundation simulation forecasting based on atmosphere-hydrodynamic integrated model

CHEN Guangzhao<sup>1</sup>, HOU Jingming<sup>1</sup>, TONG Yu<sup>1</sup>, ZHOU Nie<sup>1</sup>, GAO Xujun<sup>2</sup>, SU Feng<sup>2</sup>, LI Jicheng<sup>2</sup>, LÜ Peng<sup>2</sup>, YANG Xiao<sup>2</sup>, ZHANG Hongfang<sup>3</sup>

 State Key Laboratory of Eco-hydraulics in Northwest Arid Region of China, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China; 2. Northwest Engineering Corporation Limited, Power Construction Corporation of China, Xi'an 710065, China; 3. Shaanxi Meteorological Service Center, Shaanxi Meteorological Durang Xi'an 710014, China)

Bureau, Xi'an 710014, China)

**Abstract**: Urban inundation forecasting is one of the most significant tools for reducing flood risk and guarantee the property and personal safety. Aiming at the problems of low temporal-spatial resolution and short lead time of the traditional urban inundation forecasting methods, it is impossible to predict inundation accurately and timely. This work develops a novel high-accuracy and long lead time model through integrating the atmospheric and hydrodynamic models. The integrated forecast model uses the GRAPES\_MESO model to generate forecast rainfall data, and converts rainfall into runoff through the hydrodynamic model to simulate the inundation process. A novel method for reconstructing forecast rainfall data is proposed, which can improve the reliability of forecast results. The forecast results of the urban inundation process in Fengxi New Town show that the integrated model has high forecast accuracy and long lead time. The NSE of the forecast area and water depth is 0.89 and 0.94 respectively. The model can precisely predict the urban inundation process, and provide reference for urban flood prevention and disaster reduction decision-making.

Key words: urban inundation; forecasting; hydrodynamic model; atmospheric model; GPU highperformance computation

网络出版地址: https://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1294.N.20200928.1044.006.html

**第一作者:**陈光照,男,硕士生,研究方向为城市水利。E-mail: 2180420076@stu. xaut. edu. cn

通信作者: 侯精明,男,博士,教授,研究方向为城市水利。E-mail: jingming, hou@xaut. edu. cn

收稿日期: 2020-09-01; 网络出版日期: 2020-09-28

**基金项目:**国家"十三五"重大研发专项资助项目(2016YFC0402704);国家自然科学基金资助项目(51709223);固原海绵 城市建设及运营关键技术研究项目(SCHM-2018-0104);陕西省水利科技项目(2017slkj-21)

近年来,随着城市化率的提高和气候变化的加 剧,城市内涝灾害愈加频繁<sup>[1]</sup>。在下垫面硬化、排水 能力不足、短历时强降水事件频发等因素的共同作 用下,许多城市将遭受内涝灾害并造成严重损失<sup>[2]</sup>。 政府间气候变化专门委员会(IPCC)的研究表明, 1981年至2000年间,500mm极端降雨的发生概率 约为1%,至2100年这一概率将高达18%<sup>[3]</sup>。因 此,开展城市内涝预报方法研究,对防涝减灾具有重 要意义。

城市内涝预报是降低内涝灾害风险、减轻灾害 损失的重要措施,但目前仍未开发出完全满足防灾 减灾要求的预报系统<sup>[4]</sup>。影响预报效果的问题主要 为预见期短及无法精确描述内涝变化过程。为了延 长预见期,内涝预报可采用数值天气预报(NWP)模 型生成的预报降雨产品作为地表内涝模型的输入数 据<sup>[5]</sup>。例如,Li等<sup>[5]</sup>集成了柳溪河水文模型与 WRF 气象模型,将其用于南方流域大尺度洪涝预 报。该方法延长了内涝预报的预见期,但只能提供 网格分辨率为 20km×20km 的预报产品。Tian 等<sup>[6]</sup>开发了耦合 WRF 模型、河北水文模型及 3DVar 数据同化模块,构建了大气-水文预报系统。 结果表明,该预报系统对空间分布均匀的降雨有较 好的预报效果,但对短历时强降雨预报误差较大。 Habibi 等<sup>[7]</sup>采用了由 X 波段气象雷达数据驱动的 NWS水文分布模型。结果表明,该系统能较好地 预测水位和河流的变化,但其时间误差较为严重。

常规水文模型无法精确模拟内涝变化过程,而 求解浅水方程(SWEs)的全水动力模型数值则可解 决这一问题<sup>[8]</sup>。基于动力波方法的水动力模型能够 模拟水力要素在复杂地形上的变化过程,生成准确 的内涝变化计算结果。本文提出集成数值气象模型 和水动力模型构建内涝预报模型,并以此模拟预报 沣西新城内涝淹没过程,研究结果将为提升防灾减 灾能力提供参考借鉴。

## 1 研究区域

研究区位于西咸新区沣西新城,总面积 22.5 km<sup>2</sup>。全年降雨量主要集中在 7~9月。排水管网局部淤堵及结构设计不合理,限制了该地区的排水 能力,当遇到暴雨时,内涝频发。该地区布设有微型 气象站,可以气象站监测数据作为地面实况,对 GRAPES\_MESO预报数据进行评价。

本文采用无人机航测技术对研究区地形数据进行了测量。数字高程模型(DEM)和数字正射影像 图(DOM)的网格分辨率为 2m,约 560 万个网格单 元,如图1、图2所示。根据正射影像图,采用最大 似然分类法将网格单元划分为五种土地利用类型, 如表1所示。曼宁系数参考相关标准和城市排水文 献确定<sup>[9-10]</sup>。



Fig. 2 Land use data

表1 土地利用参数

Tab.	1 P	roperties	of	the	different	land	uses
------	-----	-----------	----	-----	-----------	------	------

土地利用 类型	面积/(km²)	稳渗率/ (mm•h <sup>-1</sup> )	曼宁系数
建筑	8.378	0	0.015
道路	1.668	0	0.014
裸土	1.916	19.430	0.030
草地	3.988	28.390	0.060
林地	6.550	37.550	0.200

# 2 大气-水动力集成模拟预报模型

本文集成 GRAPES\_MESO 大气模型、二维水动力模型和预报降雨重构方法建立大气-水动力内

涝预报模型,图 3 为模型工作流程图。集成模型每 隔 12 h 将滚动更新的预报降雨数据输入基于回归 分析方法的重构模块进行改进,而后将重构的预报 降雨数据作为水动力模型的输入数据。为了评估重 构法对预报降雨和内涝数据的改善效果,本文还利 用气象站的实测降雨数据和原始预报数据驱动内涝 模型,进行内涝淹没过程模拟计算,并以淹没面积和 水深预报结果分析模型性能。



图 3 城市内涝预报工作流程 Fig. 3 Flowchart for the urban inundation forecasting

#### 2.1 GRAPES\_MESO 气象模型

全球/区域同化预报系统(GRAPES)是中国气象局自主开发的采用多级数据同化的数值天气预报 模型。根据不同分辨率要求,选择区域或全球中期 物理过程软件包,可形成全球中期天气预报系统 (GRAPES\_GFS)或区域中尺度天气预报系统 (GRAPES\_GFS)或区域中尺度天气预报系统 (GRAPES\_MESO)。城市内涝预报模型采用 GRAPES\_MESO 4.0 版本预报降水数据。预报系 统每天 00:00 和 12:00 对中国及周边地区的未来 72h 降雨数据进行滚动更新,时空分辨率为 3h,10km。

### 2.2 预报降雨数据重构方法

该预报降雨数据重构方法以 GRAPES\_MESO 预报数据(数据来自国家气象科学数据中心 http:// data.cma.cn/)为自变量,气象站实测数据为因变 量。利用 SPSS统计分析软件的回归分析函数拟合 修正公式。由于 GRAPES\_MESO 的数值预报产品 于 2015年12月29日00:00首次发布,因此该方法 选取的分析样本时间为 2016年1月1日00:00至 2019年1月1日24:00。在 SPSS 回归分析中,在 筛去降雨量小于10 mm 的场次降雨后,选取剩余降 雨数据中的37个典型致涝降雨数据作为样本数据。 为增强公式的适用性,各样本数据的降雨历时、雨 强、累计降雨量都有所不同。此外,选择4个不同特 征的降雨作为测试数据。 研究区第一和第三季度预报雨量小于实测数据,而第二季度预报雨量较大。由于第四季度的暴雨次数较少,因此不进行分析。本文选取线性方程、 二次方程、三次方程、对数方程、指数方程、幂方程 6 种常用模型拟合公式。去除过度拟合和低相关性的 函数,得到预测数据与实测数据之间的函数关系,如 表 2 所示。第一季度符合对数函数,相关系数 R<sup>2</sup>为 0.81;第二和第三季度符合三次函数,R<sup>2</sup>分别为 0.91 和 0.93。其中,x<sub>R</sub>为原始预测数据;x<sub>H</sub>为预测 相对湿度;v表示重构值。

表 2 修正公式

Tab. 2 Correction formulas

季度	公式
第一季度	$y = 0.366 \lg x_{\rm R} + 0.027 x_{\rm H} + 0.343$
第二季度	$y = 0.002x_{\rm R}^2 + 0.092x_{\rm R} + 0.047x_{\rm H} - 2.131$
第三季度	$y = 0.004x_{\rm R}^2 + 0.151x_{\rm R} - 5.684$
第四季度	无

由于预报降雨数据的时间分辨率为3h,当降 雨持续时间小于3h时,雨峰将变得不明显,致使降 雨过程变得平缓,进而造成较大的误差。为了使重 构后的降雨数据更符合实际情况,对采用修正公式 (见表2)重构的降雨再进行重新分布。基于多年降 雨数据的芝加哥雨型公式可以描述该地区的短期降 雨过程,如式(1)所示。降雨将按芝加哥雨型每小时 的雨量分配比例进行分配。根据公式计算结果,在 第1小时分配降雨总量的10%,第2小时分配 81%,第3小时分配9%。采用这种分配方法,可以 在预报降雨时间小于3h的情况下构建雨峰。

$$q = \frac{2\ 210.\ 87(1+2.\ 915\lg p)}{(m+21.\ 933)^{0.\ 974}} \tag{1}$$

式中:q为暴雨强度;p为重现期;m为暴雨历时。

纳什效率系数(NSE)用于评估预测数据与实际 情况的相似程度,η<sub>NSE</sub>值越接近于 1,则模拟结果越 可靠。

$$\eta_{\rm NSE} = 1 - \frac{\sum_{k=1}^{N} (Q_{\rm o}^{k} - Q_{\rm m}^{k})^{2}}{\sum_{k=1}^{N} (Q_{\rm o}^{k} - \bar{Q}_{\rm o})^{2}}$$
(2)

式中:Q。为观测值;Q<sub>m</sub>为模拟值;Q。为实测数据平均值;N为数据总个数。

# 2.3 二维水动力模型

# 2.3.1 控制方程

模型控制方程为耦合水文过程的二维浅水方程 (SWEs),忽略运动黏性项、科氏力、风应力及紊流 黏性项,其对应的二维非线性浅水方程守恒格式的 矢量形式为:

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial y} = \boldsymbol{S}$$
(3)

其中,

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} h \\ q_x \\ q_y \end{bmatrix}$$
,  $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} uh \\ uq_x + gh^2/2 \\ uq_y \end{bmatrix}$ ,  $\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} vh \\ vq_x \\ vq_y + gh^2/2 \end{bmatrix}$ ,

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} i \\ -gh \partial \boldsymbol{z}_{\mathrm{b}} / \partial \boldsymbol{x} \\ -gh \partial \boldsymbol{z}_{\mathrm{b}} / \partial \boldsymbol{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -C_{\mathrm{f}} u \ \sqrt{u^{2} + v^{2}} \\ -C_{\mathrm{f}} v \ \sqrt{u^{2} + v^{2}} \end{bmatrix}.$$

式中:q 为变量矢量,包括 x 和 y 方向的单宽流量  $q_x$ 和  $q_y$ ;u,v 表示 x 和 y 方向的流速;t 为时间;F 和 G分别为x,y 方向的通量矢量;i 为净雨率;S 为源项 矢量; $z_b$  为河床底面高程; $C_f = gn^2/h^{1/3}$  为河床糙率 系数,n 为曼宁系数,g 为重力加速度,h 为水深。 2.3.2 数值方法与 GPU 高性能计算技术

模型采用基于结构化网格的 Godunov 格式有 限体积法求解 SWEs。通过二阶显式 Runge-Kutta 法构造具有二阶时空精度的 MUSCL 型格式,从而 确保物质守恒并有效解决不连续问题。针对模拟过 程中可能产生急变流及非连续等复杂问题,模型选 用 HLLC 近似黎曼求解器对单元界面上的质量以 及动量的通量进行求解。底坡源项通过底坡通量法 计算<sup>[11]</sup>。摩阻源项通过改进的显式方法计算<sup>[12]</sup>。 模型代码使用 C++和 CUDA 进行编程,从而能够 在图形处理单元(GPU)实现并行计算,大大加快了 计算速度。使用矩阵的方式将等待计算的单元分配 给每个线程。每个 GPU 线程按顺序计算网格边界 通量和源项。

# 3 结果及讨论

# 3.1 模型验证

以 2016 年 8 月 25 日 00:36 至 8 月 25 日 12:27 的实测降雨资料来验证模型的准确性。该场次降雨 为双峰型,总历时为 12h,降雨总量为 97.2 mm,如 图 4 所示。根据沣西新城管委会提供的监测资料, 对其中 4 个内涝点(A、B、C、D)的模拟淹没面积进 行分析,如图 5 所示。

表 3 为实测结果与模拟结果的对比。从表 3 中 可以看出,模拟内涝面积与实测数据相吻合,相对误 差最大为一4.2%,表明该模型精度较高,可用于大 尺度复杂地形下的城市内涝过程模拟。





图 5 内涝点分布图 Fig. 5 Inundation location map

- 农 5 天例泪水弓侯仍泪水比权(1-+1)	表 3	实测结果与模拟结果比较(t=4 h)
-------------------------	-----	--------------------

Tab. 3 Comparison of measured results and

simulated results (t=4 h)

由洪上台	淹没面积	$   \frac{1}{2}/(m^2) $	扣对记关/1/	
內伤息位	模拟值	实测值	相对 庆左/ 70	
А	660 0	683 7	4.3	
В	815 0	790 1	-3.2	
С	665 6	638 8	-4.2	
D	780 0	766 5	-1.8	

#### 3.2 预报降雨性能评估

以4场典型降雨(I、II、II和IV)为例,对模型 预报降雨性能进行评估。详细的降雨数据信息已在 表4中列出。通过图6所示的原始预报降雨、重构 预报降雨与气象站实测数据对比结果可以得出,重 构数据的 η<sub>NSE</sub>值较原始预报数据的 η<sub>NSE</sub>值有了显著 提高,说明该重构方法是合理的。但在原始预报误 差较大的情况下,重构方法的修正能力也受到限制, 存在着一定的不确定性,如 I、III号降雨。

编号	时间	数据类型	降雨量/mm	$\eta_{ m NSE}$
		实测	40.2	
Ι	2018/8/21	原始预报	95.73	-2.13
		重构预报	68.34	-0.4
		实测	34.6	
Ш	2017/8/7	原始预报	50.7	0.54
		重构预报	43.4	0.93
		实测	17.6	
Ш	2018/4/12	原始预报	41.6	-4.7
		重构预报	36.6	-2.8
		实测	39.8	
IV	2017/3/12	原始预报	72.2	-5.02
		重构预报	43.0	0.33
$20 \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \end{bmatrix}$		峰雨 预报降雨 2 13 14 15 16 17	30 25 20 15 10 5 0 0 1 2 3 4 H 6 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	实测降雨 原始预报降雨 重构预报降雨 <sup>5</sup> 6 7 8 9 10 寸间/h (b) Ⅱ 雨雨

表 4 典型降雨修正结果 Tab. 4 Corrected results of the typical rainfall events



#### 3.3 淹没深度及面积预报性能评估

以 2017 年 8 月 7 日 10:18 发生的降雨致涝事 件为例,该次模拟所用计算平台的 CPU 为 Intel<sup>®</sup> Core<sup>™</sup> i7 - 8700,GPU 为 NVIDIA RTX2080。集成 内涝预报模型耗时 2.45 小时完成了 7 小时内涝过 程的模拟。由于 GRAPES\_MESO 的预报降雨产品 于 2017 年 8 月 7 日 00:00 发布,故此次内涝预报信

15

时间/h

(c) III

20

25

息可以提前约9小时生成。内涝点模拟预报与现场 实况的对比如图7所示,结果表明,预报模型可以准 确预报出内涝位置。

35

15 20 25 30

时间/h

(d) IV

10

以秦皇岛与开元路十字路口(图 7 中 B 点)为例,分析该区域淹没面积与最大水深的预报结果。 图 8、图 9 为采用三类降雨数据(实测、原始预报和 重构预报数据)模拟预报的内涝过程。从图中可以 看出,三类降雨数据模拟的面积和水深其变化趋势 是一致的,但具体数值存在差异。由于 GRAPES\_ MESO 生成的原始预报数值高估了降雨量和持续 时间,故用原始预报降雨量驱动预报系统得到的结 果会稍大于用实测降雨模拟得到的预报结果,且峰 现时间延迟了1小时;而利用重构数据模拟的预测 结果更接近于实测结果,峰现时间也与实测降雨模 拟结果一致,但1小时至2小时的模拟数值超过了 使用原始预报降雨得出的数值,这说明重构方法仍 存在一定的不确定性。



图 7 2017 年 8 月 7 日现场图片与模拟结果对比(t=6 h) Fig. 7 Comparison of field pictures and simulation results on August 7, 2017 (t=6 h)



图 8 不同输入降雨条件下的淹没面积变化过程 Fig. 8 Simulated inundation area by using different input data



图 9 不同输入降雨条件下的最大水深变化过程 Fig. 9 Simulated max water depth by using different input data

图 8、图 9 所示结果表明,使用重构降雨得出的 内涝预报结果的相对误差在大多数时刻都较低。其 预报面积和水深的平均相对误差分别为 11.24%和 3.75%;预报面积和水深的 η<sub>NSE</sub> 分别为 0.89 和 0.94。重构方法能够提升模型的预报性能,但重构 方法改进的降雨数据存在一定的不确定性,可能会 使预报结果出现偏差。同时,原始预测数据的时空 分辨率不足也是影响预报准确性的另一因素。由于 地形平坦,研究区域内的气候变化不大,因此,具有 中尺度时空分辨率的预测数据可以在该区域使用。 但是致涝强降雨具有局部分布的特点,应尽可能使 用具有精细时空分辨率的预报降雨数据。

# 4 结 论

本文通过集成 GRAPES\_MESO 数值天气预报 模型与水动力模型,构建了城市内涝预报模型,并将 该模型应用于沣西新城区域。

1) 针对 GRAPES\_MESO 数值天气预报模型 的预报产品存在不确定性的问题,基于回归分析方 法,提出了一种重构预报降雨数据的方法。

2)集成模型能够准确预报内涝点位置,预报淹
 没面积和水深的平均相对误差分别为 11.24%和
 3.75%, η<sub>NSE</sub>分别为 0.89 和 0.94。

3)在Ⅱ号典型降雨算例中,集成内涝预报模型 耗时 2.45小时完成了 7小时内涝过程的模拟,内涝 预报信息可于内涝发生前约 9小时发布。

本文提出的城市内涝预报模型预见期较长、准确性较高,在城市防涝工作中具有巨大的应用潜力。 内涝预报的准确性很大程度上取决于预报降雨的质量,因此,改进和优化数值天气预报模型仍然是提高 内涝预报准确性最主要和最直接的手段。在下一步 研究中,将开发天气预报模型降尺度方法,以便获取 更高分辨率的降雨数据。

#### 参考文献:

[1] 张建云, 宋晓猛, 王国庆, 等. 变化环境下城市水文学的发展与挑战: I. 城市水文效应[J]. 水科学进展, 2014, 25(4): 594-605.

ZHANG Jianyun, SONG Xiaomeng, WANG Guoqing, et al. Development and challenges of urban hydrology in a changing environment: I: hydrological response to urbanization [J]. Advances in Water Science, 2014, 25 (4): 594-605.

[2] WU X S, WANG Z L, GUO S L, et al. Scenario-based projections of future urban inundation within a coupled hydrodynamic model framework: a case study in Dongguan City, China [J]. Journal of Hydrology, 2017, 547:428-442.

- [3] EMANUEL K. Assessing the present and future probability of hurricane Harvey's rainfall[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2017, 114(48): 12681-12684.
- [4] CHEN S H, LIN Y H, CHANG L C, et al. The strategy of building a flood forecast model by neuro-fuzzy network[J]. Hydrological Processes, 2010, 20(7): 1525-1540.
- LI J, CHEN Y B, WANG H Y, et al. Extending flood forecasting lead time in a large watershed by coupling WRF QPF with a distributed hydrological model[J]. Hydrology and Earth System Sciences, 2017, 21(2): 1279-1294.
- [6] TIAN J Y, LIU J, YAN D H, et al. An assimilation test of Doppler radar reflectivity and radial velocity from different height layers in improving the WRF rainfall forecasts [J]. Atmospheric Research, 2017, 198: 132-144.
- [7] HABIBI H, DASGUPTA I, NOH S, et al. High-resolution hydrologic forecasting for very large urban areas [J]. Journal of Hydroinformatics, 2019, 21(3): 441-454.
- [8] XIA X L, LIANG Q H, MING X D, et al. An efficient

and stable hydrodynamic model with novel source term discretization schemes for overland flow and flood simulations[J]. Water Resources Research, 2017, 53(5): 3730-3759.

[9] 高二鹏. 不同植被边坡糙率研究[D]. 北京:北京林业 大学, 2014.

GAO Erpeng, Research on manning coefficient of different vegetated slope[D]. Beijing: Beijing Forestry University, 2014.

- [10] 李贵玉. 黄土丘陵区不同土地利用类型下土壤入渗性 能对比研究[D]. 杨凌:西北农林科技大学,2007.
  LI Guiyu. Comparative study of soil infiltration under different land uses in loess hilly regions[D]. Yangling: Northwest A&F University, 2007.
- [11] HOU J M, SIMONS F, MAHGOUB M, et al. A robust well-balanced model on unstructured grids for shallow water flows with wetting and drying over complex topography [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2013, 257: 126-149.
- [12] HOU J M, WANG T, LI P, et al. An implicit friction source term treatment for overland flow simulation using shallow water flow model[J]. Journal of Hydrology, 2018, 564: 357-366.

(责任编辑 周 蓓)